

Эти точки заполняют на плоскости z некоторую область S . Предположим, что, и обратно, каждой точке z области S в силу соотношения (4) соответствует одна вполне определенная точка области Σ . В этом случае говорят, что соотношение (4) определяет взаимно-однозначное конформное преобразование или конформное отображение области S на область Σ и обратно.

Если области Σ и S обе бесконечны, причем бесконечно удаленные точки соответствуют друг другу, то функция $\omega(\xi)$... должна иметь вид

$$\omega(\xi) = R\xi + f \quad (5)$$

где R — постоянная, f — голоморфная функция. Напомним, что под функцией, голоморфной в бесконечной области, подразумевается функция, которая голоморфна в любой конечной части этой области, а при достаточно больших $|\xi|$ может быть представлена рядом вида $a_0 + a_1\xi^{-1} + a_2\xi^{-2} + \dots$.

Далее можно показать, что производная $\omega'(\xi)$ не может обращаться в нуль в области Σ , иначе отображение не было бы взаимно-однозначным.

Подставив в равенства (2) соотношения (3), будем иметь

$$z_j = \omega_j(\xi_j) = R_j \left(m_j \sum_{n=1}^N \bar{c}_n \xi_j^n + \xi_j + m_j \xi_j^{-1} \sum_{n=1}^N c_n \xi_j^{-n} \right) \quad (6)$$

Функции (6) содержат в себе положительные степени ξ_j до N -й включительно и не совпадают по виду с представлением (5). Кроме того, Т. Л. Мартынович на стр. 65 своей работы отмечает, что «функции $\omega_j(\xi_j)$ и $\omega'_j(\xi_j)$ имеют нули, расположенные вне единичной окружности γ , число которых равно $N-1$ ».

Учитывая все сказанное выше, можно указать на основную ошибку, допущенную Т. Л. Мартыновичем. Утверждение автора, что функции вида (2) или (6) отображают области $1 \leq |\xi_j| < \infty$ на внешность контуров L_j , является неверным. На самом деле эти функции отображают некоторые N -связные области Σ_j на внешность контуров L_j . При этом контурам L_j в областях S_j соответствуют N контуров в областях Σ_j (в том числе и единичная окружность γ).

Тогда представления функций $\varphi_j[\omega_j(\xi_j)]$ (1.13) в областях $1 \leq |\xi_j| < \infty$, приведенные Т. Л. Мартыновичем на стр. 66 его статьи, являются ошибочными, так как область $1 \leq |\xi_j| < \infty$ является N -связной.

Далее Т. Л. Мартынович использует имеющийся произвол в определении функций $\varphi_j[\omega_j(\xi_j)]$ для ликвидации особенностей их производных (1.10), приведенных на стр. 65 его статьи. Следует отметить, что точки, в которых эти производные имеют особенности, при отображениях (2) переходят внутрь контуров L_j .

Таким образом, метод, предложенный Т. Л. Мартыновичем, не учитывает N -связность областей $1 \leq |\xi_j| < \infty$ и приводит к физическому противоречию — N -значности напряжений на контуре L_j , если функции $\varphi_j[\omega_j(\xi_j)]$ и их производные вычислять не на единичной окружности γ , а на других контурах N -связных областей $1 \leq |\xi_j| < \infty$, соответствующих контурам L_j , или к возникновению напряжений внутри контура L_j , если те же самые величины вычислять в точках, которые находятся внутри контуров N -связной области $1 \leq |\xi_j| < \infty$, отличных от единичной окружности γ .

Поступила 8 I 1977

УДК 539.3

К ОБОСНОВАНИЮ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

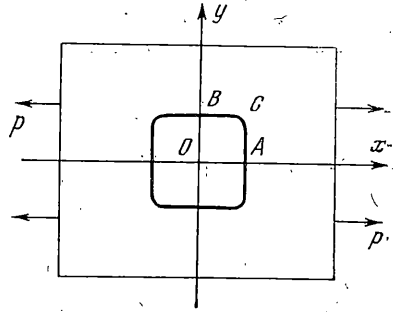
Т. Л. МАРТЫНОВИЧ

(Львов)

Авторы работы [1] утверждают, что значения напряжений σ_θ для ортотропной пластинки с квадратным отверстием [2] резко отличаются от численных данных, приведенных в монографии С. Г. Дехницкого [3].

Прежде всего отметим, что решение упомянутой выше задачи получено в ноябре 1972 г., и прежде чем отправить статью для опубликования в феврале 1975 г., было

проведено сопоставление численных результатов, соответствующих нашим формулам (для плоской задачи и задачи изгиба ортотропных пластинок), с численными результатами решения тех же задач при одинаковых параметрах, полученных методом малого параметра С. Г. Лехницким, А. С. Космодамианским (плоская задача), а также Б. И. Ермолаевым (изгиб). В нашем случае граничные условия для напряжений σ_θ и $\tau_{\theta\theta}$ удовлетворяются тождественно и при численной реализации на ЭВМ получаем машинный нуль.



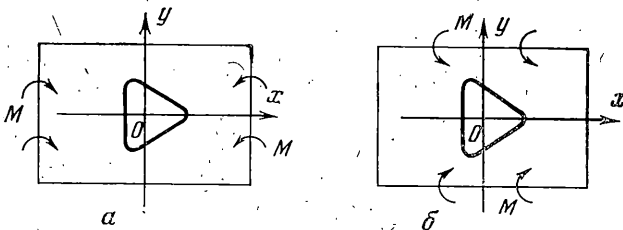
Фиг. 1

Обратимся сначала к численным результатам для ортотропной пластинки с квадратным отверстием ($c_3 = -1/9$), полученным самим А. С. Космодамианским по формулам С. Г. Лехницкого ($\sigma_x^\infty = p, \sigma_y^\infty = 0, \tau_{xy}^\infty = 0, E_x = E_{\max}$, фиг. 1).

По этим численным данным А. С. Космодамианским построены эпюры изменения напряжений σ_θ вдоль контура квадратного отверстия, помещенные на стр. 310 (Рис. III.28) [4]. Численные значения σ_θ , взятые с этой эпюры, приводятся ниже (они обозначены через $\sigma_2 = \sigma_\theta/p$). Здесь же приведены соответствующие значения σ_θ , полученные по нашим формулам ($\sigma_1 = \sigma_\theta/p$).

θ	0°	5°	10°	15°	20°	30°	45°	50°
σ_1	-0.374	-0.371	-0.361	-0.335	-0.275	0.061	0.731	1.100
σ_2	-0.4(1)	-0.4(1)	-0.4(1)	-0.3(7)	-0.3(4)	-0.0(9)	0.6(1)	1.2(1)
θ	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°	
σ_1	2.427	2.725	2.599	2.346	2.135	2.009	1.967	
σ_2	2.4(0)	2.5(7)	2.5(3)	2.3(4)	2.1(2)	1.9(9)	1.9(4)	

Как видно, численные результаты, полученные по нашим формулам и методом малого параметра (в третьем приближении), практически совпадают. Наибольшее отклонение, как и следовало ожидать, имеет место для максимального значения σ_θ при $\theta = 65^\circ$. Где же «резкое» отличие численных данных? А вот где. В монографии С. Г. Лехницкого [3] на стр. 238 приведены следующие численные значения σ_θ для этой задачи: $\sigma_A = -0.57p$ ($\theta = 0^\circ$), $\sigma_C = 0.83p$ ($\theta = 45^\circ$), $\sigma_B = 2.60p$ ($\theta = 90^\circ$). Эти числен-



Фиг. 2

ные значения, как видно из вышеприведенных результатов, резко отличаются от численных значений, полученных самим А. С. Космодамианским по тем же приближенным формулам С. Г. Лехницкого.

Напомним, далее, работу Б. И. Ермолаева [5]. Задача изгиба решалась методом малого параметра (последовательных приближений), разработанным С. Г. Лехницким для плоской задачи. Удерживалось три приближения. В [5] приведены вычисления для ортотропной пластинки с треугольным отверстием ($M_x^\infty = M, M_y^\infty = 0$, фиг. 2, а; $M_x^\infty = 0, M_y^\infty = M$, фиг. 2, б). Эти численные значения изгибающих моментов M_θ приведены в скобках в таблице. Там же представлены соответствующие значения M_θ , найденные по нашим формулам. Первый и второй столбцы соответствуют фиг. 2, а, третий и четвертый — фиг. 2, б.

Из таблицы следует, что численные значения изгибающего момента M_θ , полученные по нашим формулам и по формулам Б. И. Ермолаева (удерживалось три приближения), опять практически совпадают.

θ	$E_x = E_{\max}$	$E_x = E_{\min}$	$E_x = E_{\max}$	$E_x = E_{\min}$	θ	$E_x = E_{\max}$	$E_x = E_{\min}$	$E_x = E_{\max}$	$E_x = E_{\min}$
0°	0.231 (0.19)	1.327 (-)	2.720 (2.71)	6.715 (6.76)	105°	3.923 (3.82)	1.840 (2.24)	2.824 (-)	0.098 (-)
5°	0.216 (-)	0.385 (-)	2.410 (2.39)	4.913 (5.00)	115°	5.536 (5.44)	2.279 (1.91)	1.016 (-)	0.176 (-)
20°	0.209 (0.20)	0.514 (0.55)	0.311 (0.24)	0.531 (0.55)	120°	2.862 (2.82)	1.882 (1.39)	-0.269 (-0.56)	0.320 (0.35)
40°	0.420 (0.41)	0.775 (0.79)	0.030 (-0.06)	0.236 (0.24)	140°	0.239 (0.22)	0.316 (0.55)	1.429 (1.42)	2.329 (2.36)
60°	0.623 (0.60)	0.876 (0.88)	0.326 (0.24)	0.165 (0.17)	160°	0.196 (0.18)	1.752 (1.98)	1.249 (1.24)	1.763 (1.81)
80°	1.002 (0.97)	1.047 (1.05)	0.638 (0.53)	0.112 (0.12)	180°	0.194 (0.18)	1.811 (2.03)	1.199 (1.19)	1.595 (1.64)
100°	2.764 (2.69)	1.584 (1.59)	1.998 (1.77)	0.086 (0.10)					

В [1] указано, что авторы «разработали различные приближенные методы, которые приводили к идентичным численным результатам». Это утверждение совсем непонятно. Известно, что приближенные методы могут приводить к «идентичным» численным результатам, но не всегда близким к реальным. Должен же быть какой-то критерий проверки достоверности результатов. Если использовать метод последовательных приближений, то возникает вопрос: на каком приближении необходимо остановиться, чтобы достичь требуемой точности? Авторы [1] об этом не упоминают.

Действительно, метод малого параметра в третьем приближении дает удовлетворительные численные результаты, как видно из приведенных выше данных, только при отсутствии резкой концентрации напряжений на маленьких участках контура отверстия.

Далее в [1] приводится следующее утверждение: «В работе Т. Л. Мартыновича на стр. 65 предложены отображения (1.8)». Разве в [2] сказано, что (1.8) отображающая функция? Разве аффинное преобразование является конформным? Разве путем аналитического продолжения уравнения контуров L_j (стр. 65):

$$t_j = x + sy = \frac{R_j}{R} [\omega(\sigma) + m_j \overline{\omega(\sigma)}], \quad \sigma = e^{i\theta} \quad (j=1,2) \quad (1)$$

в области S_j получается отображающая функция? Это необходимое, но недостаточное условие!

Согласно [2], функция

$$z_j = \omega_j(\xi_j) = \frac{R_j}{R} \left[\omega(\xi_j) + m_j \overline{\omega\left(\frac{1}{\xi_j}\right)} \right] \quad (j=1,2) \quad (2)$$

являющаяся аналитическим продолжением функции (1) (уравнения контуров), только по принятому в литературе обозначению ассоциируется с отображающей функцией, а сама она никакого отношения к отображающим функциям не имеет. Не хотелось бы верить, что авторам [1] все это неизвестно.

Кратко напомним основную идею метода. Рассматривается анизотропная пластинка, занимающая бесконечную область S с отверстием, контур которого L описывается уравнением

$$t = x + iy = \omega(\sigma) = R \left(\sigma + \sum_{k=1}^N c_k \sigma^{-k} \right), \quad \sigma = e^{i\theta} \quad (3)$$

Аналитически продолжим уравнение контура отверстия (3) в область S , тогда получим функцию

$$z = \omega(\xi) = R \left(\xi + \sum_{k=1}^N c_k \xi^{-k} \right), \quad |\xi| \geq 1 \quad (4)$$

Преобразование (4) еще не является конформным отображением внешности единичной окружности γ на внешность контура L при произвольных значениях коэффициентов c_k . Следовательно, функция $\varphi(z) = \varphi[\omega(\xi)]$, аналитическая по переменной z , не будет аналитической по переменной ξ в области $1 \leq |\xi| < \infty$.

Преобразование (4) будет конформным только при соблюдении условия

$$\sum_{k=1}^N k |c_k| < 1 \quad (5)$$

При выполнении условия (5) $\omega'(\xi) \neq 0$ ($|\xi| \geq 1$) функция $\varphi(z) = \varphi[\omega(\xi)]$ будет аналитической и по переменной ξ . В этом случае применимы методы Колосова — Мусхелишвили.

Области S_j переменных z_j получаются из области S переменной z путем аффинного (но не конформного) преобразования $z_j = x + s_j y$. Контур L_j и L областей S_j и S находятся между собой в аффинном соответствии

$$t_j = x + s_j y = 1/2(1 - is_j)t + 1/2(1 + is_j)\bar{t} \quad (j=1, 2) \quad (6)$$

Подставив (3) в (6), получим уравнения контуров L_j областей S_j в виде

$$t_j = x + s_j y = \frac{R_j}{R} [\omega(\sigma) + m_j \overline{\omega(\sigma)}], \quad \sigma = e^{i\theta} \quad (j=1, 2) \quad (7)$$

Аналитически продолжив уравнение контуров (7) в области S_j , получим

$$z_j = \omega_j(\xi_j) = \frac{R_j}{R} \left[\omega(\xi_j) + m_j \overline{\omega\left(\frac{1}{\xi_j}\right)} \right] \quad (8)$$

Соотношение (8) не является конформным отображением внешности единичной окружности γ на внешность контуров L_j . В статье [2] сказано, что (7) представляет граничное значение функции (8) и не более. Поэтому функции $\varphi_j(z_j) = \varphi_j[\omega_j(\xi_j)]$, аналитические по переменным z_j , не будут аналитическими функциями комплексных параметров ξ_j . Подставив (4) в (8), будем иметь

$$z_j = \omega_j(\xi_j) = R_j \left[\left(\xi_j + \sum_{k=1}^N c_k \xi_j^{-k} \right) + m_j \overline{R R^{-1} \left(\xi_j^{-1} + \sum_{k=1}^N \bar{c}_k \xi_j^k \right)} \right] \quad (9)$$

Авторы [1] пишут, что «можно указать на основную ошибку, допущенную Т. Л. Мартыновичем. Утверждения автора, что функция вида (2) или (6) (в принятой здесь нумерации (8) или (9)) отображает области $1 \leq |\xi_j| < \infty$ на внешность контуров L_j , является неверным. На самом деле эти функции отображают некоторые...». Разве в нашей статье приводится утверждение, что (8) или (9) конформно отображают внешность единичной окружности γ на внешность контуров L_j ? Очевидно, следует глубже выискнуть в суть метода, предложенного в работе [2].

Исследование показало, что при выполнении условия (5) функции $\omega_j(\xi_j)$ и $\omega_j'(\xi_j)$ вне единичной окружности γ имеют $N-1$ нулей (см. теорему Руше). Поэтому функции $\omega_j(\xi_j)$ и $\omega_j'(\xi_j)$ можно представить в виде

$$z_j = \omega_j(\xi_j) = \prod_{v=1}^{N-1} (\xi_j - \xi_{*j}^{(v)}) \chi_j(\xi_j), \quad \omega_j'(\xi_j) = \prod_{v=1}^{N-1} (\xi_j - \xi_j^{(v)}) \psi_j(\xi_j) \quad (10)$$

где $\xi_j^{(v)}$, $\xi_{*j}^{(v)}$ — корни уравнений $\omega_j'(\xi_j) = 0$, $\omega_j(\xi_j) = 0$ по модулю больше единицы,

а функции $\chi_j(\zeta_j)$, $\psi_j(\zeta_j)$ имеют вид

$$\chi_j(\zeta_j) = C_1^{(j)} \left(\zeta_j + \sum_{k=1}^N \alpha_k^{(j)} \zeta_j^{-k} \right); \quad \psi_j(\zeta_j) = C_2^{(j)} \left(1 + \sum_{k=1}^{N+1} \beta_k^{(j)} \zeta_j^{-k} \right)$$

причем $\chi_j(\zeta_j) \neq 0$, $\psi_j(\zeta_j) \neq 0$ при $|\zeta_j| \geq 1$.

Далее рассмотрим комплексные потенциалы $\varphi_j(z_j)$ и их первые производные $\varphi_j'(z_j) = \frac{d\varphi_j(z_j)}{dz_j}$, через которые выражаются перемещения и компоненты тензора

напряжений, возникающие в пластинке.

При больших $|z_j|$ аналитические функции $\varphi_j(z_j)$ имеют вид

$$\varphi_j(z_j) = D^{(j)} \ln z_j + A^{(j)} z_j + A_0'^{(j)} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(j)} z_j^{-k} \quad (11)$$

С помощью зависимости (10) функции $\varphi_j(z_j)$ можно выразить через комплексный параметр ζ_j . После очевидных преобразований будем иметь

$$\varphi_j(z_j) = \varphi_j[\omega_j(\zeta_j)] = \varphi_{*j}(\zeta_j) = D'^{(j)} \ln \zeta_j + \sum_{k=1}^M a_k^{(j)} \zeta_j^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(j)} \zeta_j^{-k} + F_j(\zeta_j) \quad (12)$$

Последнее слагаемое $F_j(\zeta_j)$, неограниченное в нулях функции $\omega_j(\zeta_j)$, можем отбросить (перемещения ограничены в конечной части пластинки). Число положительных степеней M пока неизвестно. Отсюда сразу следует необоснованность утверждения авторов [1], что «представления функций $\varphi_j[\omega_j(\zeta_j)]$ (1.13) в областях $1 \leq |\zeta_j| < \infty$, приведенные Т. Л. Мартыновичем на стр. 66 его статьи, являются ошибочными». Мы произвели только замену переменных.

Рассмотрим производную

$$\varphi_j'(z_j) = \frac{d\varphi_j(z_j)}{dz_j} \cdot \frac{d\zeta_j}{d\omega_j(\zeta_j)} = \frac{\varphi_{*j}'(\zeta_j)}{\omega_j'(\zeta_j)} \quad (13)$$

Учитывая (10) и (12), получаем

$$\varphi_j'(z_j) = \frac{\varphi_{*j}'(\zeta_j)}{\omega_j'(\zeta_j)} = \frac{1}{\delta_j} \left[D'^{(j)} + \sum_{k=1}^M k a_k^{(j)} \zeta_j^k - \sum_{k=1}^{\infty} k A_k^{(j)} \zeta_j^{-k} \right], \quad (14)$$

$$\delta_j = \prod_{v=1}^{N-1} (\zeta_j - \zeta_j^{(v)}) \psi_j(\zeta_j)$$

Из условия

$$\lim_{|z_j| \rightarrow \infty} \varphi_j'(z_j) = \lim_{|\zeta_j| \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{*j}'(\zeta_j)}{\omega_j'(\zeta_j)} = A^{(j)} \quad (15)$$

следует, что $M=N$.

Для ограниченности функции (14) при $|\zeta_j| > 1$ естественно потребовать, чтобы нули функции $\varphi_{*j}'(\zeta_j)$ совпадали с нулями функции $\omega_j'(\zeta_j)$; таким образом, функции $\varphi_{*j}'(\zeta_j)$ должны удовлетворять условиям

$$\varphi_{*j}'(\zeta_j^{(v)}) = 0 \quad (v=1, 2, \dots, N-1) \quad (16)$$

где $\zeta_j^{(v)}$ — корни уравнения $\omega_j'(\zeta_j) = 0$ — по модулю больше единицы.

При соблюдении условий (15) и (16) функции (14) будут ограниченными по параметру ξ_j и содержат достаточный произвол для удовлетворения граничным условиям. Производные высших порядков функций $\varphi_j(z_j)$ в решение задачи не входят.

Вот краткое изложение идеи, использованной для построения решения задачи. Для простоты рассмотрим задачу о растяжении ортогольной пластинки с квадратным отверстием. Функции напряжений, согласно формуле (14), будем искать в виде

$$\varphi_j'(z_j) = \frac{\varphi_{*j}'(\xi_j)}{\omega_j'(\xi_j)} = \frac{3a_3^{(j)} \xi_j^6 + a_1^{(j)} \xi_j^4 - A_1^{(j)} \xi_j^2 - 3A_3^{(j)}}{R_j[(\xi_j^4 - 3c_3) - m_j(\xi_j^2 - 3c_3\xi_j^6)]} \quad (j=1,2) \quad (17)$$

Для ограниченности функции (17) должно выполняться условие (16)

$$3A_3^{(j)} + A_1^{(j)} (\xi_j^{(v)})^2 - a_1^{(j)} (\xi_j^{(v)})^4 = 3a_3^{(j)} (\xi_j^{(v)})^6 \quad (j=1,2) \quad (v=1,2) \quad (18)$$

где $\xi_j^{(v)}$ — нули знаменателя функции (17) по модулю больше единицы.

Путем удовлетворения граничных условий задачи получаем систему

$$\sum_{j=1}^2 [(1+\beta_j)A_n^{(j)} + (1-\beta_j)a_n^{(j)}] = 0 \quad (n=1,3) \quad \sum_{j=1}^2 [(1-\beta_j)A_n^{(j)} + (1+\beta_j)a_n^{(j)}] = 0 \quad (19)$$

Решив системы (18) и (19), найдем коэффициенты $a_n^{(j)}$ и $A_n^{(j)}$ в явном виде.

А теперь нетрудно убедиться, что все условия задачи и граничные условия удовлетворяются тождественно. Численный анализ, приведенный в данной работе, также служит подтверждением правильности нашего решения.

На каком тогда основании авторы [1] утверждают, что наше решение «приводит к физическому противоречию» и «не только не является точным, но не может претендовать и на название приближенного»?

Еще несколько слов относительно сопоставления численных результатов, полученных по нашим формулам и по приближенным формулам А. С. Космодамианского [6]. Рассмотрим пластинку с квадратным отверстием. Уравнения контуров L_j областей S_j имеют вид (формула (3.5), стр. 36 монографии [6]):

$$t_j = x + s_j y = R_j[\sigma + k_j \sigma^{-1} + m(k_j \sigma^3 + \sigma^{-3})] \quad (20)$$

Уравнения контуров (20) автор [6], следуя Л. В. Канторовичу, представляет в виде бесконечного ряда (формула (3.7), стр. 36), оставляя вопрос о его сходимости открытым

$$t_j = R_j \left[\sigma_j + k_j \sigma_j^{-1} + m \left(m_{0j} \sigma_j + \sum_{h=1}^{\infty} m_{hj} \sigma_j^{-h} \right) \right] \quad (21)$$

и удерживает только несколько членов бесконечной суммы, т. е. рассматривает контуры L_j , которые описываются уравнениями (формула (3.17), стр. 38):

$$t_j = R_j \left[\sigma_j + k_j \sigma_j^{-1} + m \left(m_{0j} \sigma_j + \sum_{h=1,3}^5 m_{hj} \sigma_j^{-h} \right) \right] \quad (22)$$

Вполне понятно, что соотношения (20) и (22) описывают разные контуры, возможно, близкие, но никакой оценки не дается. А решение далее строится для контуров (22), а не для контуров (20), которые получаются из контура отверстия пластинки L путем аффинного преобразования. Кроме того, соотношение (21) только по виду напоминает граничное значение отображающей функции. Чтобы отображение было конформным, должны выполняться дополнительные условия вида (5), о которых автор даже не упоминает.

Нами же построено строгое решение задачи для контуров L_j областей S_j , описываемых уравнениями (20). Естественно, близость численных результатов, полученных по нашим формулам и приближенным формулам А. С. Космодамианского, будет зависеть от близости контуров (20) и (22). Так как наибольшее отклонение контуров (20) и (22) наблюдается на участках дуг максимальной кривизны, то и численные значения в точках этих дуг должны наиболее отличаться. Численный анализ, приведенный в данной статье, полностью подтверждает эти выводы.

Поступила 7 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Космодамианский А. С., Лехницкий С. Г., Лошкин В. Н. О работе Т. Л. Мартыновича «Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием». Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6.
2. Мартынович Т. Л. Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
4. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. «Наукова думка», Киев, 1968.
5. Ермолаев Б. И. Приближенный метод определения напряжений при изгибе, анизотропной пластинки с отверстием. Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1960, № 1.
6. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. «Вища школа», Киев, 1976.

УДК 539.3.01

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ
С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, М. А. СУМБАТЯН

(Москва)

Т. Л. Мартынович [1] считает, что им получено точное решение плоской задачи о напряженно-деформированном состоянии анизотропной пластинки, ослабленной отверстием, уравнение контура L которого имеет вид $t = \omega(\sigma)$, где функция $\omega(\sigma)$ определена формулой (1.5) [1], $t = x + iy \in L$, $\sigma = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Анализ работы [1] показал, что в основном ход рассуждений автора ошибочен, хотя часть идей [1], как будет показано ниже, может быть положена в основу построения либо эффективного приближенного решения, либо точного решения задачи.

Авторы работы [2], совершенно справедливо указав на некоторые ошибочные рассуждения в [1], при этом недостаточно глубоко вскрыли их суть, и как следствие этого, не заметили, что предложенная в [1] конструкция решения, возможно, дает точные значения напряжений на контуре L , оставаясь неверной вне этого контура.

1. Сначала остановимся на основных моментах, характеризующих суть подхода Т. Л. Мартыновича к рассматриваемой проблеме и выясним, к каким последствиям они приводят.

Используя плоскость переменной z_j , связанную с переменной z реальной области пластинки S соотношением

$$z_j = \frac{R_j}{R} (z + m_j \bar{z}) \quad (j=1,2); \quad (1.1)$$

автор делает замену переменной (см. (1.5) [1]):

$$z = \omega(\zeta), \quad |\zeta| \geq 1 \quad (1.2)$$

при которой внешность единичного круга плоскости ζ конформно отображается на внешность отверстия в пластинке (на область S).

При этом естественная связь между переменными z_j и ζ должна даваться соотношением

$$z_j = \frac{R_j}{R} [\omega(\zeta) + m_j \overline{\omega(\zeta)}] \quad (1.3)$$

Однако вместо этой функции в [1] использована другая

$$z_j = \omega_j(\zeta) = \frac{R_j}{R} \left[\omega(\zeta) + m_j \overline{\left(\frac{1}{\zeta} \right)} \right] \quad (1.4)$$

совпадающая с (1.3) на контуре единичной окружности γ .

Если замена (1.3) переменной z_j отображает на S_j внешность единичного круга Γ плоскости переменной ζ , то замена (1.4) этим свойством уже не обладает. В случае, когда отверстие в пластинке не является эллипсом (в частности, окружностью), т.е. когда в формуле (1.5) [1] $N \geq 2$, функция $\omega_j(\zeta)$ отображает на область S_j внешность Γ (что было верно отмечено авторами работы [2]), а некоторую N - связ-