

ПЛОСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ,
ОСНОВАННАЯ НА СИНТЕЗЕ СКОЛЬЖЕНИЙ

М. Я. ЛЕОНОВ, Е. Б. ИСНЕВИЧ, Б. А. РЫЧКОВ

(Фрунзе)

Рассматриваются материалы, условие текучести которых не зависит от первого (линейного) инварианта тензора напряжений. Предполагается, что при нагружении тела среднее главное напряжение не меняет своего направления. Упрощенно учитывается скорость нагружения.

1. Основным механизмом пластической деформации поликристаллических материалов является перемещение дислокаций (локальные скольжения). От скольжений в плоскостях с нормальными n , заключенными внутри телесного угла $d\Omega$, в направлениях l , заключенных внутри угла $d\omega$, произойдет сдвиг

$$d\gamma_{nl} = \varphi_{nl} d\Omega d\omega \quad (1.1)$$

где φ_{nl} — интенсивность скольжений [1] в плоскостях с нормалью n в направлении l .

Суммирование сдвигов (1.1) по области D всех скольжений дает компоненты тензора пластической деформации

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \iiint_D (n_i l_j + n_j l_i) \varphi_{nl} d\Omega d\omega \quad (i, j = x, y, z) \quad (1.2)$$

Таким образом, пластическую деформацию можно описать интенсивностью скольжений φ_{nl} , являющейся функцией двух углов, определяющих положение нормали n к плоскости скольжения, и направления l , в котором происходит скольжение в указанной плоскости.

Пусть L — некоторое направление в плоскости с нормалью n , а l означает произвольное направление скольжения в этой плоскости. От всех скольжений в плоскостях с нормальными n , заключенными внутри бесконечно малого телесного угла $d\Omega$, компонента γ_{nl} тензора пластической деформации, согласно (1.2), получит приращение

$$\Delta\gamma_{nl} = 2\Phi_{nL} d\Omega, \quad \Phi_{nL} = \int_M \varphi_{nl} \cos \omega_{Ll} d\omega_{Ll} \quad (1.3)$$

где M — множество направлений положительного скольжения; ω_{Ll} — угол между направлениями L и l .

Обозначим через η такое направление в плоскости с нормалью n , которое пересекает ось Oz , и представим $\omega_{Ll} = \omega_{L\eta} + \omega_{\eta l}$. Тогда

$$\Phi_{nL} = \Phi_{n\eta} \cos \omega_{L\eta} + \Phi_{n\xi} \sin \omega_{L\eta} \quad (1.4)$$

$$\Phi_{n\eta} = \int_M \Phi_{n\eta} \cos \omega_{n\eta} d\omega_{n\eta}, \quad \Phi_{n\xi} = \int_M \Phi_{n\eta} \sin \omega_{n\eta} d\omega_{n\eta}$$

где ξ — ось, ортогональная плоскости $n\eta$.

В осях $n\eta\xi$ рассматриваемое множество скольжений определит тензор

$$\Delta\gamma_{n\eta} = 2\Phi_{n\eta} d\Omega, \quad \Delta\gamma_{n\xi} = 2\Phi_{n\xi} d\Omega, \quad \Delta\gamma_{nn} = \Delta\gamma_{\eta\eta} = \Delta\gamma_{\xi\xi} = 0 \quad (1.5)$$

Отсюда получим суммарную компоненту тензора пластической деформации в произвольных осях

$$\gamma_{\nu\lambda} = \iint_{\Pi} [\Phi_{n\eta} (n_\nu \eta_\lambda + n_\lambda \eta_\nu) + \Phi_{n\xi} (n_\nu \xi_\lambda + n_\lambda \xi_\nu)] d\Omega \quad (1.6)$$

где Π — множество всех нормалей к плоскостям скольжения.

Обозначим через Φ_n вектор, лежащий в плоскости с нормалью n , компоненты которого определяются формулами (1.4). Тогда Φ_{nL} представляет проекцию этого вектора на направление L . Следовательно, тензор пластических деформаций (1.6) определяется, если задается «вектор скольжений» Φ_n или две скалярные функции $\Phi_{n\eta}$ и $\Phi_{n\xi}$, зависящие от двух углов, определяющих положение нормали к плоскости скольжения.

Синтез скольжений, начатый формулой (1.3) (для Φ_{nL}), можно продолжить. Пусть ν — нормаль к произвольной плоскости скольжения, а λ — некоторое направление в этой плоскости. Приращение компоненты тензора пластической деформации от всех скольжений в плоскостях с нормальями n , удовлетворяющими условию $n \cdot \lambda = 0$, можно [2] представить в виде

$$d\gamma_{\nu\lambda} = r_{\nu\lambda} d\beta, \quad r_{\nu\lambda} = \int_W (\Phi_{n\eta} \eta_\lambda + \Phi_{n\xi} \xi_\lambda) n_\nu \cos w_{\nu n} dw_{\nu n} \quad (1.7)$$

где $w_{\nu n}$ — угол между направлениями n и ν ; $d\beta$ — бесконечно малый угол поворота плоскости, содержащей указанные направления (n и ν), вокруг оси OA , которая характеризуется условием $OA = \nu \times \lambda$; множество W включает в себя все нормали n , удовлетворяющие условию $n \cdot \lambda = 0$.

2. Ограничимся рассмотрением такого класса нагружения, при котором среднее главное напряжение не меняет своего направления. Если обозначить его через σ_z , то

$$\tau_{zx} = \tau_{yz} = 0, \quad |\sigma_z - (\sigma_x + \sigma_y) / 2| \leq \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} / 2 \quad (2.1)$$

В дальнейшем будем считать, что нормаль ν перпендикулярна оси Oz . Тогда приращение деформации (1.7) будем интерпретировать как результат (фиктивных) скольжений по плоскостям, параллельным оси Oz , в направлении λ , перпендикулярном оси Oz , с интенсивностью⁴ r_λ . Такие скольжения назовем приведенными.

Разницу между действительными (т. е. от всех скольжений) компонентами деформации и полученными от приведенных скольжений назовем дополнительными компонентами деформации. В отличие от теории течения будем считать, что при малых деформациях только тензор дополнительных приращений деформаций соосен тензору напряжений. Эти приращения $d\epsilon_{1,3}^g$ в главных осях тензора напряжений выразим через приращения относительных удлинений от приведенных скольжений в этих осях $d\epsilon_{1,3}^n$:

$$d\epsilon_1^g = (\tau_{1z} / \tau_m)^q d\epsilon_1^n, \quad d\epsilon_3^g = (\tau_{z3} / \tau_m)^q d\epsilon_3^n, \quad q = \text{const} \quad (2.2)$$

⁴ Индекс ν далее везде опускается.

где τ_{12} , τ_{23} — главные касательные напряжения, τ_m — максимальное касательное напряжение.

Учитывая, что скольжения не изменяют объема тела, получим действительные приращения пластических деформаций

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_x^n + d\varepsilon_x^g, \quad d\varepsilon_y = d\varepsilon_y^n + d\varepsilon_y^g \quad (2.3)$$

$$d\gamma_{xy} = d\gamma_{xy}^n + d\gamma_{xy}^g, \quad d\varepsilon_z = - (d\varepsilon_x + d\varepsilon_y)$$

(Суммируя сдвиги (1.7), в рассматриваемом случае будем иметь

$$\varepsilon_x^n = -\varepsilon_y^n = -\frac{1}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} r(\beta) \sin 2\beta \, d\beta, \quad \gamma_{xy}^n = \int_{\beta_1}^{\beta_2} r(\beta) \cos 2\beta \, d\beta, \quad r(\beta) = r_\lambda \quad (2.4)$$

где $\beta_{1,2}$ — границы веера направлений (приведенных) скольжений, последние характеризуются углом β , отсчитываемым от оси Ox .

Таким образом, пластическая деформация будет полностью определена, если известна интенсивность приведенных скольжений.

3. В результате различного рода препятствий на пути движения дислокаций возникает сопротивление сдвигу S_λ [1]. Начальное его значение для упрочняющихся материалов равно пределу текучести. Этот предел зависит от вида напряженного состояния и скорости нагружения. Для некоторого класса материалов [2] указанное сопротивление зависит в основном только от текущего ее значения; это проявляется в том, что при изменении скорости нагружения влияние истории этого изменения быстро затухает и диаграмма упрочнения становится такой же, какой была бы при нагружении с соответствующей постоянной скоростью.

Из указанного класса материалов ниже рассматриваются только такие, пределы текучести которых не зависят от линейного инварианта тензора напряжений (одинаковы при растяжении и сжатии).

Введем плоскую модель, допускающую скольжения, только нормальные к оси Oz . «Приведенное» сопротивление сдвигу примем в виде

$$S_\lambda = \psi(\tau_i, \tau_m, \tau_i^*) + \Psi_\lambda(\tau_i, \tau_m, \tau_i^*) (r_\lambda + c\gamma_\lambda^n) + A(1 - \tau_\lambda/\tau_m), \quad c = \text{const} \quad (3.1)$$

где τ_i — октаэдрическое касательное напряжение, τ_λ — известная компонента касательного напряжения, A — подлежащий определению параметр, зависящий, в частности, от скорости нагружения τ_i .

Функция ψ характеризует влияние упругих деформаций (т. е. напряжений) на изменение сопротивления сдвигу. Ее вид определяется условием текучести и задается в инвариантной форме [4]

$$\psi(\tau_i, \tau_m, \tau_i^*) = [F(\tau_i, \tau_i^*) + m\tau_m] / (1 + m), \quad m = \text{const} \quad (3.2)$$

Влияние скорости нагружения учитывается простейшим образом

$$F(\tau_i, \tau_i^*) = T(\tau_i^*) - k\tau_i, \quad k = \text{const} \quad (3.3)$$

При чистом сдвиге с напряжением на пределе текучести $\tau_h(\tau_i^*)$ имеем $\tau_m = \tau_h(\tau_i^*)$, $\tau_i = \sqrt{2/3} \tau_h(\tau_i^*)$, $S_\lambda|_{r_\lambda=0} = \tau_h(\tau_i^*)$, т. е.

$$\tau_h(\tau_i^*) = T(\tau_i^*) - \sqrt{2/3} k \tau_h(\tau_i^*) \quad (3.4)$$

а при растяжении с напряжением $\sigma_p(\tau_i^*)$ на пределе текучести будет

$$\sigma_p(\tau_i^*) / 2 = T(\tau_i^*) - \sqrt{2} k \sigma_p(\tau_i^*) / 3 \quad (3.5)$$

Исключая $T(\tau_i)$ из последних двух формул, получим

$$k = [3\tau_k(\tau_i) - 1.5\sigma_p(\tau_i)] / [\sqrt{2}\sigma_p(\tau_i) - \sqrt{6}\tau_k(\tau_i)] \quad (3.6)$$

или

$$\tau_k(\tau_i) / \sigma_p(\tau_i) = (k\sqrt{2} + 1.5) / (k\sqrt{6} + 3) \quad (3.7)$$

Это отношение для большинства материалов колеблется около значения 0.55, т. е. $k \approx 2$ ($\tau_k \approx 0.55 \sigma_p$). При этом из формулы (3.5) следует $T(\tau_i) \approx 1.44 \sigma_p(\tau_i)$.

Перейдем к рассмотрению последнего слагаемого в формуле (3.1). Оно отражает анизотропию в изменении сопротивления сдвигу за счет диффузии внедренных атомов и вакансий. Предполагается, что эта анизотропия снимается при разгрузке.

Заметим, что если скорость разгрузки мало отличается от скорости предшествующего нагружения, то пластическая деформация после разгрузки возникает приблизительно одновременно с изменением знака напряжения. В этом случае можно получить [5]:

$$\Psi = a \frac{\tau_i(\tau_m + k\tau_i)}{\tau_m - F(\tau_i, \tau_i)}, \quad a = \text{const} \quad \text{при} \quad \tau_i > \tau_i^* \quad (3.8)$$

$$\Psi = a \frac{\tau_i^*(\tau_m^* + k\tau_i^*)}{\tau_m^* - F(\tau_i^*, \tau_i^*)} \left[\frac{\psi(0, 0, \tau_i^*)}{\tau_m^* - \psi(\tau_i^*, \tau_m^*, \tau_i^*)} \left(1 - \frac{\tau_i}{\tau_i^*} \right) + \frac{\tau_i}{\tau_i^*} \right] \quad \text{при} \quad 0 \leq \tau_i \leq \tau_i^*$$

Здесь величины, отмеченные звездочкой, определяются в момент начала разгрузки.

4. Приравнявая «приведенное» сопротивление сдвигу соответствующей компоненте касательного напряжения, получим уравнение для определения функции $r(\beta)$, справедливое в области скольжений. Границы этой области $\beta_{1,2}$ находятся из условия непрерывности: $r(\beta_{1,2}) = 0$.

Дальнейшие выкладки не приводятся, поскольку методика вычисления компонент тензора деформации от приведенных скольжений такая же, как в плоскопластической модели Леонова — Швайко [6, 7]. Однако в отличие от последней предлагаемая теория дает возможность рассматривать как плоскую деформацию, так и (при выполнении условия (2.1)) пространственный случай напряженного состояния.

Для определения введенных постоянных достаточно знать из эксперимента диаграмму одноосного растяжения (сжатия) при данной скорости нагружения. Указанную диаграмму при малых упругопластических деформациях всегда можно аппроксимировать параболой, проходящей через две (опорные) точки на кривой упрочнения. Тогда предел текучести при растяжении σ_p будем определять как точку касания параболы линии упругого деформирования, что является разновидностью экстраполяции Лоде и представляется более приемлемым [8], чем определение этого предела по заданному допуску на остаточную деформацию.

Функция $\psi(\tau_i, \tau_m, \tau_i^*)$ должна быть положительной, пока имеет место упрочнение. Это условие выполняется в достаточно широких пределах, если положить $m=1$.

Если постоянная $q=1$, то девиаторы напряжений и деформаций пропорциональны. Отклонение от пропорциональности девиаторов, наблюдаемое в экспериментах [9]; достигается при $q < 1$. Сравнение теоретических и экспериментальных диаграмм Лоде — Надаи показало, что можно принять $q=0.75$.

Одним из наиболее распространенных испытаний на сложное нагружение является одноосное растяжение тонкостенного трубчатого образца

с последующей его подкруткой. Если при этом осевое напряжение постоянно (ортогональная догрузка), то характерной величиной считается мгновенный модуль догрузки, представляющий собой отношение бесконечно малого приращения напряжения от крутящего момента к соответствующей деформации сдвига.

Диффузионные процессы протекают относительно медленно [10] во времени. Поэтому можно предположить, что диффузионная анизотропия, т. е. величина отношения τ_k/τ_m в формуле (3.1), остается неизменной после излома траектории нагружения. Полагая, кроме того, $c=0$, из предыдущих соотношений нетрудно получить выражение для мгновенного модуля ортогональной догрузки

$$G_i = \frac{G}{1+G(1/E_c-1/E)[1-2A/(\sigma^*+2A)]} \quad (4.1)$$

где G и E — упругий модуль сдвига и модуль Юнга соответственно, σ^* — растягивающее напряжение в момент приложения догрузки, E_c — секущий модуль на диаграмме растяжения в этот момент.

Расчетами найдено, что величина A примерно в два с половиной раза меньше предела текучести при растяжении (σ_p), т. е. $A \approx 0.4\sigma_p$ (τ_i). При таком выборе A значение мгновенного модуля ортогональной догрузки согласуется с экспериментальными данными [11].

Постоянные a и c находятся из условия, что расчетная диаграмма растяжения проходит через опорные точки. Если $c=0$, то постоянную a будем определять по одной из них.

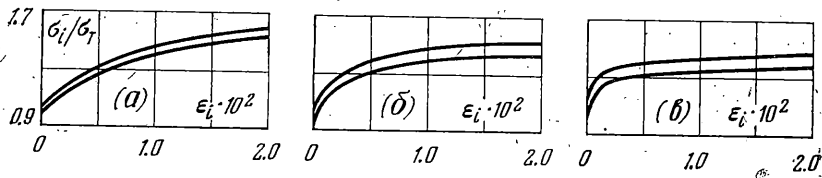
На фиг. 1, a , b , c , показаны диаграммы интенсивностей напряжений и деформаций ($\sigma_i-\varepsilon_i$) при одноосном растяжении и чистом сдвиге, которые соответствуют следующим значениям постоянной c : 0, -100, -400. Как видно, кривизну диаграммы упрочнения можно изменять при помощи параметра c в достаточно больших пределах. При этом кривые ($\sigma_i-\varepsilon_i$), полученные при чистом сдвиге, находятся ниже соответствующих кривых, построенных при одноосном растяжении. Такой результат подтверждается многочисленными экспериментальными данными.

Рассмотрим пример нагружения по двузвенным ломаным в сопоставлении с результатами опытов из [12].

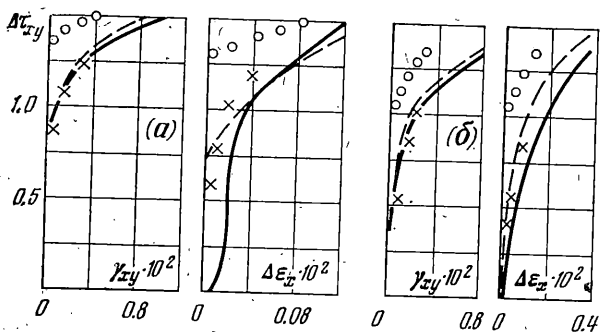
Кривизна диаграммы одноосного сжатия алюминиевого сплава 14S-T4, который использовался в этих опытах, невелика. Она может быть получена при $c=0$. Остальные параметры, найденные по приведенной методике, равны: $\sigma_p=202 \cdot 10^6$ Н/м², $T=292 \cdot 10^5$ Н/м², $A=81.5 \cdot 10^5$ Н/м², $a=8.9$.

Вычисление мгновенного модуля ортогональной догрузки показало, что в момент поворота осей главных напряжений происходит «замораживание» диффузионной анизотропии. В рассматриваемом примере оказалось, что эта анизотропия может считаться неизменной для всего второго звена траектории.

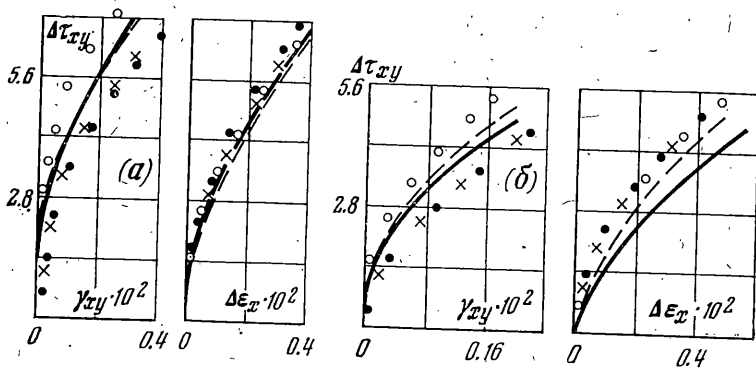
На фиг. 2—4 приведены экспериментальные и теоретические диаграммы $\Delta\tau_{xy} \sim \Delta\gamma_{xy}$ и $\Delta\tau_{xy} \sim \Delta\varepsilon_x$ (размерность $\Delta\tau_{xy}$ —Н/м²·10⁷) второго звена траектории нагружения для следующих отношений $\Delta\sigma_x/\Delta\tau_{xy}$: фиг. 2 (a соответствует (-1.13), b — отношению (-0.656)), фиг. 3 ($a=0.052$, $b=0.378$), фиг. 4 ($a=1.18$, $b=1.91$). Сплошной линией нанесены результаты экспериментов, темными точками — предсказания деформационной теории Генки—Надаи—Ильюшина, светлыми точками — теории течения, крестиками — теории скольжения Батдорфа—Будянского и пунктиром — плоской теории пластичности.



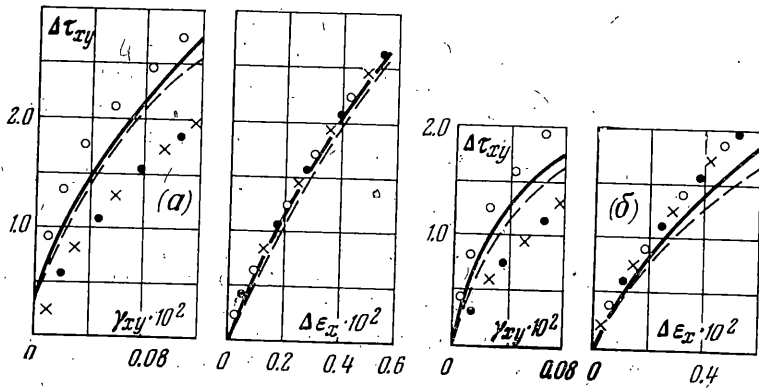
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Проведенное исследование показывает, что можно построить достаточно общую и простую теорию пластичности, которая не противоречит экспериментальным данным при произвольном нагружении, включающем так называемые угловые точки и эффект Баушингера.

Поступила 3 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов М. Я. Элементы аналитической теории пластичности. Докл. АН СССР, 1972, т. 205, № 2.
2. Леонов М. Я., Молотников В. Я., Рычков Б. А. К теории плоскопластической деформации. Изв. АН КиргССР, 1973, № 4.
3. Викторов В. В., Шапиро Г. С. Об определении динамических диаграмм растяжения металлов при умеренно-высоких скоростях деформации. Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.
4. Леонов М. Я. Основные уравнения теории пластичности. В сб.: Развитие концепции скольжения в теории пластичности. Фрунзе, «Илим», 1974.
5. Леонов М. Я., Молотников В. Я., Рычков Б. А. К развитию концепции скольжения в теории пластичности. Изв. АН КиргССР, 1973, № 2.
6. Леонов М. Я., Швайко Н. Ю. Сложная плоская деформация. Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 5.
7. Леонов М. Я., Швайко Н. Ю. О зависимости между напряжениями и деформациями в окрестности угловой точки траектории нагружения. Докл. АН СССР, 1966, т. 174, № 2.
8. Поль Б. Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения. В кн.: Разрушение, т. 2. М., «Мир», 1975.
9. Митрохин Н. М., Янг Ю. И. О систематическом характере отклонений от законов пластичности. Докл. АН СССР, 1960, т. 135, № 4.
10. Косевич А. М. Основы механики кристаллической решетки. М., «Наука», 1972.
11. Свешникова В. А. О пластическом деформировании упрочняющихся металлов. Изв. АН СССР. ОТН, 1956, № 1.
12. Budiansky B., Dow N. F., Peters R. W., Shepherd R. P. Experimental studies of polyaxial stress-strain laws of plasticity. Proc. 1-st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., Chicago, Illinois, 1951. New York, ASME, 1952.