МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1979

УДК 531.8

УПРАВЛЕНИЕ ПРЫГАЮЩИМ АППАРАТОМ. I.

ВЫБОР ПРОГРАММНОЙ ТРАЕКТОРИИ

В. Б. ЛАРИН

(Киев)

В [1] приводится описание одного из вариантов аппарата, перемещающегося по поверхности прыжками. Наряду с очевидными преимуществами этого способа передвижения отмечается, что основным недостатком таких устройств является наличие при передвижении больших ускорений. Кроме того, по мнению авторов [1], при реализации устройства этого класса основной трудностью является обеспечение устойчивости во время прыжка и особенно во время приземления. Ниже эти вопросы рассматриваются применительно к задаче управления движением двуногого шагающего аппарата [2], который часть времени шага движется в режиме свободного полета (прыжок). Полученные аналитические соотношения могут оказаться полезными при решении аналогичных задач управления (выбор программного движения, оценка величин ускорений) более сложными системами.

Рассматривается вопрос выбора стационарного режима передвижения (периодической траектории массы аппарата) и оценка основных параметров этого передвижения, таких, как величина перегрузки на фазе опирания. Исследуются связанные с передвижением энергетические затраты аппарата и обсуждается способ существенного их снижения.

1. Вывод общих соотношений. Рассмотрим задачу коррекции траектории прыгающего аппарата во время фазы опирания. Пусть шагающий аппарат [2], состоящий из точечной массы m и двух невесомых ног n_1 и n_2, на которые он поочередно опирается, совершает плоское движение вдоль оси x. Каждый шаг такого аппарата состоит из фазы опирания на ногу и из фазы свободного полета. На фиг. 1 последовательно изображены эти фазы: начало, конец опирания на ногу n_1, свободный безопорный полет, начало следующего шага (опирание на ногу n_2).

Поместим начало координат в точку опоры ноги n_1. Предположим, что приложенное к массе m усилие опорной ноги $\mathbf{F}$ направлено вдоль ноги, т. е. $\mathbf{F}=\varphi m(x\mathbf{i}+z\mathbf{k})$, где x — координаты массы m; $\mathbf{i}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы на осях x, z, а φ — коэффициент пропорциональности. Пренебрегая силами вязкого сопротивления, обозначив через g ускорение силы тяжести, получим следующую систему уравнений, описывающую движение массы m на фазе опирания [2]:

$$x^{\cdot}=v,\quad v^{\cdot}=\varphi x,\quad z^{\cdot}=u,\quad u^{\cdot}=\varphi z-g \tag{1.1}$$

Далее будет удобно рассматривать z, u, v не как функции времени t, а как функции координаты x, т. е. будем исследовать не систему (1.1), а следующие уравнения:

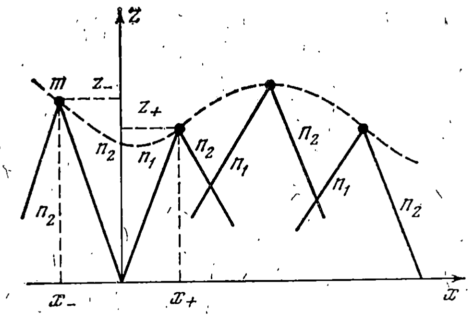
$$\frac{dz}{dx}=z'=\frac{u}{v},\quad \frac{du}{dx}=u'=\frac{\varphi z-g}{v},\quad \frac{dv}{dx}=v'=\varphi\frac{x}{v} \tag{1.2}$$

Причем первые два уравнения этой системы заменим одним уравнением второго порядка:

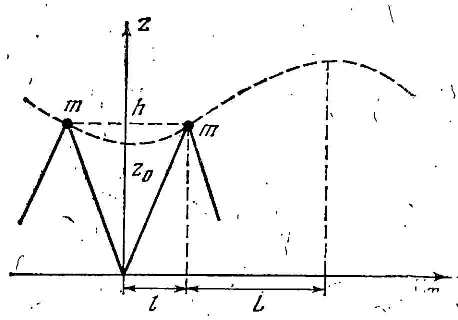
$$v^2z''+\varphi xz'-\varphi z=-g \tag{1.3}$$

Последнее уравнение (1.2) определяет v как функцию x при заданном выражении коэффициента φ. Далее будем рассматривать случай $\varphi=\text{const}$ (на фазе опирания $\varphi>0$, во время полета $\varphi=0$).

Исследуем движение аппарата на фазе опирания (на фиг. 1 индексом минус обозначены координаты массы в начале фазы опирания, а индексом



Фиг. 1



Фиг. 2

плюс — в конце этой фазы; далее эти же индексы при других фазовых координатах будут иметь аналогичный смысл). В рассматриваемом случае ($\varphi=\text{const}$) решение последнего уравнения (1.2) можно записать так:

$$v^2=v_-^2+\varphi x^2-\varphi x_-^2,\qquad x_-\leqslant x\leqslant x_+ \tag{1.4}$$

Решение уравнения (1.3) имеет вид

$$z=g/\varphi+C_1x+C_2v \tag{1.5}$$

Константы C_1, C_2 выражаются через начальные условия следующим образом:

$$C_1=\frac{z_-'v_-^2-\varphi x_-(z_--g/\varphi)}{v_-^2-\varphi x_-^2},\qquad C_2=\frac{(z_--g/\varphi-z_-'x_-)v_-}{v_-^2-\varphi x_-^2} \tag{1.6}$$

Эти соотношения позволяют рассмотреть решение задачи управления аппаратом в фазе опирания. Пусть к концу фазы прыжка (к началу фазы опирания) вертикальная координата массы m равна z_-, вертикальная и горизонтальная составляющие скорости массы m равны u_- и v_- (далее будем считать заданной не u_-, а $z_-'=u_-/v_-$). Требуется выбрать точку опоры ноги (координату начала фазы опирания x_-), усилие в ноге (коэффициент пропорциональности φ) и координату конца фазы опирания (x_+) так, чтобы в конце этой фазы фазовые координаты z_+, z_+', v_+, определяющие траекторию аппарата на последующем прыжке, равнялись заданным величинам[1]. Найдем соотношения, определяющие искомые параметры.

Из (1.4) следует

$$\varphi=(v_+^2-v_-^2)/(x_+^2-x_-^2) \tag{1.7}$$

Принимая во внимание, что $z'=C_1+C_2\varphi x/v$, получим следующие равенства:

$$z_+-z_--z_-'(x_+-x_-)=C_2(v_+-v_-)-C_2\varphi(x_+-x_-)x_-/v_-=$$
$$=C_2\varphi\left(\frac{x_+}{v_+}-\frac{x_-}{v_-}\right)\frac{x_+-x_-}{v_++v_-}v_+$$

[1] Разумеется, решение этой задачи существует не при любых значениях z_+, z_-, z_+', z_-', v_+, v_-. Далее подразумевается, что в рассматриваемой области этих параметров решение существует.

После исключения константы C_2 имеем

$$x_+ - x_- = \frac{(v_+ + v_-)(z_+ - z_-)}{v_+ z_+' + v_- z_-'} \tag{1.8}$$

Первые два уравнения системы (1.2) позволяют записать следующее соотношение:

$$\tfrac{1}{2}(z_-')^2 v_-^2 + g z_- - \varphi z_-^2 = \tfrac{1}{2}(z_+')^2 v_+^2 + g z_+ - \varphi z_+^2$$

и, следовательно,

$$\varphi = \frac{(z_+')^2 v_+^2 - (z_-')^2 v_-^2}{2(z_+^2 - z_-^2)} + \frac{2g}{z_+ + z_-} \tag{1.9}$$

Система (1.7)—(1.9) определяет x_+, x_-, φ как функции v_+, v_-, z_+, z_-, z_+', z_-'. Заметим, что процедура решения этой системы может быть сведена к определению φ из (1.9) и последующему определению x_+ и x_- из системы линейных уравнений. Действительно, определив согласно (1.9) величину φ как функцию z_+, z_-, z_+', z_-', v_+, v_-, воспользовавшись (1.8), перепишем уравнение (1.7) в следующем виде:

$$x_+ + x_- = (v_+ z_+' + v_- z_-')(v_+ - v_-)/[\varphi(z_+ - z_-)]$$

которое совместно с (1.8) определяет x_+ и x_-.

2. Выбор программной траектории. Найдем условия периодичности траектории массы m. Пусть аппарат передвигается по горизонтальной поверхности и его траектория периодична по x. Предположение об отсутствии вязкого сопротивления на участке свободного полета аппарата позволяет записать следующее соотношение для горизонтальных составляющих скорости массы m: $v_- = v_+ = v$.

В фазе опирания аппарата $\varphi \neq 0$, и из (1.7) получаем, что $x_+^2 = x_-^2$, т. е. при поступательном перемещении $x_+ = -x_- = l$. Из первых двух уравнений (1.2) следует, что на фазе свободного полета ($\varphi = 0$) и опирания ($\varphi \neq 0$) имеют место следующие соотношения:

$$\tfrac{1}{2}u_-^2 + g z_- = \tfrac{1}{2}u_+^2 + g z_+$$

$$\tfrac{1}{2}u_-^2 + g z_- - \tfrac{1}{2}\varphi z_-^2 = \tfrac{1}{2}u_+^2 + g z_+ - \tfrac{1}{2}\varphi z_+^2$$

Отсюда находим, что $\varphi(z_+^2 - z_-^2) = 0$. На фазе опирания $\varphi \neq 0$, поэтому $z_+ = z_- = h$. Далее, как следует из (1.8), $z_+' = -z_-' = z'$.

Таким образом, при поступательном перемещении аппарата периодичность по координате x траектории массы m обеспечивается выполнением следующих условий на фазе опирания[1]: $v_+ = v_- = v$, $x_+ = -x_- = l$, $z_+ = z_- = h$, $z_+' = -z_-' = z'$.

Более того, эти четыре параметра (v, l, h, z') позволяют определить коэффициент φ и далее согласно (1.6),— константы C_1, C_2, входящие в (1.4), (1.5), т. е. в рассматриваемом случае периодической траектории массы m эти четыре параметра полностью определяют движение аппарата.

Остановимся более подробно на процедуре вычисления коэффициента φ. Отметим, что выражение (1.9) не может быть использовано для этой цели, так как числитель и знаменатель первого слагаемого одновременно обращаются в нуль. Более удобно для этой цели использовать соотношение (1.6). Как следует из (1.5), в рассматриваемом случае $x_- = x_-$, $z_+ = z_-$, $v_+ = v_-$, константа $C_1 = 0$ и, согласно (1.6), имеем

$$\varphi = g/h - z_-' v^2/(hl) \tag{2.1}$$

[1] Заметим, что условие поступательного перемещения аппарата накладывает определенные ограничения на область допустимых значений констант v, l, h, z'. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен ниже.

Значение коэффициента φ можно связать и с другими параметрами траектории массы m. Так, можно выразить коэффициент φ через координату z_0 массы m при $x=0$.

Как уже отмечалось, в силу первых двух уравнений (1.2)

$$\frac{d}{dx}(u^2+2gz-\varphi z^2)=0$$

т. е. будем иметь

$$(z_-')^2v^2+2gh-\varphi h^2=2gz_0-\varphi z_0^2$$

Определив из этого соотношения z_-' и подставив в (2.1), получим уравнение

$$(\varphi^\circ-1)^2=\frac{hv^2}{gl}[\varphi^\circ(1-z_0^{\circ 2})-2(1-z_0^\circ)], \quad \varphi^\circ=\frac{\varphi h}{g}, \quad z_0^\circ=\frac{z_0}{h} \tag{2.2}$$

Было отмечено, что требование поступательного перемещения массы m накладывает определенные ограничения на область возможных значений таких параметров, как v, l, h, z'. Найдем неравенства, которым должны удовлетворять эти параметры. Из (1.4) следует, что $v^2\geqslant\varphi l^2$. С другой стороны, нижняя граница $\varphi=g/h$ достигается при $z'=0$ $(z_0=h)$. Следовательно, допустимые значения коэффициента φ должны удовлетворять следующему неравенству:

$$v^2h/(gl^2)\geqslant\varphi^\circ\geqslant1 \tag{2.3}$$

Определим область допустимых значений φ° и z_0°. Найдем как функцию z_0° верхнюю границу φ°, которую обозначим φ^*. Согласно (2.3), $\varphi^*=v^2h/(gl^2)$. Воспользовавшись (2.2), получим

$$(\varphi^*z_0^\circ)^2-2\varphi^*z_0^\circ+1=0 \tag{2.4}$$

Следовательно, $\varphi^\circ z_0^\circ\leqslant1$.

Таким образом, если значения параметров l, v, h удовлетворяют неравенству $gl^2\leqslant v^2h$, то возможно поступательное периодическое по x движение массы m. Соответствующее значение четвертого параметра (z') также не может быть выбрано произвольно. Так, например, из уравнения (2.2) можно определить значение φ°, задавшись значением $z_0^\circ\in[gl^2/v^2h,\ 1]$ и далее воспользоваться (2.1).

3. Оценка энергетических затрат при передвижении и вопросы их минимизации. Оценим величину работы, которая затрачивается при передвижении, и рассмотрим способы минимизации этой работы. Энергетический цикл такого аппарата можно описать так. Во время перемещения массы m от начала фазы опирания (координата $x=x_-=-l$) до точки, соответствующей вертикальному положению опорной ноги $(x=0)$, часть кинетической энергии массы m отбирается опорной ногой (переходит в потенциальную энергию или рассеивается). На второй половине фазы опирания (изменение координаты x от 0 до $x_+=l$) нога совершает работу, сообщая массе m дополнительную кинетическую энергию. Таким образом, приходящаяся на единицу массы работа, затрачиваемая аппаратом в течение одного шага, равна работе, выполненной опорной ногой во время второй половины фазы опирания, т. е.

$$A=\int_{z_0}^{\alpha}\varphi\rho\,d\rho=\frac{\varphi}{2}(l^2+h^2-z_0^2), \quad \rho=\sqrt{x^2+z^2}, \quad \alpha=\sqrt{h^2+l^2} \tag{3.1}$$

Пусть L — половина расстояния, которое проходит масса m во время прыжка (фиг. 2). Определим среднее (отнесенное к величине перемещения за один шаг) значение затрачиваемой работы следующим образом:

$$a=\frac{A}{2(L+l)}=\frac{\varphi(l^2+h^2-z_0^2)}{4(L+l)}$$

Входящий в это выражение коэффициент φ удобно выразить через параметр L. Приняв во внимание, что $-z_-'=z_+'=gL/v^2$, и воспользовавшись (2.1), имеем

$$\varphi=(g/h)(1+L/l) \tag{3.2}$$

Следовательно,

$$a=gl[1+(h^2-z_0^2)/l^2]/(4h) \tag{3.3}$$

Таким образом, для рассматриваемого аппарата с невесомыми ногами передвижение с фазой прыжка ($L>0$, $z_0<h$) увеличивает величину a, т. е. приводит к увеличению энергетических потерь. Однако даже при $L=0$, при практически интересных значениях l/h, может оказаться целесообразным рассмотреть вопрос об уменьшении величины a. Очевидно, уменьшить величину a при заданной величине l/h возможно, если использовать часть энергии, отдаваемой ноге массой m на первой половине фазы опирания, для разгона массы на второй половине этой фазы. Конструктивно этот подход может быть реализован с помощью упругого элемента (пружины), встроенного в ногу аппарата. Пусть усилие F, прикладываемое опорной ногой к массе m, состоит из двух частей: $F=F_\rho+F_u$; F_ρ — усилие пружины, F_u — дополнительное усилие, развиваемое активной системой управления, которое обеспечивает необходимое значение коэффициента пропорциональности φ.

Покажем, что значительное снижение величины a можно получить даже при сравнительно простых предположениях об упругих характеристиках пружины.

Пусть $F_\rho=-mc(\rho-\rho_0)$, $\rho=\sqrt{x^2+z^2}$, где c, ρ_0 — константы. При такой конструкции ноги отнесенная к единице массы работа A_u, совершаемая следящей системой (развивающей управляемое усилие F_u), на второй половине фазы опирания будет равна разности между полной работой A (см. (3.1)) и работой, которую совершит пружина (сила F_ρ) на этой фазе движения:

$$A_u=A-c\int_{z_0}^{\alpha}(\rho_0-\rho)\,d\rho=A+\frac{c}{2}(l^2+h^2-z_0^2)-c\rho_0(\alpha-z_0) \tag{3.4}$$

Пусть константы c и ρ_0 выбраны так, что управляемое усилие F_u равно нулю при $x=0$, т. е.

$$F_\rho=mc(\rho_0-z_0)=m\varphi z_0 \tag{3.5}$$

Отметим, что при таком выборе констант c, ρ_0 управляемое усилие в ноге $F_u=m\varphi\rho_0(\rho-z_0)/(\rho_0-z_0)$, и поэтому при $\rho_0>z_0$ ($\rho-z_0\geqslant0$) это усилие тормозит массу m на всей первой половине фазы опирания и совершает активную работу (разгоняет массу m) только на второй половие фазы опирания. Следовательно, в этом случае выражение (3.4) характеризует работу, выполняемую активной системой (фактические энергетические затраты), в течение всего шага, и выражение этой работы через константы **c, ρ_0 имеет вид**

$$A_u={}^1/_2c(\rho_0/z_0)(l^2+h^2-z_0^2)-c\rho_0(\alpha-z_0)$$

(согласно (3.5), $\varphi=c(\rho_0/z_0-1)$).

Определим снижение энергетических затрат, связанное с введением упругого элемента,

$$\frac{A_u}{A}=\frac{\rho_0}{\rho_0-z_0}\left(1-\frac{2z_0}{z_0+\alpha}\right).$$

В практически интересном случае ($h-z_0\ll h$, $l^2\ll h^2$) можно получить следующий упрощенный вариант этого выражения:

$$\frac{A_u}{A}\simeq\frac{\rho_0}{\rho_0-z_0}\left(\frac{h-z_0}{2h}+\frac{l^2}{4h^2}\right) \tag{3.6}$$

Таким образом, при использовании не очень жесткой пружины ($\rho_0\gg z_0$) можно существенно снизить энергетические затраты при ходьбе, т. е. уменьшить отношение A_u / A.

Величины a, $a_u=A_u / [2(L+l)]$ можно интерпретировать как приходящиеся на единицу массы силы сопротивления движению («силы трения»).

Согласно (3.2) и (3.6), величину a_u / g («коэффициент трения») можно записать так:

$$\frac{a_u}{g}\simeq\frac{\rho_0 l}{4h(\rho_0-z_0)}\left(1+\frac{h^2-z_0^2}{l^2}\right)\left(\frac{h-z_0}{2h}+\frac{l^2}{4h^2}\right) \tag{3.7}$$

На конкретном примере оценим возможный порядок величины a_u / g. Пусть $\rho_0=2z_0$, масса m совершает горизонтальное движение (отсутствует фаза прыжка) $z_0=h=1$ м, длина шага $2l=0.8$ м, т. е. $l / h=0.4$. Согласно (3.7), найдем, что «коэффициент трения» такого аппарата a_u / g не превосходит 1% ($a_u / g\simeq 8\cdot 10^{-3}$).

Таким образом, можно ожидать, что введение в конструкцию ноги упругого элемента позволит получить весьма экономичный шагающий аппарат, у которого расход энергии при передвижении в основном будет связан с работой, затрачиваемой в течение шага на перенос неопорной ноги.

Поступила 26 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Катыс Г. П.* и др. Информационные роботы и манипуляторы. М., «Энергия», 1968.
2. *Ларин В. Б.* Стабилизация двуногого шагающего аппарата. Изв. АН СССР. МТТ 1976, № 5.