МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1979

УДК 531.391.5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КОНСОЛИ

В. Н. КОШЛЯКОВ

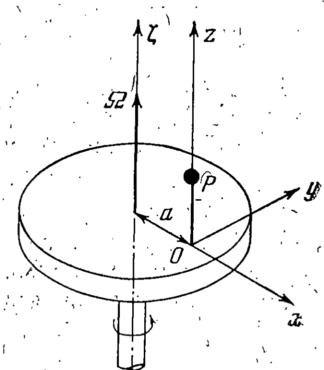
(Киев)

Рассматривается движение точечной массы, укрепленной на свободном конце консоли на некотором расстоянии от вертикальной оси платформы, вращающейся вокруг указанной оси с заданной угловой скоростью.

С помощью аппарата функций Ляпунова формулируются условия устойчивости и неустойчивости с учетом сил сопротивления среды, пропорциональных первой степени скорости.

1. Допустим, что невесомый стержень OP с точечной массой P на свободном конце (фиг. 1) укреплен на расстоянии a от оси платформы, вращающейся с угловой скоростью Ω вокруг оси $O\zeta$ [1, 2].

Системой отсчета служит связанный с платформой трехгранник $Oxyz$ с осью z, параллельной оси ζ. При невращающейся платформе ось стержня прямолинейна и параллельна оси ζ. Предполагается, что плоскости Oxz и Oyz совпадают с главными плоскостями изгиба стержня, вследствие чего сила, приложенная к массе P по направлениям Ox и Oy, будет вызывать отклонения стержня только в этих направлениях.



При вращении платформы стержень будет отклоняться от вертикального положения; обозначим через x и y возмущенные координаты массы P в плоскости Oxy.

Уравнения малых движений массы P (без учета сил сопротивления) получены в [1, 2] и имеют вид

$$x^{\cdot\cdot}+(\nu^2-\Omega^2)x-2\Omega y^{\cdot}+\Omega^{\cdot} y=a\Omega^2$$

$$y^{\cdot\cdot}+(p^2-\Omega^2)y+2\Omega x^{\cdot}+\Omega^{\cdot} x=-a\Omega^{\cdot} \qquad (1.1)$$

где $\nu^2=c_x/m$, $p^2=c_y/m$.

Здесь через c_x и c_y обозначены коэффициенты упругости стержня по направлениям Ox и Oy.

Заметим, что однородная часть уравнений по своей структуре совпадает с уравнениями приборной вертикали недемпфированного двухроторного гирокомпаса с точной компенсацией вынужденных баллистических девиаций, точка подвеса которого совершает произвольное движение по поверхности земной сферы. При $p=\nu$ эти уравнения соответственно вырождаются в уравнения пространственного гирогоризонткомпаса Геккелера — Аншютца [3].

При учете сопротивления среды, порождаемого диссипативными силами, следует учесть силы, направленные противоположно составляющим скорости массы P. Если рассматривается движение массы P относительно неподвижного воздуха, то составляющие силы сопротивления определяются скоростью массы P относительно инерциального пространства.

В предположении, что сопротивление среды пропорционально первой степени скорости, однородная часть уравнений (1.1) может быть представлена в форме

$$x^{\cdot\cdot}+2b(x^{\cdot}-\Omega y)+(\nu^2-\Omega^2)x-2\Omega y^{\cdot}-\Omega^{\cdot}y=0$$
$$y^{\cdot\cdot}+2b(y^{\cdot}+\Omega x)+(p^2-\Omega^2)y+2\Omega x^{\cdot}+\Omega^{\cdot}x=0 \qquad (1.2)$$

где вторые слагаемые отражают действие диссипативных сил.

Если же среда, в которой происходит движение, перемещается, допустим, вместе с системой $Oxyz$, то составляющие силы сопротивления будут зависеть только от проекций относительной скорости массы P на оси x, y [4]; соответственные уравнения будут иметь вид

$$x^{\cdot\cdot}+2bx^{\cdot}+(\nu^2-\Omega^2)x-2\Omega y^{\cdot}-\Omega^{\cdot}y=0$$
$$y^{\cdot\cdot}+2by^{\cdot}+(p^2-\Omega^2)y+2\Omega x^{\cdot}+\Omega^{\cdot}x=0 \qquad (1.3)$$

2. Обратимся к исследованию устойчивости движения, описываемого уравнениями (1.2) и (1.3). Применительно к системе (1.1) речь будет идти об устойчивости тривиального решения однородной ее части.

Рассмотрим, применительно к системе (1.3), случай, когда $\Omega=\text{const}$, и для определенности положим $p>\nu$. Имеем

$$x^{\cdot\cdot}=-2bx^{\cdot}-\lambda_1x+2\Omega y^{\cdot}$$
$$y^{\cdot\cdot}=-2by^{\cdot}-\lambda_2y-2\Omega x^{\cdot} \qquad (2.1)$$
$$\lambda_1=\nu^2-\Omega^2,\quad \lambda_2=p^2-\Omega^2$$

Если состояние равновесия, выражаемое тривиальным решением системы (2.1), устойчиво при одних только потенциальных силах, то λ_1 и λ_2 будут положительными, что приводит к неравенству

$$\Omega<\nu \qquad (2.2)$$

При этом устойчивость сохраняется в случае добавления гироскопических и диссипативных сил.

Действительно, функция

$$H={}^1/_2(x^{\cdot 2}+y^{\cdot 2}+\lambda_1x^2+\lambda_2y^2) \qquad (2.3)$$

оказывается при указанных условиях определенно-положительной. Ее производная по времени, приводящаяся в силу уравнений (2.1) к виду

$$H^{\cdot}=-2b(x^{\cdot 2}+y^{\cdot 2}) \qquad (2.4)$$

не будет положительной, что и свидетельствует о наличии устойчивости при условии (2.2).

Обстоятельства неустойчивости выясняются путем рассмотрения функции

$$H'={}^1/_2(x^{\cdot 2}+y^{\cdot 2}+\lambda_1x^2+\lambda_2y^2)+\mu(\lambda_1xx^{\cdot}+\lambda_2yy^{\cdot}) \qquad (2.5)$$

где μ — некоторая положительная постоянная, которую можно выбрать достаточно малой.

Производная по времени от функции (2.5) в силу уравнений (2.1) приводится к виду

$$H^{\cdot\prime}=-\{(2b-\mu\lambda_1)x^{\cdot 2}+(2b-\mu\lambda_2)y^{\cdot 2}+$$
$$+\mu(\lambda_1^2x^2+\lambda_2^2y^2)+2\mu[b(\lambda_1 xx^{\cdot}+\lambda_2 yy^{\cdot})+\Omega(\lambda_2 x^{\cdot}y-\lambda_1 y^{\cdot}x)]\} \qquad (2.6)$$

и может сделана путем выбора достаточно малого μ определенно-отрицательной.

В то же время сама функция H' в случае, если среди чисел λ_s ($s=1, 2$) есть хотя бы одно отрицательное, выбором достаточно малых величин x, y, $x^{\cdot}$ и $y^{\cdot}$ может быть сделана одного знака со своей производной. Это свидетельствует о неустойчивости, когда

$$\Omega>\nu \qquad (2.7)$$

3. Рассмотрим далее, применительно к той же системе (1.3), случай, когда $p=\nu$, что соответствует одинаковой жесткости стержня в главных плоскостях изгиба. Что касается угловой скорости Ω вращения платформы, то ее будем полагать произвольной, непрерывной и ограниченной функцией времени t.

Соответственные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} x^{\cdot\cdot}&=-2bx^{\cdot}-(\nu^2-\Omega^2)x+2\Omega y^{\cdot}+\Omega^{\cdot}y \\ y^{\cdot\cdot}&=-2by^{\cdot}-(\nu^2-\Omega^2)y-2\Omega x^{\cdot}-\Omega^{\cdot}x \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Рассмотрим определенно-отрицательную функцию W_1 вида

$$W_1=-{}^1/_2[\nu^2(x^2+y^2)+(x^{\cdot}-\Omega y)^2+(y^{\cdot}+\Omega x)^2] \qquad (3.2)$$

Ее производная по времени в силу уравнений (3.1) будет

$$W_1^{\cdot}=2b[x^{\cdot 2}+y^{\cdot 2}+\Omega(y^{\cdot}x-x^{\cdot}y)] \qquad (3.3)$$

Рассмотрим далее другую определенно-отрицательную функцию вида

$$W_2=-{}^1/_2[\nu^2(x^2+y^2)+(x^{\cdot}+2bx-\Omega y)^2+(y^{\cdot}+2by+\Omega x)^2] \qquad (3.4)$$

Имеем соответственно

$$W_2^{\cdot}=2b[(\nu^2-\Omega^2)(x^2+y^2)+\Omega(x^{\cdot}y-y^{\cdot}x)] \qquad (3.5)$$

В качестве функции Ляпунова выберем функцию W, полагая $W=W_1+W_2$

В силу уравнений (3.1) получаем

$$W^{\cdot}=W_1^{\cdot}+W_2^{\cdot}=2b[x^{\cdot 2}+y^{\cdot 2}+(\nu^2-\Omega^2)(x^2+y^2)] \qquad (3.6)$$

Эта производная оказывается определенно-положительной в случае, когда

$$\Omega^2(t)<\nu^2 \qquad (3.7)$$

что соответствует асимптотической устойчивости невозмущенного движения, определяемого системой (3.1).

Для установления условий неустойчивости движения, описываемого системой (3.1), введем в рассмотрение функцию Четаева, полагая

$$V=\Omega(x^2+y^2)+xy^{\cdot}-yx^{\cdot}+\varepsilon(xx^{\cdot}+yy^{\cdot}) \qquad (\varepsilon=b/\nu) \qquad (3.8)$$

Функция V в силу предположенной ограниченности угловой скорости Ω будет ограниченной функцией в области $V>0$, существующей при всяком $t\geqslant 0$ и для сколь угодно малых по абсолютной величине значений переменных x, y, $x^{\cdot}$ и $y^{\cdot}$.

Ее производная по времени в силу уравнений (3.1) приводится к виду

$$V^{\bullet}=\varepsilon[(\Omega^2-\nu^2)(x^2+y^2)+x^{\bullet 2}+y^{\bullet 2}+$$
$$+2(\Omega+\nu)(xy^{\bullet}-yx^{\bullet})-2\varepsilon\nu(xx^{\bullet}+yy^{\bullet})] \qquad (3.9)$$

Полагая для определенности $\Omega=\Omega_\xi>0$, заключаем, что выражение, стоящее в квадратных скобках, выбором достаточно малого ε может быть сделано определенно-положительным при

$$\Omega^2(t)>\nu^2 \qquad (3.10)$$

В этом случае форма V удовлетворяет всем условиям теоремы Четаева о неустойчивости [5].

4. Иной результат в отношении устойчивости получается в случае, когда сопротивление пропорционально составляющим абсолютной скорости, как это имеет место в системе (1.2).

Действительно, останавливаясь опять на случае $p=\nu$, выберем функцию Ляпунова $W=W_1+W_2$, где W_1 и W_2 по-прежнему определяются формулами (3.2) и (3.4). Полная производная от функции W, но уже в силу системы (1.2), приводится к виду

$$W^{\bullet}=2b[\nu^2(x^2+y^2)+(x^{\bullet}-\Omega y)^2+(y^{\bullet}+\Omega x)^2]=-4bW_1 \qquad (4.1)$$

Поскольку функция W_1 является определенно-отрицательной, то $W^{\bullet}$ является знакоопределенной, знака, противоположного W. А это говорит об асимптотической устойчивости движения, определяемого уравнениями (1.3) при произвольной угловой скорости Ω независимо от выполнения или невыполнения условий (3.7) или (3.10).

Таким образом, структура демпфирования может существенным образом повлиять на устойчивость рассматриваемого движения [6].

Поступила 5 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд Р. Н. и Мондер Л.* Гиродинамика и ее техническое применение. М., «Машиностроение», 1964, стр. 152.
2. *Кошляков В. Н.* Теория гироскопических компасов. М., «Наука», 1972.
3. *Ишлинский А. Ю.* Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
4. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., «Наука», 1961.
5. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
6. *Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения. В сб.: Механика в СССР за 50 лет. Общая и прикладная механика. Т. 1. М., 1968.