

О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОСЦИЛЛЯТОРА С СУХИМ ТРЕНИЕМ

В. В. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ

(Москва)

Рассмотрены вынужденные колебания осциллятора с сухим трением, характеристика которого имеет «падающий» участок. Показано, что при определенных условиях установившийся отклик такого осциллятора на периодическую внешнюю силу будет иметь сложную непериодическую зависимость от времени, и его целесообразно рассматривать как некоторый случайный процесс. С помощью моделирования на ЭВМ получены статистические характеристики этого процесса в нескольких частных случаях.

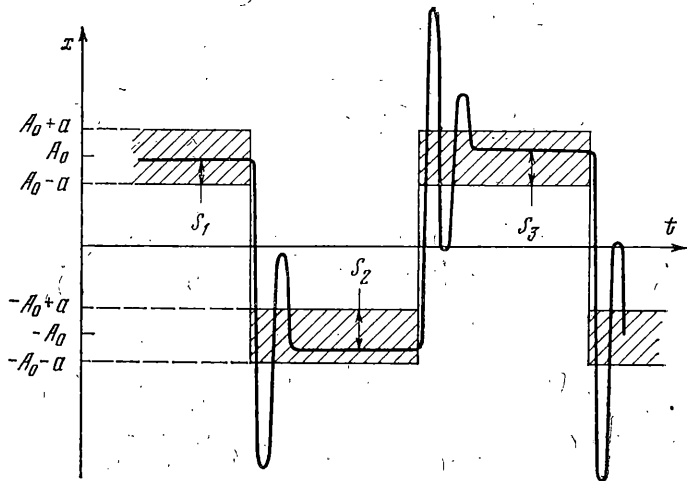
Хотя свободные колебания осциллятора с сухим (кулоновским) трением исследованы достаточно подробно [1], его вынужденные колебания не изучались. Изучение таких колебаний может представлять определенный интерес в теории машин и измерительных приборов, а также в теории, описывающей перемагничивание магнитных доменов. Оказывается, что при определенных условиях установившийся отклик осциллятора с сухим трением на периодическую внешнюю силу будет иметь весьма сложную, непериодическую зависимость от времени. При этих условиях вынужденные колебания целесообразно рассматривать как некоторый случайный процесс и описывать статистически.

Такие «псевдостохастические» вынужденные колебания были открыты у консервативного нелинейного осциллятора и в теории фазовой автоподстройки частоты. Стохастизация вынужденных колебаний в этих случаях связана с появлением в фазовом пространстве системы гомоклинических структур. Об этих задачах рассказывается, например, в [2-4], где имеется также более или менее подробная библиография.

Другой, «более грубый» механизм стохастизации движения динамической системы связан с так называемыми «странными аттракторами» [5, 6]. Здесь следует выделить [7], где удалось строго доказать стохастизацию автоколебаний некоторого генератора с полутора степенями свободы. В данной работе процесс стохастизации доказывается так же, как и в [7] при помощи растягивающего точечного отображения, переводящего единичный отрезок в себя.

Задача формулируется следующим образом. Требуется найти вынужденные колебания осциллятора с сухим трением, на который действует внешняя сила, имеющая вид последовательности одинаковых, знакопередающихся, примыкающих прямоугольных импульсов (меандр). Кроме этого, будем считать амплитуду и длительность импульса такими, что переходные осцилляции успеют прекратиться за малую долю длительности импульса. Из дальнейшего будет ясно, каким условиям должны при этом удовлетворять амплитуда и длительность импульса.

Примерный вид зависимости вынужденных колебаний от времени представлен на фиг. 1. На нем заштрихованы участки застоя — диапазон от-



Фиг. 1

клонений осциллятора, при которых возможно равновесие. Если уравнение движения имеет вид

$$x'' + \omega_0^2 x = F_f(x') + \begin{cases} P_0, & 2nT < t < (2n+1)T \\ -P_0, & (2n+1)T < t < 2(n+1)T \end{cases} \quad (4)$$

где $F_f(x')$ представлена на фиг. 2, а, то $A_0 = P_0/\omega_0^2$, $a = F_0/\omega_0^2$. В дальнейшем не будем интересоваться переходными колебаниями, а сосредоточим внимание на установившихся вынужденных отклонениях. При этом состояние осциллятора будем характеризовать величиной s — расстоянием от внутреннего края отрезка застоя до равновесного положения осциллятора (см. фиг. 1).

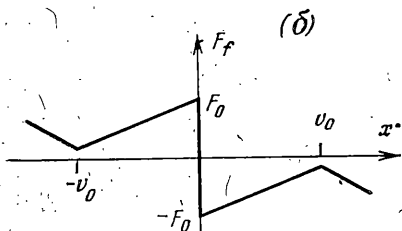
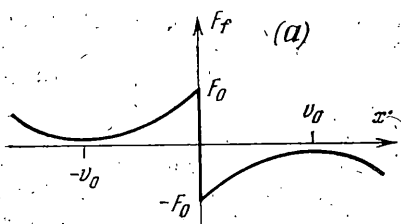
Для выяснения характера изменения установившихся вынужденных отклонений построим функцию $f(s)$, дающую связь между состояниями осциллятора в течение двух последующих импульсов внешней силы. Простые и удобные для анализа формулы получаются, если аппроксимировать характеристику сухого трения кусочно-линейным образом, как показано на фиг. 2, б. С другой стороны, такая аппроксимация в ряде конкретных приложений может оказаться вполне приемлемой; тем более, что принципиальная сторона изучаемого явления не будет зависеть от конкретного вида характеристики — лишь бы на ней был достаточно большой «падающий» участок.

Итак, если амплитуда внешней силы такова, что максимальная скорость осциллятора меньше, чем \dot{v}_0 (граница падающего участка на характеристике трения, изображенной на фиг. 2, б), то уравнение движения принимает вид

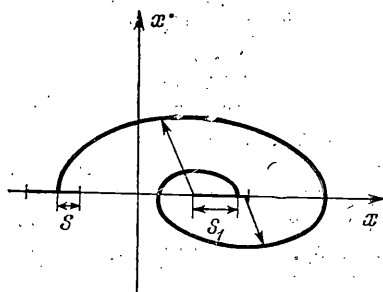
$$x'' - hx' + \omega_0^2 x + F_0 \operatorname{sign} x' = \begin{cases} P_0, & 2nT < t < (2n+1)T \\ -P_0, & (2n+1)T < t < 2(n+1)T \end{cases} \quad (2)$$

где $h = |\operatorname{tg} \alpha|$ — абсолютное значение тангенса угла наклона падающего участка характеристики трения.

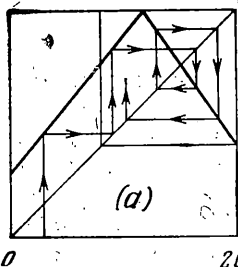
Пусть осциллятор находился в состоянии s и произошла перемена знака внешней силы. Переходные колебания осциллятора будут представляться на фазовой плоскости x, x' дугами спиралей, раскручивающихся из точек $(A_0 + a, 0)$ и $(A_0 - a, 0)$ (фиг. 3).



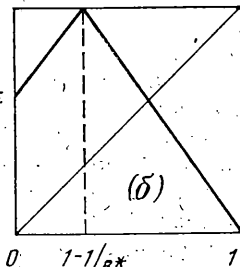
Фиг. 2



Фиг. 3



$$1 - \beta + \frac{\beta}{\beta^*}$$



Фиг. 4

Из фиг. 3 и уравнения (2) следует, что начальный размах колебания равен $M_0 = 2(A_0 - a) + s$, начальный размах колебания на следующем полувитке равен $M_1 = [2(A_0 - a) + s]\gamma - 2a$ и так далее. Здесь $\gamma = e^{h\theta/4}$ ($\gamma > 1$), θ — период колебаний осциллятора. Наконец, наступит такой момент, когда $M_{n-1}\gamma - 2a < 0$. Это условие означает окончание процесса установления, и установившееся вынужденное отклонение будет характеризоваться величиной $s_1 = M_{n-1}\gamma$ (если последний полувиток был описан вокруг внутреннего конца отрезка застоя) либо величиной $s_1 = 2a - M_{n-1}\gamma$ в противном случае.

Из сказанного следует, что функция последования имеет вид

$$s_1 = B + \beta s \text{ или } s_1 = B^* - \beta^* s \tag{3}$$

и переход от одного вида зависимости к другому происходит при достижении точкой s_1 одного из краев отрезка застоя. Здесь β и β^* — степени γ ; следовательно, $\beta > 1$, $\beta^* > 1$, а

$$B = 2 \left[A_0 \gamma^n - a \frac{\gamma(\gamma^n - 1)}{\gamma - 1} \right], \quad B^* = -2 \left[A_0 \gamma^n - a \left\{ \frac{\gamma(\gamma^n - 1)}{\gamma - 1} + 1 \right\} \right]$$

Один из возможных графиков функции последования $f(s)$ приведен на фиг. 4, а. На нем изображен процесс последовательных преобразований точки s , соответствующий изменению величины установившегося вынужденного отклонения осциллятора от импульса к импульсу внешней силы.

Так как $\beta > 1$ и $\beta^* > 1$, данное преобразование является растягивающим, и все неподвижные точки самого преобразования и его степеней будут неустойчивыми. Более того, любая последовательность точек преобразования (траектория любой начальной точки) также будет неустойчива [3, 4]. При этих условиях справедлива теорема об эргодичности процесса точечного преобразования [8]. Следовательно, в процессе движения точка s подойдет сколь угодно близко к любой точке некоторой области, лежащей внутри отрезка покоя (в частности эта область может совпадать со всем отрезком покоя).

Для более детального анализа движения изображающей точки рассмотрим функцию последования на минимальном отрезке, из которого изображающая точка никогда не выходит. Соответствующая часть диаграммы последования выделена на фиг. 4, а. Без ограничения общности длину этого отрезка можно считать равной единице. При помощи функции последования он преобразуется в себя (возможный график изображен на фиг. 4, б). Опираясь на свойство эргодичности, можно ввести функцию распределения точек последования на единичном отрезке

$$w(s) ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N} \quad (4)$$

Здесь n — число точек последования в интервале от s до $s+ds$, N — полное число итераций.

С другой стороны, естественно ожидать стационарности исследуемого процесса точечного преобразования. Это означает, что если в ансамбле исследуемых осцилляторов создать распределение начальных условий по закону $w(s)$, определенному формулой (4), то в процессе дальнейших точечных преобразований состояния осцилляторов будут распределены по закону $w(s)$ на любом шаге. Так как s_n связано с s функциональной зависимостью, то можно получить также функциональную связь между начальным распределением и распределением на n -й итерации. Таким образом, в принципе, можно написать цепочку функциональных уравнений, которым должна одновременно удовлетворять функция $w(s)$. В частности, для функции последования, изображенной на фиг. 4, б, получим следующее уравнение для одной итерации:

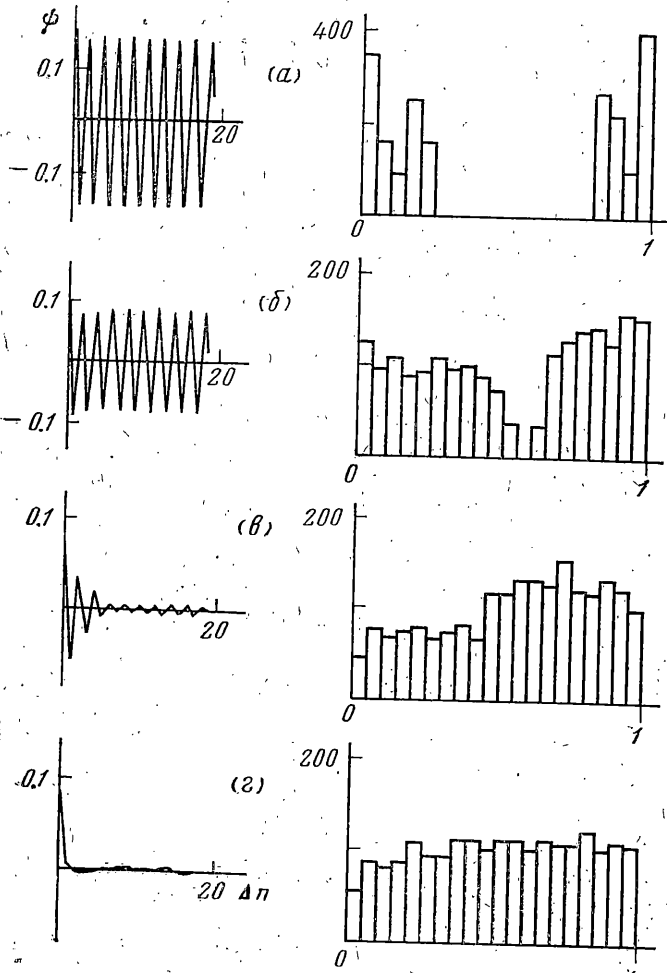
$$w(s) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^*} w\left(1 - \frac{s}{\beta^*}\right) & \left(0 < s < 1 - \beta + \frac{\beta}{\beta^*}\right) \\ \frac{1}{\beta^*} w\left(1 - \frac{s}{\beta^*}\right) + \frac{1}{\beta} w\left(1 - \frac{1}{\beta^*} - \frac{1}{\beta} + \frac{s}{\beta}\right) & \left(1 - \beta + \frac{\beta}{\beta^*} < s < 1\right) \end{cases} \quad (5)$$

Если положить $w(1) = m$, то, как следует из уравнения (5):

$$w(0) = \frac{m}{\beta^*}, \quad w\left(1 - \frac{1}{\beta^*}\right) = \frac{m\beta\beta^*}{\beta + \beta^*} \quad (6)$$

Если бы имелись явные выражения для степеней точечного преобразования $s_1 = f(s)$, то процесс вычисления значений функции $w(s)$ в других точках мог бы быть продолжен и, в принципе, можно было бы определить значение $w(s)$ для любой точки s .

Можно также начать с какого-нибудь «хорошего» начального распределения $w_0(s)$ (например равномерного) и подвергнуть его процессу итераций по формуле (5). Если процесс точечного преобразования эргодич-



Фиг. 5

ный и стационарный, то в пределе получим искомую функцию распределения. В двух частных случаях вид функции распределения очевиден. Если график функции последования идет «из угла в угол», т. е. если $1 - \beta + \beta/\beta^* = 0$, то z распределено равномерно на отрезке $[0, 1]$. Если же $1 - \beta + \beta/\beta^* = 1 - 1/\beta^*$, то функция распределения составлена из двух равномерных распределений на отрезках $[0, 1 - 1/\beta^*]$ и $[1 - 1/\beta^*, 1]$.

Исследуемое явление было промоделировано на ЭВМ для случая, когда до остановки осциллятор совершает одно или два полуколебания (т. е. $\beta^* = \beta^2$). На печать выводилась гистограмма функции распределения, функция корреляции и среднее значение величины s .

На фиг. 5 приведены графики функций корреляции и гистограммы распределения, построенные по данным, вычисленным по одной реализации длиной в 2000 итераций, для четырех различных значений β . Фиг. 5, а, б, в, г соответствуют следующим значениям β и $\langle s \rangle$: 1.1, 0.51; 1.2, 0.54; 1.3, 0.57; 1.6, 0.53. Значение $\beta = 1.3$ близко к $\beta_0 \approx 1.33$ — значению корня уравнения $\beta^3 - \beta - 1 = 0$, при котором $w(s)$ должна состоять из двух ступеней, а значение $\beta = 1.6$ близко к $1/2(1 + \sqrt{5}) \approx 1.62$, при котором распределение должно быть равномерным. Полученные распределения хорошо согласо-

ются с соотношениями (6). Лишь для значения $\beta=1.6$ разница между отношением $w(1)/w(0)$ и величиной $\beta^*=2.56$ выходит за пределы статистически допустимого разброса. Это расхождение можно объяснить недостаточно мелким дроблением отрезка $[0, 1]$ при вычислении гистограммы.

Функции корреляции, отвечающие $\beta=1.1$ и $\beta=1.2$, содержат периодическую компоненту, так как при этих значениях β функция распределения обращается в нуль на некотором интервале (b_1, b_2) , лежащем внутри единичного отрезка, и изображающая точка s с достоверностью переходит при каждой итерации с отрезка $[0, b_1]$ на отрезок $[b_2, 1]$ и наоборот. В двух других случаях функция корреляции достаточно быстро спадает, причем при $\beta=1.6$ корреляция уменьшается более чем в десять раз уже при сдвиге на один шаг. В такой ситуации можно с достаточной точностью рассматривать исследуемый динамический процесс как случайный процесс с независимыми приращениями.

Следует лишь раз подчеркнуть, что исследуемое движение является полностью детерминированным и никакой случайности в общепринятом смысле слова в нем нет. Но, с другой стороны, это движение в силу орбитной неустойчивости и сильного перемешивания оказывается очень сложным и запутанным. Совершенно естественно, что в результате этого основной интерес представляет нахождение некоторых усредненных характеристик движения, т. е. целесообразно рассматривать само движение как случайный процесс. Наличие малых флуктуаций в такой неустойчивой системе (а они неизбежны во всякой реальной физической системе) приведет уже к «настоящей» случайности и истинной стохастичности движения.

Автор глубоко благодарен С. М. Рытову за поддержку этой работы.

Поступила 30 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
2. Плисс В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1977.
3. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1972.
4. Бугенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фурфеев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М., «Наука», 1976.
5. Lorenz E. N. The mechanics of vacillation. J. Atmos. Sci., 1963, vol. 20, No. 5.
6. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence. Commun. Math. Phys., 1971, vol. 20, No. 3.
7. Циковский А. С., Рабинович М. И. Простой автогенератор со стохастическим поведением. Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 2.
8. Косякин А. А., Сандлер Е. А. Эргодические свойства одного класса кусочно-гладких преобразований отрезка. Изв. вузов. Сер. матем, 1972, № 3.