УДК 539.3.01

О РАБОТЕ Т. Л. МАРТЫНОВИЧА «ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ»

А. С. КОСМОДАМИАНСКИЙ, С. Г. ЛЕХНИЦКИЙ, В. Н. ЛОЖКИН

(Донецк, Ленинград)

В журнале «Известия АН СССР, Механика твердого тела» (1976, № 2, стр. 64-69) опубликована статья Т. Л. Мартыновича «Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием».

Мы длительное время занимались этой проблемой и разработали различные приближенные методы, которые приводили к идентичным численным результатам. Однако значения напряжений σ_θ, полученные Т. Л. Мартыновичем на основе предложенного им метода решения задачи о растяжении ортотропной пластинки с квадратным отверстием и приведенные на стр. 69 его статьи, резко отличаются от численных данных, приведенных, например, на стр. 238 монографии С. Г. Лехницкого (М., Гостехиздат, 1957).

Сделав тщательный анализ предложенного Т. Л. Мартыновичем метода, мы пришли к выводу, что этот метод содержит принципиальную математическую ошибку, а поэтому не только не является точным, но не может претендовать и на название приближенного.

Остановимся на сути проблемы. Рассмотрим неограниченную анизотропную пластинку с криволинейным отверстием, которая в срединной плоскости занимает бесконечную область S с вырезом, ограниченным некоторым замкнутым контуром L. Решение плоской задачи для такой области характеризуется двумя аналитическими функциями $\varphi_j(z_j)$ обобщенных комплексных переменных $z_j=x+s_jy$, где s_j – некоторые комплексные числа. Области S_j (с контурами L_j) изменения переменных z_j получаются из области S (с контуром L) путем аффинных преобразований

$$x_j=x+\alpha_jy,\quad y_j=\beta_jy,\quad \alpha_j+i\beta_j=s_j\quad (j=1,2) \tag{1}$$

Известно, что построить функции $z=\omega(\zeta)$ и $z_j=\omega_j(\zeta)$, такие, чтобы при конформном отображении внешности единичной окружности γ на внешности контуров L и L_j точкам этих контуров, связанным аффинными преобразованиями (1), соответствовала одна и та же точка единичной окружности γ, возможно только для случая, когда контур L является эллипсом (окружностью). Только для бесконечной области S с эллиптическим (круговым) вырезом было найдено точное решение плоской задачи теории упругости.

В работе Т. Л. Мартыновича на стр. 65 предложены отображения (1,8), якобы устраняющие это ограничение

$$z_j=\omega_j(\zeta_j)=\frac{R_j}{R}\left[\omega(\zeta_j)+m_j\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta_j}\right)\right] \tag{2}$$

где функция

$$\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\sum_{n=1}^{N}c_n\zeta^{-n}\right) \tag{3}$$

конформно отображает внешность единичной окружности γ на внешность контура L. Действительно, нетрудно убедиться, что точкам контуров L и L_j, связанным аффинными преобразованиями (1), при отображениях (2) соответствует одна и та же точка единичной окружности γ даже в случае, когда контур L отличен от эллипса.

Однако далее необходимо более детально исследовать свойства функций (2). Чтобы сделать это, приведем некоторые известные положения, изложенные на стр. 163–165 монографии Н. И. Мусхелишвили «Некоторые основные задачи математической теории упругости» (М., «Наука», 1966).

«Пусть z и ζ – две комплексные переменные, связанные соотношением

$$z=\omega(\zeta) \tag{4}$$

где $\omega(\zeta)$ – однозначная аналитическая функция в некоторой области Σ на плоскости переменной ζ. Соотношение (4) приводит в соответствие каждой точке области Σ вполне определенную точку z на плоскости этой последней переменной.

Эти точки заполняют на плоскости z некоторую область S. Предположим, что, и обратно, каждой точке z области S в силу соотношения (4) соответствует одна вполне определенная точка области Σ. В этом случае говорят, что соотношение (4) определяет взаимно-однозначное конформное преобразование или конформное отображение области S на область Σ и обратно.

...Если области Σ и S обе бесконечны, причем бесконечно удаленные точки соответствуют друг другу, то функция $\omega(\zeta)$... должна иметь вид

$$\omega(\zeta)=R\zeta+f \tag{5}$$

где R – постоянная, f – голоморфная функция. Напомним, что под функцией, голоморфной в бесконечной области, подразумевается функция, которая голоморфна в любой конечной части этой области, а при достаточно больших $|\zeta|$ может быть представлена рядом вида $a_0+a_1\zeta^{-1}+a_2\zeta^{-2}+\ldots$.

Далее можно показать, что производная $\omega'(\zeta)$ не может обращаться в нуль в области Σ, иначе отображение не было бы взаимно-однозначным».

Подставив в равенства (2) соотношения (3), будем иметь

$$z_j=\omega_j(\zeta_j)=R_j\left(m_j\sum_{n=1}^{N}\bar{c}_n\zeta_j{}^n+\zeta_j+m_j\zeta_j{}^{-1}\sum_{n=1}^{N}c_n\zeta_j{}^{-n}\right) \tag{6}$$

Функции (6) содержат в себе положительные степени ζ_j до N-й включительно и не совпадают по виду с представлением (5). Кроме того, Т. Л. Мартынович на стр. 65 своей работы отмечает, что «функции $\omega_j(\zeta_j)$ и $\omega_j'(\zeta_j)$ имеют нули, расположенные вне единичной окружности γ, число которых равно $N-1$».

Учитывая все сказанное выше, можно указать на основную ошибку, допущенную Т. Л. Мартыновичем. Утверждение автора, что функции вида (2) или (6) отображают области $1\leqslant|\zeta_j|<\infty$ на внешность контуров L_j, является неверным. На самом деле эти функции отображают некоторые N-связные области Σ_j на внешность контуров L_j. При этом контурам L_j в областях S_j соответствуют N контуров в областях Σ_j (в том числе и единичная окружность γ).

Тогда представления функций $\varphi_j[\omega_j(\zeta_j)]$ (1.13) в областях $1\leqslant|\zeta_j|<\infty$, приведенные Т. Л. Мартыновичем на стр. 66 его статьи, являются ошибочными, так как область $1\leqslant|\zeta_j|<\infty$ является N-связной.

Далее Т. Л. Мартынович использует имеющийся произвол в определении функций $\varphi_j[\omega_j(\zeta_j^\circ)]$ для ликвидации особенностей их производных (1.10), приведенных на стр. 65 его статьи. Следует отметить, что точки, в которых эти производные имеют особенности, при отображениях (2) переходят внутрь контуров L_j.

Таким образом, метод, предложенный Т. Л. Мартыновичем, не учитывает N-связность областей $1\leqslant|\zeta_j|<\infty$ и приводит к физическому противоречию – N-значности напряжений на контуре L, если функции $\varphi_j[\omega_j(\zeta_j)]$ и их производные вычислять не на единичной окружности γ, а на других контурах N-связных областей $1\leqslant|\zeta_j|<\infty$, соответствующих контурам L_j, или к возникновению напряжений внутри контура L, если те же самые величины вычислять в точках, которые находятся внутри контуров N-связной области $1\leqslant|\zeta_j|<\infty$, отличных от единичной окружности γ.

Поступила 8 I 1977

УДК 539.3

К ОБОСНОВАНИЮ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Т. Л. МАРТЫНОВИЧ

(Львов)

Авторы работы [1] утверждают, что значения напряжений σ_θ для ортотропной пластинки с квадратным отверстием [2] резко отличаются от численных данных, приведенных в монографии С. Г. Лехницкого [3].

Прежде всего отметим, что решение упомянутой выше задачи получено в ноябре 1972 г., и прежде чем отправить статью для опубликования в феврале 1975 г., было