ЛИТЕРАТУРА

1. *Космодамианский А. С., Лехницкий С. Г., Лошкин В. Н.* О работе Т. Л. Мартыновича «Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием». Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6.
2. *Мартынович Т. Л.* Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2.
3. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
4. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. «Наукова думка», Киев, 1968.
5. *Ермолаев Б. И.* Приближенный метод определения напряжений при изгибе, анизотропной пластинки с отверстием. Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1960, № 1.
6. *Космодамианский А. С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. «Вища школа», Киев, 1976.

УДК 539.3.01

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, М. А. СУМБАТЯН

(Москва)

Т. Л. Мартынович [1] считает, что им получено точное решение плоской задачи о напряженно-деформированном состоянии анизотропной пластинки, ослабленной отверстием, уравнение контура L которого имеет вид $t=\omega(\sigma)$, где функция $\omega(\sigma)$ определена формулой (1.5) [1], $t=x+iy\in L$, $\sigma=e^{i\theta}$, $0\leqslant\theta<2\pi$. Анализ работы [1] показал, что в основном ход рассуждений автора ошибочен, хотя часть идей [1], как будет показано ниже, может быть положена в основу построения либо эффективного приближенного решения, либо точного решения задачи.

Авторы работы [2], совершенно справедливо указав на некоторые ошибочные рассуждения в [1], при этом недостаточно глубоко вскрыли их суть, и как следствие этого, не заметили, что предложенная в [1] конструкция решения, возможно, дает точные значения напряжений на контуре L, оставаясь неверной вне этого контура.

1. Сначала остановимся на основных моментах, характеризующих суть подхода Т. Л. Мартыновича к рассматриваемой проблеме и выясним, к каким последствиям они приводят.

Используя плоскость переменной z_j, связанную с переменной z реальной области пластинки S соотношением

$$z_j=\frac{R_j}{R}(z+m_j\bar{z})\qquad (j=1,2)\tag{1.1}$$

автор делает замену переменной (см. (1.5) [1]):

$$z=\omega(\zeta),\qquad |\zeta|\geqslant 1\tag{1.2}$$

при которой внешность единичного круга плоскости ζ конформно отображается на внешность отверстия в пластинке (на область S).

При этом естественная связь между переменными z_j и ζ должна даваться соотношением

$$z_j=\frac{R_j}{R}[\omega(\zeta)+m_j\overline{\omega(\zeta)}]\tag{1.3}$$

Однако вместо этой функции в [1] использована другая

$$z_j=\omega_j(\zeta)=\frac{R_j}{R}\left[\omega(\zeta)+m_j\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]\tag{1.4}$$

совпадающая с (1.3) на контуре единичной окружности γ.

Если замена (1.3) переменной z_j отображает на S_j внешность единичного круга Г плоскости переменной ζ, то замена (1.4) этим свойством уже не обладает. В случае, когда отверстие в пластинке не является эллипсом (в частности, окружностью), т. е. когда в формуле (1.5) [1] $N\geqslant 2$, функция $\omega_j(\zeta)$ отображает на область S_j не внешность Г (что было верно отмечено авторами работы [2]), а некоторую N – связную область переменной ζ, одной из частей границы которой является окружность γ, ибо в этом случае функция $\omega_j(\zeta)$ во внешности Γ имеет $N-1$ нулей, а начало координат плоскости лежит внутри контура L_j [1] (см. фигуру).

Далее Т. Л. Мартынович в выражении функции $\varphi_j(z_j)$, аналитической по переменной z_j и имеющей при больших $|z_j|$ представление (1.9) [1], делает замену переменной (1.4). Поскольку при такой замене большим $|\zeta|$ соответствуют большие же $|z_j|$, то при больших $|\zeta|$ действительно имеет место разложение (1.13) [1], где $D_*^{(j)}=ND^{(j)}$. В то же время далее это разложение дотягивается до окружности γ и используется для удовлетворения граничных условий на контуре отверстия пластинки. Такой подход является ошибочным, ибо он подразумевает распространение соотношения (1.13) [1] с бесконечности до γ через области D_n, точки которых при отображении (1.4) попадают внутрь контура L_j, где функция $\varphi_j(z_j)$ вообще не определена.

Вернемся, однако, к дальнейшему ходу рассуждений Т. Л. Мартыновича [1]. Подразумевая правомерным отмеченный выше примененный прием, автор записывает функции $\varphi_j'(z_j)$ $(j=1, 2)$, через которые выражаются напряжения в пластинке, в новой переменной ζ в виде (1.15). При этом неизвестные коэффициенты, содержащиеся в этой формуле, находятся из удовлетворения граничных условий на бесконечности $(|\zeta|\to\infty)$, на границе отверстия пластинки $(|\zeta|=1)$, а также из условия, что функция $\varphi_j'(z_j)$ не должна во внешности единичного круга Γ иметь особенности. Последнее условие автору удается выполнить, приравнивая $N-1$ нулям знаменателя, лежащим во внешности Γ, нули числителя функции $\varphi_j'(z_j)$ (1.15). Это однозначно определяет неизвестные ранее коэффициенты, входящие в формулу (1.15) [1] и выражает функцию $\varphi_j'(z_j)$ в виде аналитической функции переменной ζ во внешности Γ.

Далее для возможности нахождения напряжений в пластинке необходимо знать выражение функции $\varphi_j'(z_j)$ в переменной z_j либо z. При этом, если «возвращаться» к старой переменной z_j по формуле, обратной к (1.4), то (как правильно указано в [2]) поскольку все N контуров и, в частности, γ областей в плоскости переменной ζ (см. фигуру) отображаются при такой замене на контур L_j и поскольку функция $\varphi_j'(z_j)$ в формуле (1.15) [1] принимает на этих контурах различные значения, приходим к многозначности функции $\varphi_j'(z_j)$ на контуре L_j, а, следовательно, и к многозначности напряжений на контуре отверстия пластинки L.

Если же «возвращаться» путем «естественной» замены переменной, т. е. по формуле, обратной к (1.3), то возникает другая неприятность. Дело в том, что замена переменной (1.3) не представляется аналитической функцией от ζ: $z_j=z_j(\zeta, \bar\zeta)$, поскольку содержит z_j и $\bar z_j$. Поэтому и обратная функция $\zeta=\zeta(z_j, \bar z_j)$ также не будет аналитической.

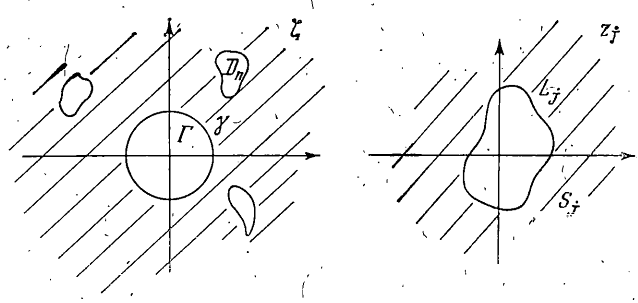
Таким образом, производя в аналитической по переменной ζ функции $\varphi_j'(z_j)$ (1.15) [1] замену $\zeta=\zeta(z_j, \bar z_j)$, в результате придем к функции, содержащей z_j и $\bar z_j$, которая, следовательно, не будет аналитической по z_j, — чего быть не должно. Если бы функция $\varphi_j'(z_j)$ не была аналитической по ζ, завися от ζ и $\bar\zeta$, тогда, вообще говоря, при замене переменной $\zeta=\zeta(z_j, \bar z_j)$ можно было бы получить функцию, аналитическую по z_j. Эта мысль подтверждается, например, результатами работы [3], в которой решение аналогичных задач ищется разложением по малому параметру ε, характеризующему степень отличия контура отверстия в пластинке от эллипса (в случае эллиптического отверстия точное решение рассматриваемых задач получено сравнительно давно). Первые члены такого разложения показывают, что функция $\varphi_j'(z_j)$, выраженная в переменной ζ, на самом деле должна содержать ζ и $\bar\zeta$ (см., например, формулы (4.24), (4.25) [3]), что, однако, не выполняется в формуле (1.15) работы Т. Л. Мартыновича. Таким образом, формула (1.15) [1] во внешности Γ неверна.

2. Здесь покажем, что, несмотря на ряд ошибочных рассуждений, допущенных в [1] при выводе формулы (1.15), она может давать, тем не менее, точное решение на контуре отверстия. Наметим также правильный вывод формулы (1.15) [1]. Для простоты ограничимся случаем квадратного контура отверстия в пластинке, свободного от внешней нагрузки.

Будем рассматривать последнюю формулу работы [1], дающую выражение функции $\varphi_j'(z_j)$ в переменной ζ, лишь на единичной окружности $\gamma(\zeta=\sigma, |\sigma|=1)$ и сравним ее с соответствующим выражением в [3] (формула (5.9)). Нетрудно заметить, что они имеют одинаковую структуру — являются рациональными функциями, представленными отношением двух многочленов шестой степени. При этом их знаменатели тождественно совпадают (если заменить величину c_3 в [1] на величину ε [3]). Числитель формулы С. Г. Лехницкого, удерживающий лишь первые три приближения в разложении по ε, представляет собой сумму степеней σ^2, начиная с σ^0 по σ^6 включительно, умноженных на некоторые многочлены третьей степени по ε. Можно ожидать, что если в разложении по ε удерживать все члены, то вместо трехчленов при σ^{2k} будут стоять ряды по степеням ε.

В результате, если сумму каждого ряда обозначить некоторым неизвестным коэффициентом, то приходим к соответствующей формуле Т. Л. Мартыновича, числитель которой представляет собой сумму тех же степеней σ^2, что и в [3], умноженных на некоторые неизвестные коэффициенты. Таким образом, в последней формуле [1] как бы учтены все члены упомянутых выше рядов по ε, а сумма каждого из них обозначена некоторым коэффициентом $A_n(j)$ (или $a_n^{(j)}$). Заметим, что окончательно установить правомерность того, что точное выражение для функции $\varphi_j'(z_j)$ на γ имеет именно такой вид, как в [1], можно только в том случае, если удастся доказать, что все приближения по ε числителя формулы (5.9) [3] имеют один и тот же вид, а именно: $\alpha+\beta\sigma^2+\gamma\sigma^4+\delta\sigma^6$, где α, β, γ, δ — некоторые комплексные числа. По-видимому, достаточно будет проверить это еще на нескольких приближениях.

Остановимся теперь на методе, который применяет Т. Л. Мартынович для нахождения упомянутых неизвестных коэффициентов, входящих в числитель его формулы, а также на том, какую структуру должно иметь решение вне контура отверстия пластинки.



Исходя из своего хода рассуждений, автор [1] находит эти коэффициенты из условия, что аналитическое продолжение функции $\varphi_j'(z_j)$ с окружности γ во внешность Γ не имеет там полюсов. Однако, как было отмечено выше, это аналитическое продолжение не есть представление функции $\varphi_j'(z_j)$ во внешности Γ (ибо формула (1.15) [1], по-видимому, верная на контуре γ, неверна во внешности Γ). Найденные таким путем коэффициенты в итоге дают решение, численные значения которого очень хорошо совпадают, как показал Т. Л. Мартынович, с решениями, найденными методом последовательных приближений С. Г. Лехницкого. По-видимому, это не случайно.

Чтобы понять существо дела, построим сначала верное выражение функции $\varphi_j'(z_j)$ во внешности круга Γ. Сначала в формуле, дающей верное выражение $\varphi_j'(z_j)$ на контуре γ сделаем замену переменной, обратную к (1.3). В результате получим выражение $\varphi_j'(z_j)$ на контуре L_j. Затем, учитывая, что $\varphi_j'(z_j)$ должна быть аналитической в области S_j (см. фигуру), строим аналитическое продолжение полученной функции, заданной на L_j, во внешность контура L_j — в область S_j. Если необходимо теперь получить выражение функции $\varphi_j'(z_j)$ в переменной ζ во внешности круга Γ, то надо опять вернуться к переменной ζ путем замены (1.3). В результате получим неаналитическую функцию, содержащую ζ и $\bar{\zeta}$. Поэтому в последней формуле работы [1] вместо ζ будут, вообще говоря, стоять некоторые агрегаты от ζ и $\bar{\zeta}$, переходящие на γ в σ.

Далее заметим следующее. По-видимому, идея Т. Л. Мартыновича о необходимости погасить нули знаменателя в выражении для $\varphi_j'(z_j)$ соответствующими нулями числителя, приводящая к дополнительным соотношениям для определения неизвестных коэффициентов в структуре $\varphi_j'(z_j)$, адекватна тому, что при построении указанным выше способом аналитического представления функции $\varphi_j'(z_j)$ в области S_j необходимым условием, вытекающим из механической постановки задачи, является отсутствие полюсов у этой функции в области S_j.

Таким образом, методика Т. Л. Мартыновича [1], возможно, дает точное решение на контуре отверстия. Однако во внешности отверстия формулы для напряжений, приводимые в [1], дают неверные значения, и для получения истинных напряжений внутри пластинки, очевидно, необходимо применить схему, описанную в данной заметке.

Поступила 26 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартынович Т. Л.* Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2.
2. *Космодамианский А. С., Лехницкий С. Г., Ложкин В. Н.* О работе Т. Л. Мартыновича «Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием». Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6.
3. *Лехницкий С. Г.* Приближенный метод определения напряжений в упругой анизотропной пластинке вблизи отверстия, мало отличающегося от кругового. Инж. сб., 1953, т. 17.