МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1979

УДК 539.376

О ПРИНЦИПЕ СООТВЕТСТВИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ СТАРЕЮЩИХ ТЕЛ

Н. Х. АРУТЮНЯН, А. А. ЗЕВИН

(Москва, Ленинград)

В теории ползучести стареющих тел известны представления [1, 2], позволяющие при определенных условиях выразить решение граничной задачи теории ползучести через решение соответствующих упругих задач. Наиболее общая формулировка указанных представлений дана в [3, 4].

Случай стареющих тел с растущими по данному закону разрезами и полостями рассмотрен в [5].

Ниже доказывается, что при определенных видах внешних воздействий подобное представление можно получить для следующих классов нелинейных задач теории ползучести стареющих тел: геометрически нелинейных при больших углах поворота, но малых удлинениях и сдвигах, не превышающих предела пропорциональности; геометрически и физически нелинейных при больших углах поворота и малых, но превосходящих предел пропорциональности удлинениях и сдвигах, когда нелинейные уравнения состояния имеют форму [6, 7].

1. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние упругого тела, когда удлинения и сдвиги малы и не превосходят предела пропорциональности, а углы поворота существенно велики.

В этом случае геометрической нелинейности определяющие соотношения для однородного упругого тела можно принять в виде

$$\sigma^{\circ ij}(r)=\frac{E_0}{1+\nu}\left\{[\varepsilon_{ij}{}^{\circ}(r)-\varepsilon_{ij}{}^{\vee}(r)]+\delta_{ij}\frac{\nu}{1-2\nu}[\varepsilon_{kk}{}^{\circ}(r)-\varepsilon_{kk}{}^{\vee}(r)]\right\}$$
$$\sigma^{\circ}(r)=\sigma^{\circ ii}(r),\qquad \varepsilon_{ij}{}^{\vee}(r)=\varepsilon^{\vee}(r)\,\delta_{ij}\tag{1.1}$$

Здесь r — радиус-вектор лагранжевых координат, E_0 — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, δ_{ij} — символ Кронекера, $\varepsilon_{ij}{}^{\vee}(r)$ — компоненты тензора вынужденной деформации, $\varepsilon_{ij}{}^{\circ}(r)$ — компоненты тензора конечных деформаций Коши — Грина в базисе начального состояния, $\sigma^{\circ ij}(r)$ — компоненты тензора напряжения Коши в базисе актуального состояния.

Будем полагать, что вынужденная деформация (вызванная температурным воздействием, усадкой или другими причинами) мала, т. е. $\varepsilon_{ij}(r)\ll 1$.

Для стареющих тел, обладающих одновременно свойствами ползучести и изменяемости во времени модуля мгновенной деформации, уравнение состояния можно представить в форме [1, 2]:

$$\sigma^{ij}(r,t)=\frac{E(t)}{1+\nu}\left[L(\varepsilon_{ij}(r,t)-\varepsilon_{ij}{}^{\vee}(r,t))+\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}L(\varepsilon_{kk}(r,t)-\varepsilon_{kk}{}^{\vee}(r,t))\right]$$
$$Ly(t)=(I+R^*)\,y(t)=y(t)-\int_{\tau_0}^{t}R(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau\tag{1.2}$$

Здесь $E(t)$ — модуль мгновенной деформации, $R(t, \tau)$ — ядро релаксации, I — тождественный оператор, τ_0 — момент приложения воздействий.

При этом компоненты тензоров деформаций и напряжений определены в деформированном упругоползучем теле аналогично данному выше определению компонентов $\varepsilon_{ij}^{\circ}(r)$ и $\sigma^{\circ ij}(r)$ в деформированном упругом теле.

Заметим, что ядро релаксаций $R(t, \tau)$ является резольвентой оператора

$$Ny(t)=y(t)+\int_{\tau_0}^{t}K(t,\tau)y(\tau)d\tau, \qquad E(t)=E_0\mu(t) \tag{1.3}$$

$$K(t,\tau)=-E(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau)\right]$$

где $C(t, \tau)$ — мера ползучести материала, $K(t, \tau)$ — ядро ползучести, E_0 — модуль мгновенной деформации при $t=\tau_0$.

Мера ползучести $C(t, \tau)$, ядро релаксации $R(t, \tau)$ и модуль упруго-мгновенной деформации $E(\tau)$ для данного материала определяются из опыта на простейшую ползучесть и релаксацию, как и в случае малых деформаций.

2. Пусть напряженно-деформированное состояние упругоползучего тела, свойства которого описываются соотношениями (1.2), вызвано только постоянной во времени вынужденной деформацией с компонентами $\varepsilon_{ij}{}^{\vee}(r)$, заданными во всей занимаемой телом области Ω, и перемещениями $u^{\vee}(r)$ на части его поверхности S_u (перемещения возникают мгновенно и далее удерживаются постоянными).

Объемные силы, как и поверхностные, на остальной части тела S_σ полагаем равными нулю.

Тогда компоненты тензоров деформаций, напряжений и вектора перемещений $u_i(r, t)$ в упругоползучем теле в рассматриваемом случае геометрической нелинейности должны удовлетворять уравнениям равновесия[1], которые при отсутствии массовых сил и пренебрежении инерционными членами можно записать так [8, 9]:

$$\sigma_{,i}{}^{ik}+\sigma^{ij}(2\varepsilon_{ik,j}-\varepsilon_{ij,k})=0 \tag{2.1}$$

должны удовлетворять зависимостям, связывающим компоненты тензора деформаций и векторы перемещений

$$\varepsilon_{ij}={}^1/_2[u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}] \tag{2.2}$$

а также должны удовлетворять и граничным условиям

$$u_i(r, t)=u_i{}^{\vee}(r), \quad r\in S_u; \quad \sigma^{ij}(r, t)n_i=0, \quad r\in S_\sigma \tag{2.3}$$

Здесь $n=\{n_i\}$ — внешняя нормаль к граничной поверхности S_σ, на которой напряжение отсутствует, а S_u — участок граничной поверхности S, на которой заданы перемещения.

---

[1] Для простоты записи в уравнениях аргументы r и t опущены.

3. Пусть $\sigma^{\circ ij}(r)$, $\varepsilon_{ij}^{\circ}(r)$, $u_i^{\circ}(r)$ — решение граничной задачи для упругого тела, деформации которого сопровождаются большими углами поворота при малых удлинениях и сдвигах, не превосходящих предела пропорциональности. Тогда компоненты тензора деформации $\varepsilon_{ij}^{\circ}(r)$ и напряжений $\sigma^{\circ ij}(r)$, а также вектора перемещений $u_i^{\circ}(r)$ будут удовлетворять закону упругости (1.1), нелинейным уравнениям равновесия (2.1), соотношениям (2.2) и граничным условиям (2.3). Прямой подстановкой можно показать, что решение $\varepsilon_{ij}(r, t)$, $\sigma^{ij}(r, t)$, $u_i(r, t)$ граничной задачи для такого же тела, если только его свойства описываются законом ползучести (1.2), можно выразить через решение $\varepsilon_{ij}^{\circ}(r)$, $\sigma^{\circ ij}(r)$, $u_i^{\circ}(r)$ граничной задачи для упругого тела следующим образом:

$$\sigma^{ij}(r, t)=\sigma^{\circ ij}(r)h(t), \quad \varepsilon_{ij}(r, t)=\varepsilon_{ij}^{\circ}(r)$$
$$u_i(r, t)=u_i^{\circ}(r), \quad h(t)=\mu(t)[I+R^*]\cdot 1 \tag{3.1}$$

Полученный результат можно сформулировать в виде следующей *теоремы*:

Пусть напряженное состояние в стареющем упругоползучем теле, деформации которого сопровождаются большими углами поворота при малых удлинениях и сдвигах, не превышающих предела пропорциональности, вызвано только постоянной во времени малой вынужденной деформацией $\varepsilon_{ij}^{\vee}(r)$, заданной во всей области Ω этого тела, и перемещениями $u^{\vee}(r)$ на части его поверхности S_u. Остальная часть граничной поверхности тела свободна от внешних усилий, и объемные силы отсутствуют. Тогда деформации и перемещения в рассматриваемом теле совпадают с соответствующими деформациями и перемещениями геометрически нелинейной упругой задачи для этого же тела, а напряжения $\sigma^{ij}(r, t)$ связаны с $\sigma^{\circ ij}(r)$ соотношениями

$$\sigma^{ij}(r, t)=\sigma^{\circ ij}(r)\mu(t)\left[1-\int_{\tau_0}^{t} R(t, \tau)\,d\tau\right]. \tag{3.2}$$

4. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние стареющего упругоползучего тела, деформации которого сопровождаются большими углами поворота при малых, но превышающих предел пропорциональности, удлинениях и сдвигах.

Уравнение состояния для стареющего упругоползучего тела примем в форме [6, 7]:

$$\begin{gathered}
S^{ij}(r,t)=\frac{E_0}{1+\nu}\mu(t)\Big\{f_1[\varepsilon_u(r,t),\varepsilon(r,t)]e_{ij}(r,t)-\\
-\int_{\tau_0}^{t} R(t,\tau)f_1[\varepsilon_u(r,\tau),\varepsilon(r,\tau)]e_{ij}(r,\tau)\,d\tau\Big\}\\
\sigma(r,t)=\frac{E_0}{1-2\nu}\mu(t)\Big\{f_2[\varepsilon_u(r,t),\varepsilon(r,t)]\varepsilon(r,t)-\\
-\int_{\tau_0}^{t} R(t,\tau)f_2[\varepsilon_u(r,t),\varepsilon(r,\tau)]\varepsilon(r,\tau)\,d\tau\Big\}
\end{gathered} \tag{4.1}$$

$$3\varepsilon=\varepsilon_{ij}\delta_{ij}, \quad 3\sigma=\sigma^{ij}\delta_{ij}, \quad S^{ij}=\sigma^{ij}-\sigma\delta_{ij}$$
$$e_{ij}=\varepsilon_{ij}-\varepsilon\delta_{ij}, \quad \varepsilon_u^2={}^2/{}_3 e_{ij}e_{ij}, \quad E(t)=E_0\mu(t)$$

Здесь ε_u и ε — инварианты тензора деформаций, $R(t, \tau)$ — ядро релаксации, $E(t)$ — модуль упругомгновенной деформации.

Ядра релаксаций в соотношениях (4.1), описывающие изменения формы и объема, приняты совпадающими.

Предполагается, что функции f_1 и f_2 в соотношениях (4.1) не зависят от вида напряженного состояния и при $t=\tau_0$ удовлетворяют условиям, указанным в [10], для существования соответствующих потенциалов напряжений и деформаций.

Эти функции, как и ядро релаксации $R(t, \tau)$, определяются экспериментально. Система соответствующих опытов описана в [6].

Рассмотрим случай, когда напряженно-деформированное состояние нелинейно упругоползучего тела, свойства которого описываются соотношениями (4.1), вызвано только воздействием перемещений $u^{\check{}}(r)$, заданных на части поверхности тела S_u, которые сообщаются мгновенно и далее удерживаются постоянными. При этом как объемные, так и поверхностные силы на остальной части $S_\sigma=S-S_u$ поверхности тела S полагаем равными нулю. В этом случае краевая задача описывается системой уравнений (2.1), (2.2) и (4.1) с граничными условиями (2.3).

Если в уравнении состояния (4.1) положить $t=\tau_0$, то получим соответствующую краевую задачу для физически нелинейного упругого тела. Ее решение, как и прежнее, будем обозначать через $u_i^\circ(r)$, $\varepsilon_{ij}^\circ(r)$ и $\sigma^{\circ ij}(r)$.

Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что решение $u_i(r, t)$, $\varepsilon_{ij}(r, t)$ и $\sigma^{ij}(r, t)$ краевой задачи для нелинейно упругоползучего тела выражается через решение соответствующей задачи для нелинейного упругого тела соотношениями

$$\begin{gathered} u_i(r, t)=u_i^\circ(r), \qquad \varepsilon_{ij}(r, t)=\varepsilon_{ij}^\circ(r) \\ \sigma^{ij}(r,t)=\sigma^{\circ ij}(r)h(t), \qquad h(t)=\mu(t)\left[1-\int_{\tau_0}^{t} R(t,\tau)\,d\tau\right] \end{gathered} \tag{4.2}$$

Следует отметить, что для рассматриваемой здесь модели нелинейно упругоползучего тела, когда его деформации сопровождаются большими углами поворота при малых, но превышающих предел пропорциональности удлинениях и сдвигах, часто бывает целесообразно воспользоваться прямым законом ползучести, имеющим вид [6, 7]:

$$\begin{gathered} e_{ij}(r,t)=\frac{1}{2G(t)}\left\{f_1^*[\sigma_u(r,t),\sigma(r,t)]S^{ij}(r,t)+\right. \\ \left.+\int_{\tau_0}^{t} K(t,\tau)f_1^*[\sigma_u(r,\tau),\sigma(r,\tau)]S^{ij}(r,\tau)\,d\tau\right\} \\ \varepsilon(r,t)=\frac{1}{3K_0(t)}\left\{f_2^*[\sigma_u(r,t),\sigma(r,t)]\sigma(r,t)+\right. \\ \left.+\int_{\tau_0}^{t} K(t,\tau)f_2^*[\sigma_u(r,\tau),\sigma(r,t)]\sigma(r,\tau)\,d\tau\right\} \end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\sigma_u={}^3/_2 S^{ij}S^{ij}, \qquad 3\sigma=\sigma^{ij}\delta_{ij}, \qquad G(t)=\frac{E_0\mu(t)}{2(1+\nu)}, \qquad K_0(t)=\frac{E_0\mu(t)}{3(1-2\nu)}$$

где σ_u и σ — инварианты тензора напряжения, $K(t, \tau)$ — ядро ползучести, e_{ij} и S^{ij} — компоненты девиаторов деформаций и напряжений.

Заметим, что при вычислениях ядер релаксаций $R(t, \tau)$ по заданным ядрам ползучести $K(t, \tau)$ встречаются значительные трудности; в частности, экспериментальное определение функции $K(t, \tau)$ проще, чем функции $R(t, \tau)$, так как осуществить испытание на ползучесть легче, чем на релаксацию. Поэтому уравнение состояния (4.3) для указанной выше модели нелинейно упругоползучего тела имеет самостоятельное значение.

Пусть функции f_1^* и f_2^*, входящие в определяющее соотношение (4.3), являются однородными функциями с одинаковым показателем однородности α:

$$f_1^*(\lambda\sigma_u, \lambda\sigma)=\lambda^\alpha f_1(\sigma_u, \sigma), \qquad f_2^*(\lambda\sigma, \lambda\sigma)=\lambda^\alpha f_2(\sigma_u, \sigma) \tag{4.4}$$

Тогда прямой подстановкой можно показать, что решение $u_i(r, t)$, $\varepsilon_{ij}(r, t)$ и $\sigma^{ij}(r, t)$ краевой задачи для нелинейно упругоползучего тела выражается через решение соответствующей задачи для нелинейно упругого тела соотношениями (4.2), где функция $h(t)$ должна удовлетворять интегральному уравнению

$$h^{\alpha+1}(t)+\int_{\tau_0}^{t} K(t, \tau)h^{\alpha+1}(\tau)d\tau=\mu(t) \qquad (t>\tau_0). \tag{4.5}$$

Отметим, что структура определяющих уравнений (1.2), (4.1) и (4.3) для принятой здесь модели нелинейно упругоползучего тела удовлетворяет требованию независимости системы отсчета [11].

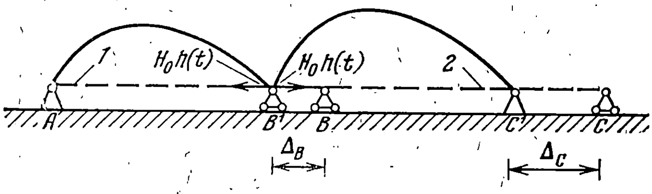
5. В качестве примера рассмотрим гибкую полоску из линейно или нелинейно ползучего материала, которая в момент τ_0 изгибается в кольцо, склеивается (или сваривается) торцами встык и удерживается, пока это необходимо, в изогнутом положении с помощью зажимов.

Пусть прочность материала в стыке возрастает во времени по закону $\sigma_R(t-\tau_0)$, в то же время напряжения в полоске релаксируют во всех точках тела по закону (3.1) или (4.2). Если максимальное из двух краевых напряжений в стыке в момент τ_0 равно $\overset{\circ}{\sigma}_{\max}$, то в дальнейшем, согласно теореме п. 3, оно релаксирует по закону $\overset{\circ}{\sigma}_{\max}h(t)$ и остается максимальным для всех точек стыка. Из условия равенства максимальных и допускаемых напряжений в стыке получим уравнение для определения момента t_1, после которого зажимы могут быть сняты: $\sigma_R(t_1-\tau_0)=\overset{\circ}{\sigma}_{\max}h(t_1)$.

В дальнейшем форма изогнутой полоски остается такой же, как и в начальный момент, напряжения в ней продолжают релаксировать по тому же закону $\sigma^\circ(r)h(t)$, а $\sigma_R(t-\tau_0)$ материала в стыке нарастает, поэтому при $t>t_1$ выполняется условие $\sigma_R(t-\tau_0)>\overset{\circ}{\sigma}_{\max}h(t)$, что обеспечивает прочность стыка.

В качестве другого примера рассмотрим гибкие стержни *1* и *2*, вообще говоря, переменного сечения, которые изготовлены из одного материала и прикреплены концами к неподвижной опоре A и подвижным опорам B и C (фигура). Пусть в момент τ_0 опора C перемещается влево на величину Δ_C и закрепляется в положении C^1, а средняя опора в результате отпора со стороны каждого из стержней занимает некоторое равновесное положение B^1. При этом стержни, вообще говоря, теряют устойчивость и прогибаются примерно так, как показано на фигуре. Из результатов, полученных в пп. 3, 4, следует, что в данном случае при $t>\tau_0$ форма выпучившихся стержней во времени не изменяется, действующие на опоры со стороны стержней силы релаксируют во времени пропорционально функции $h(t)$, которая зависит только от упругих реологических свойств материала. При этом действующие на подвижную опору силы для любого момента времени $t>\tau_0$ взаимно уравновешиваются и она продолжает оставаться в прежнем (как при $t=\tau_0$) положении B^1.

Если же условия теоремы п. 3 не выполнены, то изменение во времени напряженно-деформированного состояния системы может быть зна-



чительно более сложным. Это особенно ясно видно, если правая опора остается незакрепленной и нагружается заданной постоянной силой P, для которой выполнены условия $P_{1*}^{\infty}<P<P_{1*}^{\circ}$, $P<P_{2*}^{\infty}<P_{2*}^{\circ}$, где P_{1*}°, P_{1*}^{∞}, P_{2*}° и P_{2*}^{∞} — значения упругомгновенной и длительной критических нагрузок для первого и второго стержней. Тогда до некоторого момента времени t_*, являющегося критическим для первого стержня при нагрузке P, стержни деформируются по закону ползучести, оставаясь прямолинейными. При $t>t_*$ второй стержень остается прямолинейным, тогда как первый выпучивается. Поэтому смещения $u(r, t)$ и деформации $\varepsilon_{ij}(r, t)$ не остаются неизменными, а напряжения $\sigma^{ij}(r, t)$ изменяются во времени не пропорционально одному временному оператору.

Рассмотрим пример воздействия вынужденной деформации. Пусть в гибкой полоске, одним или двумя торцами защемленной, которая занимает область $0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant z\leqslant h$ и изготовлена из стареющего линейно упругоползучего материала, в момент τ_0 возникает малая вынужденная деформация $\varepsilon_{ij}^{\vee}(x, z)$, далее остающаяся неизменной. Тогда при $t=\tau_0$ полоска изгибается так, что смещения, деформации и напряжения приобретают значения $u_i^{\circ}(x, z)$, $\varepsilon_{ij}^{\circ}(x, z)$ и $\sigma^{\circ ij}(x, z)$. При этом углы поворота будут, вообще говоря, значительными, если выполнено условие $h\ll l$. В соответствии с теоремой п. 3 легко убедиться, что при $t>\tau_0$ в полоске происходит лишь релаксация напряжений по закону (3.1), а деформация $\varepsilon_{ij}(x, z, t)$ и перемещения $u_i(x, z, t)$ остаются неизменными.

Поступила 12 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Напряжения и деформации в бетонных массивах с учетом ползучести бетона. Докл. АН АрмССР, 1947, т. 7, № 5.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
3. *Харлаб В. Д.* К общей линейной теории ползучести. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники, 1961, т. 68.
4. *Трояновский И. Е., Колтунов М. А.* Об одном методе решения квазистатических краевых задач вязкоупругости для сред с изменяющимися во времени свойствами. Механика полимеров, 1969, № 6.
5. *Трапезников Л. П., Шойхет Б. А.* О решении задачи теории ползучести для стареющих тел с растущими разрезами и полостями. ПММ, 1978, т. 42, вып. 6.
6. *Москвитин В. В.* Об одной модели вязкоупругой среды, учитывающей влияние вида напряженного состояния. Механика полимеров, 1969, 6.
7. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., «Наука», 1977.
8. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Судпромгиз, 1958.
9. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
10. *Быков Д. Л.* Основные уравнения и теоремы для одной модели физически нелинейной среды. МТТ, 1966, № 4.
11. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., «Мир», 1975.