МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1979

УДК 539.377

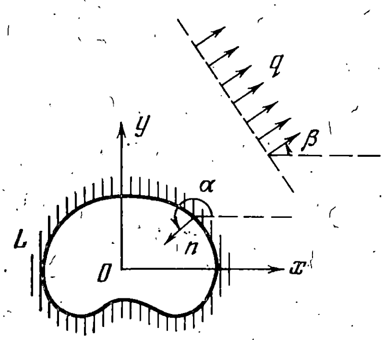
РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ ПРИ КОНВЕКТИВНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

С. И. КИБАЛЬНИКОВА, Т. Л. МАРТЫНОВИЧ

(Львов)

Дано решение плоской задачи статической термоупругости для неограниченного анизотропного тела с некруговой цилиндрической полостью при конвективном теплообмене с окружающей средой. На бесконечности задан однородный тепловой поток. Рассмотрен числовой пример для ортотропной пластинки с квадратным отверстием.

1. Рассмотрим двумерную (плоскую) задачу статической термоупругости для однородного анизотропного тела, подверженного тепловому воздействию. Тело обладает прямолинейной анизотропией в отношении тепловых и упругих свойств и отнесено к прямоугольной системе координат $Oxyz$. Координатная плоскость xOy совмещена с нормальным сечением длинного цилиндрического тела или со срединной плоскостью тонкой пластинки. В каждой точке тела имеется плоскость тепловой и упругой симметрии, параллельная координатной плоскости xOy. В случае тонкой пластинки предполагается, что торцевые плоскости ее теплоизолированы.



Фиг. 1

Пусть нормальное сечение цилиндрического тела занимает бесконечную область S с отверстием, ограниченным простым замкнутым контуром L. Теплообмен с внешней средой вдоль контура L происходит по закону Ньютона, а на бесконечности задан однородный тепловой поток интенсивности q, направленный под углом β к оси x (фиг. 1). Внешние силовые воздействия отсутствуют.

Определение стационарного температурного поля сводится к интегрированию уравнения [1–3]:

$$K_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+2K_{12}\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y}+K_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \tag{1.1}$$

при граничных условиях

$$\left(K_{11}\frac{\partial T}{\partial x}+K_{12}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\cos\alpha+\left(K_{12}\frac{\partial T}{\partial x}+K_{22}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\sin\alpha+H(T-T_c)=0 \text{ на } L$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=d_1,\quad \frac{\partial T}{\partial y}=d_2 \text{ при } |x|,|y|\to\infty \tag{1.2}$$

$$d_1=\frac{q\,(K_{12}\sin\beta-K_{22}\cos\beta)}{K_{11}K_{22}-K_{12}^2},\qquad d_2=\frac{q\,(K_{12}\cos\beta-K_{11}\sin\beta)}{K_{11}K_{22}-K_{12}^2}$$

где K_{ij} — коэффициенты теплопроводности, H — коэффициент теплообмена, T_c — температура среды, омывающей контур L, α — угол между внешней нормалью к контуру L и осью x.

Общее решение уравнения (1.1) выражается через аналитическую функцию $\Phi_3(z_3)$ переменного $z_3=x+\mu_3 y$ по формуле [2, 3]:

$$T=2\,\mathrm{Re}\,\Phi_3(z_3),\quad \mu_3=\frac{-K_{12}+iK}{K_{22}},\quad K=\sqrt{K_{11}K_{22}-K_{12}^2}\quad (K_{11}K_{22}-K_{12}^2>0) \tag{1.3}$$

Аналитическая функция $\Phi_3(z_3)$ определяется из граничного условия (1.2), которое в интегральной форме принимает вид [4]:

$$K\int_L F(t)\,d[\Phi_3(t_3)-\overline{\Phi_3(t_3)}]+\int_L H[\Phi_3(t_3)+\overline{\Phi_3(t_3)}-T_c]\,e^{-i\alpha}F(t)\,dt=0 \tag{1.4}$$

$$\lim_{|z_3|\to\infty}\Phi_3'(z_3)=B_3^\infty,\quad B_3^\infty=-\frac{q}{2}\left(\frac{\cos\beta}{K_{11}}-i\frac{\sin\beta}{K}\right)$$

Определив функцию $\Phi_3(z_3)$, комплексные потенциалы $\Phi_j(z_j)=\varphi_j'(z_j)$ $(j=1,\ 2)$, описывающие напряженное состояние в анизотропной пластинке, находим из граничных условий, которые в интегральной форме имеют вид [4]:

$$\int_L \widehat{F}(t)\,dU=-r(1+i\mu_3)\int_L F(t)\,\Phi_3(t_3)\,dt_3-\bar r(1+i\bar\mu_3)\int_L F(t)\,\overline{\Phi_3(t_3)}\,\overline{dt_3}$$

$$\int_L \overline{F(t)}\,dU=-r(1+i\mu_3)\int_L \overline{F(t)}\,\Phi_3(t_3)\,dt_3-\bar r(1+i\bar\mu_3)\int_L \overline{F(t)}\,\overline{\Phi_3(t_3)}\,\overline{dt_3} \tag{1.5}$$

$$U=\sum_{j=1}^{2}[(1+i\mu_j)\varphi_j(z_j)+(1+i\bar\mu_j)\overline{\varphi_j(z_j)}]$$

$$z_j=x+\mu_j y,\quad \mu_j=\alpha_j+i\beta_j\quad {\scriptstyle (j=1,\,2,\,3)}$$

$$r=\frac{\alpha_6\mu_3-\alpha_1\mu_3^2-\alpha_2}{a_{11}(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)(\mu_3-\bar\mu_1)(\mu_3-\bar\mu_2)}$$

Здесь α_j — температурные коэффициенты линейной и угловой деформации, t — аффикс точки контура L, z_j — обобщенные комплексные переменные, изменяющиеся в областях S_j, получаемых из области S соответствующими аффинными преобразованиями, μ_j — корни соответствующих характеристических уравнений [2, 5], $F(t)$ — граничное значение произвольной функции $F(z)$ переменной $z=x+iy$, голоморфной в области пластинки S.

Контуры отверстий областей S_j переменных z_j обозначим через L_j, а аффиксы их точек — через t_j. Аффиксы точек контуров L_j и L находятся между собой в аффинном соответствии

$$t_j=\tfrac{1}{2}(1-i\mu_j)\,t+\tfrac{1}{2}(1+i\mu_j)\,\bar t\quad {\scriptstyle (j=1,\,2,\,3)} \tag{1.6}$$

Аналитические функции $\Phi_j(z_j)$ ($j=1, 2, 3$) должны удовлетворять условиям однозначности смещений

$$\int\limits_{L_j} \Phi_j(t_j)\,dt_j = D_j^{(1)} \int\limits_{L_3} \Phi_3(t_3)\,dt_3 + D_j^{(2)} \int\limits_{L_3} \overline{\Phi_3(t_3)}\,\overline{dt_3} \qquad (j=1,2) \tag{1.7}$$

и статическому условию

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} \int\limits_{L_j} t_j\Phi_j(t_j)\,dt_j = -\operatorname{Re} r \int\limits_{L_3} t_3\Phi_3(t_3)\,dt_3$$

Величины $D^{(j)}$ выражаются через упругие и теплофизические характеристики материала. Для ортотропного относительно упругих и тепловых свойств материала они определяются по формулам ($\mu_j = i\beta_j$):

$$D_j^{(1)} = (-1)^j \frac{E_1(\alpha_1\beta_j^2-\alpha_2)}{2\beta_j(\beta_3-\beta_j)(\beta_1^2-\beta_2^2)},$$

$$D_j^{(2)} = (-1)^{j+1} \frac{E_1(\alpha_1\beta_j^2-\alpha_2)}{2\beta_j(\beta_3+\beta_j)(\beta_1^2-\beta_2^2)} \qquad (j=1,2) \tag{1.8}$$

При наличии сосредоточенных источников тепла мощности Q_m, помещенных в области S в точках (x_m, y_m) с аффиксами z_{jm} ($m=1, 2, \ldots, M$) в областях S_j, функции $\Phi_j(z_j)$ имеют вид

$$\Phi_j(z_j) = \sum_{m=1}^{M} Q_m^{(j)} \ln(z_j - z_{jm}) + q^{(j)} \ln z_j + B_j^\infty z_j +$$
$$+ A_j^\infty + D^{(j)} z_j^{-1} + O\left(\frac{1}{z_j^2}\right) \qquad (j=1,2,3) \tag{1.9}$$

причем для ортотропного материала

$$Q_m^{(3)} = -\frac{Q_m}{4\pi Kh}, \quad q^{(3)} = -\frac{q_L}{4\pi Kh}, \quad Q_m^{(j)} = \frac{\Delta_j Q_m}{4\pi Kh} \qquad (m=1,2,\ldots,M)$$

$$q^{(j)} = \frac{\Delta_j q_L}{4\pi Kh}, \quad B_j^\infty = \Delta_j^* q \left(\frac{\cos\beta}{K_{11}} - i\frac{\sin\beta}{\beta_j K_{22}}\right), \quad A_j^\infty = \bar{A}_j^\infty = -\Delta_j^* T_\infty$$

$$B_3^\infty = -\frac{q}{2}\left(\frac{\cos\beta}{K_{11}} - i\frac{\sin\beta}{K}\right), \quad A_3^\infty = \frac{1}{2} T_\infty$$

$$\Delta_j = \frac{(-1)^j E_1\beta_3(\alpha_1\beta_j^2-\alpha_2)}{\beta_j(\beta_3^2-\beta_j^2)(\beta_2^2-\beta_1^2)}, \quad \Delta_j^* = \frac{(-1)^j E_1(\alpha_1\beta_3^2-\alpha_2)}{2(\beta_3^2-\beta_j^2)(\beta_2^2-\beta_1^2)} \qquad (j=1,2)$$

где q — интенсивность теплового потока, T_∞ — температура тела на бесконечности, q_L — поток тепла, проходящий через замкнутый контур отверстия L, h — толщина пластинки. Постоянные $D^{(j)}$ определяются из условий (1.7).

Для ограниченности температурных напряжений на бесконечности должно выполняться условие теплового баланса

$$\sum_{m=1}^{M} Q_m + q_L = 0, \quad q_L = h\int\limits_L H(T-T_c)\,ds \tag{1.10}$$

2. Пусть регулярная функция, совершающая конформное отображение внешности единичной окружности $\gamma(|\zeta|\geqslant 1)$ на внешность контура L области S, имеет вид

$$z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\sum_{k=1}^{N}c_k\zeta^{-k}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{N}k|c_k|<1,\quad \omega'(\zeta)\neq 0,\quad |\zeta|\geqslant 1 \tag{2.1}$$

С учетом отображающей функции (2.1) соотношения (1.6) примут вид [6]:

$$t_j=\frac{R_j}{R}\left[\omega(\sigma)+m_j\overline{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]\quad (t_j\in L_j,\ \sigma\in\gamma)$$

$$R_j={}^1/_2R(1-i\mu_j),\quad m_j=(1+i\mu_j)/(1-i\mu_j)\quad {\scriptstyle (j=1,\,2,\,3)} \tag{2.2}$$

Выражения (2.2) представляют граничные значения функций

$$z_j=\omega_j(\zeta_j)=\frac{R_j}{R}\left[\omega(\zeta_j)+m_j\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta_j}\right)\right],\quad {\scriptstyle (z_j\in S_j,\ |\zeta_j|\geqslant 1)\ (j=1,2,3)} \tag{2.3}$$

регулярных в областях $|\zeta_j|\geqslant 1$, кроме точек $\zeta_j=\infty$, где они имеют полюс порядка N. Функции $\omega_j(\zeta_j)$ и $\omega_j'(\zeta_j)$ имеют нули, расположенные вне единичной окружности $\gamma(|\zeta_j|\geqslant 1)$, число которых равно $N-1$ [7].

Вводя обозначения $(Q_m=0,\ g_L=0)$:

$$\varphi_j(z_j)=\varphi_j[\omega_j(\zeta_j)]={}^1/_2B_j^{\infty}\omega_j^2(\zeta_j)+\varphi_{*j}(\zeta_j)$$

$$\Phi_3(z_3)=\Phi_3[\omega_3(\zeta_3)]=\Phi_{*3}(\zeta_3)$$

находим

$$\varphi_j'(z_j)=\Phi_j(z_j)=B_j^{\infty}\omega_j(\zeta_j)+\frac{\varphi_{*j}'(\zeta_j)}{\omega_j'(\zeta_j)}\quad \Phi_3'(z_3)=\frac{\Phi_{*3}'(\zeta_3)}{\omega_3'(\zeta_3)}\quad {\scriptstyle (j=1,2)}$$

$$\omega_j'(\zeta_j)=\frac{R_j}{R}\left[\omega'(\zeta_j)-\frac{m_j}{\zeta_j^2}\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta_j}\right)\right]\quad {\scriptstyle (j=1,2,3)} \tag{2.4}$$

Следуя ходу рассуждений, изложенному в работе [6], приходим к заключению, что при достаточно больших $|\zeta_j|$ функции $\varphi_{*j}(\zeta_j)$, $\Phi_{*3}(\zeta_3)$ допускают следующие представления:

$$\varphi_{*j}(\zeta_j)=D^{(j)}\ln\zeta_j+\sum_{k=1}^{2N}a_k^{(j)}\zeta_j^{k}+\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{(j)}\zeta_j^{-k}\quad {\scriptstyle (j=1,2)} \tag{2.5}$$

$$\Phi_{*3}(\zeta_3)=\sum_{k=1}^{N}g_k\zeta_3^{k}+\sum_{k=0}^{\infty}G_k\zeta_3^{-k},\quad (G_0={}^1/_2T_{\infty},\ g_N\neq 0) \tag{2.6}$$

Кроме того, согласно [6], функции $\varphi_{*j}'(\zeta_j)$, $\Phi_{*3}'(\zeta_3)$ должны удовлетворять условиям

$$\varphi_{*j}'(\zeta_j^{(\nu)})=0,\quad \Phi_{*3}'(\zeta_3^{(\nu)})=0\quad {\scriptstyle (\nu=1,2,\ldots,N-1)\ (j=1,2)} \tag{2.7}$$

где $\zeta_j^{(\nu)}$ — корни уравнений $\omega_j'(\zeta_j)=0$ ($j=1, 2, 3$) по модулю больше единицы ($|\zeta_j^{(\nu)}|>1$).

На основании (2.1), (2.5), (2.6) функции (2.4) принимают следующий вид:

$$\varphi_j'(z_j)=B_j^\infty\omega_j(\zeta_j)+\left[D^{(j)}+\sum_{k=1}^{2N}ka_k^{(j)}\zeta_j^k-\sum_{k=0}^{\infty}kA_k^{(j)}\zeta_j^{-k}\right]\varepsilon_j^{-1} \quad (j=1,2) \tag{2.8}$$

$$\Phi_3'(z_3)=\left[\sum_{k=1}^{N}kg_k\zeta_3^k-\sum_{k=0}^{\infty}kG_k\zeta_3^{-k}\right]\varepsilon_3^{-1} \tag{2.9}$$

где

$$\varepsilon_j=R_j\left[\left(\zeta_j-\sum_{k=1}^{N}kc_k\zeta_j^{-k}\right)-\frac{m_j\bar{R}}{R}\left(\zeta_j^{-1}-\sum_{k=1}^{N}k\bar{c}_k\zeta_j^k\right)\right] \quad (j=1,2,3)$$

Условия (2.7) с учетом разложений (2.5) и (2.6) запишутся в форме

$$\sum_{k=0}^{N-1}kA_k^{(j)}(\zeta_j^{(\nu)})^{-k}-\sum_{k=1}^{N-1}ka_k^{(j)}(\zeta_j^{(\nu)})^k=\sum_{k=N}^{2N}ka_k^{(j)}(\zeta_j^{(\nu)})^k+D^{(j)}-$$

$$-\sum_{k=N}^{\infty}kA_k^{(j)}(\zeta_j^{(\nu)})^{-k} \quad (\nu=1,2,\ldots,N-1;\ j=1,2) \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}kG_k(\zeta_3^{(\nu)})^{-k}-\sum_{k=1}^{N-1}kg_k(\zeta_3^{(\nu)})^k=Ng_N(\zeta_3^{(\nu)})^N \quad (\nu=1,2,\ldots,N-1) \tag{2.11}$$

Здесь $\zeta_j^{(\nu)}$ — корни уравнений

$$\zeta_j-\sum_{k=1}^{N}kc_k\zeta_j^{-k}-\frac{m_j\bar{R}}{R}\left(\zeta_j^{-1}-\sum_{k=1}^{N}k\bar{c}_k\zeta_j^k\right)=0 \quad (j=1,2,3)$$

по модулю больше единицы ($|\zeta^{j(\nu)}|>1$), а коэффициент g_N и $a_k^{(j)}$ ($k=N, N+1, \ldots, 2N$) определяются из условий на бесконечности.

В преобразованной области граничные условия задачи теплопроводности (1.4) и термоупругости (1.5) принимают вид

$$K\int_\gamma F_*(\sigma)\,d[\Phi_{*3}(\sigma)-\overline{\Phi_{*3}(\sigma)}]-$$

$$-\int_\gamma H[\Phi_{*3}(\sigma)+\overline{\Phi_{*3}(\sigma)}-T_c]\frac{|\omega'(\sigma)|}{\sigma}F_*(\sigma)\,d\sigma=0 \tag{2.12}$$

$$\int_\gamma F_*(\sigma)\,dU=-r(1+i\mu_3)\int_\gamma F_*(\sigma)\Phi_{*3}(\sigma)\omega_3'(\sigma)\,d\sigma-$$

$$-\bar{r}(1+i\bar{\mu}_3)\int_\gamma F_*(\sigma)\overline{\Phi_{*3}(\sigma)}\,\overline{\omega_3'(\sigma)}\,\overline{d\sigma}$$

$$\int_\gamma \overline{F_*(\sigma)}\,dU = -r(1+i\mu_3)\int_\gamma \overline{F_*(\sigma)}\,\Phi_{*3}(\sigma)\,\omega_3'(\sigma)\,d\sigma - \tag{2.13}$$

$$-\bar{r}(1+i\bar{\mu}_3)\int_\gamma \overline{F_*(\sigma)}\,\overline{\Phi_{*3}(\sigma)}\,\overline{\omega_3'(\sigma)}\,\overline{d\sigma}$$

где $F_*(\zeta)=F[\omega(\zeta)]$ — произвольная функция, голоморфная вне γ, которую представим в виде ряда

$$F_*(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} E_n\zeta^{-n} \tag{2.14}$$

Граничное значение функции U на γ равно

$$U=\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2N}\left[(1+i\mu_j)a_k^{(j)}\sigma^k+(1+i\bar{\mu}_j)\bar{a}_k^{(j)}\sigma^{-k}\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(1+i\mu_j)A_k^{(j)}\sigma^{-k}+(1+i\bar{\mu}_j)\bar{A}_k^{(j)}\sigma^{k}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left[(1+i\mu_j)B_j^{\infty}\omega_j^2(\sigma)+(1+i\bar{\mu}_j)\bar{B}_j^{\infty}\overline{\omega_j^2(\sigma)}\right]+D\ln\sigma \tag{2.15}$$

$$D=\sum_{j=1}^{2}\left[(1+i\mu_j)D^{(j)}-(1+i\bar{\mu}_j)\bar{D}^{(j)}\right]$$

Внесем выражения (2.3), (2.6), (2.14) и (2.15) в граничное условие (2.13) и выполним интегрирование вдоль замкнутого контура γ. Полагая при этом все E_j, кроме E_n, равными нулю, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомых функций $\varphi_{*j}(\zeta_j)$ вида

$$\sum_{j=1}^{2}\left[(1+i\bar{\mu}_j)\bar{A}_n^{(j)}+(1+i\mu_j)a_n^{(j)}\right]=q_n$$

$$\sum_{j=1}^{2}\left[(1+i\mu_j)A_n^{(j)}+(1+i\bar{\mu}_j)\bar{a}_n^{(j)}\right]=f_n \quad (n=1,2,\ldots,\infty) \tag{2.16}$$

$$q_n=-\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{(1+i\mu_j)B_j^{\infty}}{n}\varepsilon_{n-1}^{(j)}-\frac{(1+i\bar{\mu}_j)\bar{B}_j^{\infty}}{n}\bar{\eta}_{n+1}^{(j)}\right]-$$

$$-\frac{r(1+i\mu_3)}{n}\gamma_{n-1}+\frac{\bar{r}(1+i\bar{\mu}_3)}{n}\bar{\delta}_{n+1}$$

$$f_n = \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{(1+i\mu_j)B_j^\infty}{n}\eta_{n+1}^{(j)} - \frac{(1+i\bar{\mu}_j)\bar{B}_j^\infty}{n}\bar{\varepsilon}_{n-1}^{(j)}\right] +$$

$$+\frac{r(1+i\mu_3)}{n}\delta_{n+1} - \frac{\bar{r}(1+i\bar{\mu}_3)}{n}\bar{\gamma}_{n-1}$$

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} k\lambda_k^{(3)} g_{n-k+1} + \sum_{k=1}^{N} k\lambda_k^{(3)} G_{k-n-1} - \sum_{k=1}^{N-n-1} k\mu_k^{(3)} g_{k+n+1}$$

$$\delta_n = \sum_{k=1}^{N} k\lambda_k^{(3)} G_{k+n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k\mu_k^{(3)} G_{n-k-1} - \sum_{k=1}^{N} k\mu_k^{(3)} g_{k-n+1}$$

$$\varepsilon_n^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} k\lambda_k^{(j)}\lambda_{n-k+1}^{(j)} + \sum_{k=1}^{N} k\lambda_k^{(j)}\mu_{k-n-1}^{(j)} - \sum_{k=1}^{N-n-1} k\mu_k^{(j)}\lambda_{k+n+1}^{(j)}$$

$$\eta_n^{(j)} = \sum_{k=1}^{N-n+1} k\lambda_k^{(j)}\mu_{k+n-1}^{(j)} - \sum_{k=1}^{n-2} k\mu_k^{(j)}\mu_{n-k-1}^{(j)} - \sum_{k=1}^{N} k\mu_k^{(j)}\lambda_{k-n+1}^{(j)}$$

$$\lambda_0^{(j)}=0,\ \lambda_1^{(j)}=R_j(1+m_j\bar{R}R^{-1}\bar{c}_1),\ \lambda_n^{(j)}=R_jm_j\bar{R}R^{-1}\bar{c}_n\ {\scriptstyle(n=2,3,\ldots,N)}$$

$$\mu_0^{(j)}=0,\quad \mu_1^{(j)}=R_j(c_1+m_j\bar{R}R^{-1}),\quad \mu_n^{(j)}=R_jc_n\ {\scriptstyle(n=2,3,\ldots,N)}$$

$$\mu_n^{(j)}=0,\quad \lambda_n^{(j)}=0,\quad g_n=0\quad \text{при}\quad n>N$$

$$\varepsilon_n^{(j)}=0,\quad \gamma_n=0\quad \text{при}\quad n>2N-1;\quad \eta_n^{(j)}=0\quad \text{при}\quad n>2N+1$$

$$\delta_0=0,\quad \eta_0^{(j)}=0\qquad {\scriptstyle(j=1,2,3)}$$

причем $a_n^{(j)}=0$ при $n>2N$

Из условия (1.7) находим

$$D^{(j)}=D_j^{(1)}\delta_1-D_j^{(2)}\bar{\delta}_1\quad {\scriptstyle(j=1,2)} \tag{2.17}$$

Решив систему (2.16) при $n>N-1$, получаем

$$A_n^{(j)}=(-1)^j\left[\frac{1-i\mu_{3-j}}{2i(\mu_2-\mu_1)}f_n^* - \frac{1+i\mu_{3-j}}{2i(\mu_2-\mu_1)}\bar{q}_n^*\right]\quad {\scriptstyle(j=1,2)}$$

$$q_n^*=q_n-\sum_{j=1}^{2}(1+i\mu_j)a_n^{(j)},\qquad f_n^*=f_n-\sum_{j=1}^{2}(1+i\bar{\mu}_j)\bar{a}_n^{(j)} \tag{2.18}$$

Уравнения (2.10) и (2.16) ($n=1, 2, \ldots, N-1$) образуют конечную систему линейных алгебраических уравнений порядка $4(N-1)$ для определения коэффициентов $A_n^{(j)}$ и $a_n^{(j)}$ ($n\leqslant N-1$).

3. Перейдем к определению коэффициентов разложения функции $\Phi_{*3}(\zeta_3)$ (2.6), входящих в правые части системы (2.16). Функцию температуры среды $T_c(s)$, омывающей контур L, разложим на единичной окружности γ в комплексный ряд Фурье

$$T_c=\sum_{n=0}^{\infty}\nu_n\sigma^n+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\nu}_n\sigma^{-n},\qquad \nu_0=T_\infty \tag{3.1}$$

Введем разложения (2.6), (2.14) и (3.1) в граничное условие (2.12) и выполним интегрирование вдоль замкнутого контура γ. Полагая при этом все E_j, кроме E_n, равными нулю, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов g_n и G_n' вида (H=const, $g_N\neq 0$):

$$\sum_{n=1}^{N-1}[H_0(g_nh_{p-i}+\bar{g}_nh_{p+i})+ng_n\delta_{jn}]+\sum_{n=1}^{\infty}[H_0(G_n'h_{p+i}+\bar{G}_n'h_{p-i})-n\bar{G}_n'\delta_{jn}]= \tag{3.2}$$

$$=H_0\sum_{n=1}^{\infty}(\nu_nh_{p-i}+\bar{\nu}_nh_{p+i})-2Ng_N\delta_{jN}\qquad (j=0,1,\ldots,\infty)$$

$$p=\frac{n}{N+1},\qquad i=\frac{j}{N+1},\qquad l=\frac{n+j}{N+1},\qquad H_0=\frac{RH}{K}$$

$$h_{p+i}=-\frac{1}{2\pi iR}\int_{\gamma^+}|\omega'(\sigma)|\sigma^{-n-j-1}\,d\sigma,\qquad h_l=h_{-l}$$

$$G_n'=G_n+\bar{g}_N\delta_{nN},\quad g_N=R_3[m_3\bar{c}_N\bar{R}R^{-1}+\delta_{N1}+\delta_{N0}]B_3^\infty$$

Присоединив к системе (3.2) условия (2.11), получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов g_n и G_n'.

Если коэффициенты разложения отображающей функции (2.1) удовлетворяют условию $c_k=c_N\delta_{kN}$ (δ_{kN} — символ Кронекера), то интегралы в (3.2) вычисляются по формуле

$$h_{|l|}(m)=\frac{2m}{\pi}[J_{2|l+1|}(m)+J_{2|l-1|}(m)]-\frac{2(1+m^2)}{\pi}J_{2|l|}(m)$$

$$J_{|l|}(m)=m^{|l/2|}\int_0^1\frac{x^{|l|}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}$$

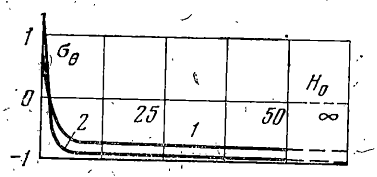
$$m=Nc_N,\qquad J_l=J_{-l},\quad l=(n+j)/(N+1).$$

Интеграл $J_{|l|}(m)$ равен нулю при l нечетных, а $h_l=0$ при l дробных. При больших l справедлива оценка

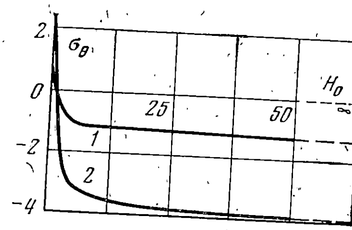
$$J_{|2l|}(m)<\frac{\pi}{2}\frac{m^{|l|}}{\sqrt{\pi|l|}}\qquad (|m|<1) \tag{3.3}$$

На основе оценки (3.3) доказывается квазирегулярность системы (3.2).

4. Рассмотрим ортотропную (относительно упругих и тепловых свойств) пластинку с квадратным отверстием. В данном случае $K_{12}=0$, $\alpha_6=0$, $\mu_j=i\beta_j$ ($\beta_j>0$, $j=1, 2, 3$), $N=3$, $c_1=0$, $c_2=0$, $c_3=\bar{c}_3$ и $R=\bar{R}$. При положительном c_3 вершины квадрата лежат на осях x и y, а при отрицательном c_3 стороны квадрата параллельны осям координат. Температу-



Фиг. 2



Фиг. 3

ру среды T_c, омывающей контур отверстия L, примем равной нулю ($T_c=T_\infty=0$).

Вычисления проведены для пластинки, изготовленной из стеклотекстолита КАСТ-В со следующими упругими и теплофизическими характеристиками: $E_1/E_2=1.45$, $E_1/G=6$, $\nu_1=0.17$, $\alpha_2/\alpha_1=0.8$, $K_{22}/K_{11}=0.6$.

На фиг. 2 и 3 дана зависимость расчетного напряжения σ_θ (в долях $qE_1\alpha_1R/K_{11}$) от безразмерного параметра $H_0=RK^{-1}H$ при $\beta=0$ (фиг. 2) и $\beta=\pi/2$ (фиг. 3). Кривая *1* соответствует значению $c_3=-1/9$, а кривая *2* — значению $c_3=1/9$.

Поступила 26 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.
2. *Уздалев А. И.* Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Изд-во Саратовского ун-та, 1967.
3. *Прусов И. А.* Некоторые задачи термоупругости. Изд-во Белорусского ун-та, 1972.
4. *Мартынович Т. Л., Нищенко И. А., Махмуд Аллам.* Температурные напряжения около эллиптического отверстия в анизотропной пластинке. Прикл. механ. 1974, т. 10, вып. 1.
5. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехтеориздат, 1957.
6. *Мартынович Т. Л.* Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием. Изв. АН СССР. МТТ, № 2, 1976.
7. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М., Гостехтеориздат, 1954.