

КЛАССИФИКАЦИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК,
СОДЕРЖАЩИХ ЖИДКОСТЬ

А. Л. РАДОВИНСКИЙ

(Москва)

В рамках применимости классической двухмерной теории рассматривается линейная задача свободных колебаний тонкостенных упругих оболочек, содержащих жидкость, и проводится сравнение с задачей свободных колебаний оболочек в вакууме.

Задача колебаний оболочек в вакууме исследована в [1-4], где, в частности, предложены приближенные методы ее решения, дана классификация соответствующих колебаний. Этим вопросам и здесь будет уделяться основное внимание. Используются уравнения (в тензорной символике) и метод, аналогичные примененным в [3].

Для краткости условимся называть колебания оболочек, соприкасающихся с жидкостью, *sf*-колебаниями, а соответствующую задачу — *sf*-задачей; колебания оболочек в вакууме — *s*-колебаниями, а соответствующую задачу — *s*-задачей (буквой *s* обозначается оболочка, а *f* — жидкость).

1. Рассматривается замкнутый объем жидкости V , ограниченный поверхностью $\Sigma = S + S_1 + S_2$, где S — часть поверхности Σ , по которой происходит контакт оболочки с жидкостью; S_1 — свободная поверхность жидкости; S_2 — часть поверхности Σ , на которой не допускаются нормальные перемещения жидкости.

Считая, что оболочка и жидкость совершают гармонические колебания с круговой частотой ω , и отделив временную переменную, будем исходить из следующих соотношений.

Уравнение Гельмгольца в V (f -уравнение):

$$\Delta \Phi + j_1 \lambda (C_0/C)^2 \Phi = 0 \quad (1.1)$$

Линейные уравнения движения тонкой упругой оболочки, соприкасающейся с жидкостью (sf -уравнения), запишем в обозначениях [3].

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{1}{2Eh} (\nabla_\alpha T^{m\alpha} - j_2 b_\alpha{}^m N^\alpha) + j_1 \lambda v^m &= 0 \\ \frac{1}{2Eh} (j_3 b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + j_4 \nabla_\alpha N^\alpha) - j_5 \lambda w &= j_6 \mu \Phi^* \\ \nabla_\alpha M^{m\alpha} - N^m &= 0, \quad \lambda = \frac{\omega^2}{C_0^2}, \quad \mu = \frac{1}{2h} \frac{\rho}{\rho_0} \lambda \end{aligned} \quad (1.2)$$

Формулы деформации — смещения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mn} &= \nabla_m v_n + f_7 b_{mn} w - \frac{1}{2} c_{mn} c^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_\beta \\ \mu_{mn} &= \nabla_m \gamma_n - j_8 c_{\alpha m} b_n{}^\alpha \delta, \quad \gamma_m = j_9 \nabla_m w - j_8 b_m{}^\alpha v_\alpha \\ \delta &= -\frac{1}{2} c^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_\beta, \quad c_{11} = c_{22} = 0, \quad c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a_{11} a_{22} - (a_{12})^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Уравнения состояния

$$T^{mn} = E^{mna\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + j_2^1 / 3 h^2 F^{mna\beta} \mu_{\alpha\beta}, \quad M^{mn} = 1/3 h^2 (G^{mna\beta} \mu_{\alpha\beta} + j_3 H^{mna\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}) \quad (1.4)$$

Здесь λ — частотный параметр, связанный с круговой частотой ω ; h — полутолщина оболочки, ρ и ρ_0 — плотности жидкости и материала оболочки соответственно; C и C_0 — скорости звука в жидкости и в материале оболочки соответственно ($C_0 = \sqrt{E/\rho_0}$); E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; Φ — потенциал перемещений жидкости; Φ^* — значение Φ на поверхности S ; T^{mn} , N^m , M^{mn} — тензоры тангенциальных усилий, перерезывающих сил и моментов; ε_{mn} , μ_{mn} — тензоры тангенциальной и изгибной деформации; γ_m , δ — тензор углов поворота относительно тангенциальных осей и угол поворота относительно нормальной оси соответственно; v_m , w — тензор тангенциальных смещений и нормальное смещение оболочки; $F^{mna\beta}$, $\bar{F}^{mna\beta}$, $G^{mna\beta}$, $H^{mna\beta}$ — физические тензоры, которые в первом приближении можно выразить формулами

$$G^{mna\beta} = E^{mna\beta} = \frac{2Eh}{1-\nu^2} (a^{am} a^{\beta n} + \nu c^{am} c^{\beta n}), \quad \bar{F}^{mna\beta} = H^{mna\beta} = 0$$

$j_1 - j_3$ (индексы не имеют тензорного значения) — условные множители, введенные для удобства последующего изложения (пока их надо считать равными единице); Δ — оператор Лапласа в объеме V .

Считается, что введена такая криволинейная система координат x^1, x^2, x^3 , что точки объема V определяются радиус-вектором $r(x^1, x^2, x^3)$, принимающим на поверхности S значение $r^* = r(x^1, x^2, 0)$ и что $\partial r / \partial x^3|_S = n$, где n — единичный вектор внутренней нормали к Σ . В уравнениях (1.2) и ниже считается, что срединная поверхность оболочки совпадает с поверхностью контакта S , хотя в действительности контакт происходит по внутренней лицевой поверхности оболочки.

Оставшиеся обозначения определяются следующим образом: $a_{mn} = -r_m^* \cdot r_n^*$ — метрический тензор срединной поверхности; $b_{mn} = n \cdot r_{mn}^*$ — тензор кривизны; индексы при r^* означают дифференцирование; c_{mn} — дискриминантный тензор; ∇_m — символ ковариантной производной по x^m на поверхности S .

На поверхности Σ должны выполняться следующие f -условия. Условие непротекания

$$w = \nabla_3 \Phi, \quad \nabla_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} \Big|_S \quad \text{на } S \quad (1.5)$$

(выражающее равенство нормальных перемещений оболочки и жидкости), и условия

$$\Phi = 0 \quad \text{на } S_1, \quad \partial \Phi / \partial n = 0 \quad \text{на } S_2 \quad (1.6)$$

На границе поверхности S должны выполняться однородные граничные s -условия, выражающие тип закрепления края оболочки.

2. При анализе s -задачи использован асимптотический метод, основанный на масштабном растяжении [3]. Для sf -задачи этот метод модифицируется следующим образом.

Введем замену независимых переменных при помощи равенств

$$\tilde{x}^m = \eta^p \xi^m, \quad \eta = h/R \quad (2.1)$$

В них ξ^m — преобразованные параметры криволинейной системы координат, R — характерный радиус кривизны поверхности S , p — число, зависящее от выбора.

Символы ковариантных производных на поверхности S и оператор Лапласа в V можно представить в виде

$$\nabla_m = \frac{\partial}{\partial x^m} + g_m \quad (m=1,2) \quad (2.2)$$

$$\Delta = \sum_{i,j=1}^3 f_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{k=1}^3 f_k \frac{\partial}{\partial x^k} + f_4$$

где g_m, f_{ij}, f_k, f_4 — величины, не содержащие символов дифференцирования.

Поэтому, в силу (2.2), а также (1.5), имеем

$$\nabla_m = \eta^{-p} \nabla_m^*, \quad \nabla_m^* = \frac{\partial}{\partial \xi^m} + \eta^p g_m \quad (m=1,2) \quad (2.3)$$

$$\Delta = \eta^{-2p} \Delta^*, \quad \Delta^* = \sum_{i,j=1}^3 f_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \eta^p \sum_{k=1}^3 f_k \frac{\partial}{\partial \xi^k} + \eta^{2p} f_4$$

$$\nabla_3 = \eta^{-p} \nabla_3^*, \quad \nabla_3^* = \frac{\partial}{\partial \xi^3} \Big|_S$$

Введем следующие замены искомых величин:

$$\begin{aligned} T^{mn} &= \eta^{q-t} T_0^{mn}, & M^{mn} &= \eta^{2-2p-t} M_0^{mn}, & N^m &= \eta^{2-3p-t} N_0^m, & v_m &= \eta^{p+q-t} v_m^0, & w &= w_0 \\ \gamma_m &= \eta^{-p-t} \gamma_m^0, & \delta &= \eta^{q-t} \delta_0, & \varepsilon_{mn} &= \eta^{q-t} \varepsilon_{mn}^0, & \mu_{mn} &= \eta^{-2p-t} \mu_{mn}^0, & \Phi &= \eta^p \Phi_0, \\ \lambda &= \eta^{2r} \lambda_0, & \mu &= \eta^{2r-1} \mu_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

где r, t, q — пока произвольные числа.

Выполнив в (1.1)–(1.5) замены (2.3), (2.4) и умножая преобразованные уравнения на подобранные соответствующим образом степени η , приходим к уравнениям

$$\Delta^* \Phi_0 + \eta^{2r+2p} \lambda_0 (C_0/C)^2 \Phi_0 = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{2Eh} (\nabla_\alpha^* T_0^{m\alpha} - \eta^{2-2p-q} b_\alpha^m N_0^\alpha) + \eta^{2r+2p} \lambda_0 v_0^m = 0$$

$$\frac{1}{2Eh} (\eta^k b_{\alpha\beta} T_0^{\alpha\beta} + \eta^{k_1} \nabla_\alpha^* N_0^\alpha) - \eta^{k_2} \lambda_0 w_0 = \eta^{k_3} \mu_0 \Phi_0^*$$

$$k_1 = 2 + 4p + k - q, \quad k_2 = 2r + k - q + t, \quad k_3 = 2r - 1 - q + p + k + t$$

$$\nabla_\alpha^* M_0^{m\alpha} - N_0^m = 0, \quad \varepsilon_{mn}^0 = \nabla_m^* v_n^0 + \eta^{t-q} b_{mn} w_0^{-1} / 2 c_{mn} c^{\alpha\beta} \nabla_\alpha^* v_\beta^0$$

$$\mu_{mn}^0 = \nabla_m^* \gamma_n^0 - \eta^{2p+q} c_{\alpha m} b_n^\alpha \delta_0, \quad \gamma_m^0 = \eta^t \nabla_m^* w_0 - \eta^{2p+q} b_m^\alpha v_\alpha^0$$

$$\delta_0 = -1/2 c^{\alpha\beta} \nabla_\alpha^* v_\beta^0, \quad T_0^{mn} = E^{mn\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \eta^{2-2p-q} / 3 R F^{mn\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^0$$

$$M_0^{mn} = 1/3 R^2 (G^{mn\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}^0 + \eta^{2p+q} H^{mn\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^0),$$

$$w_0 = \nabla_3^* \Phi$$

(в третьем из этих равенств введен множитель η^k , k — пока произвольное число).

Для чисел p, q, r, t, k необходимо подбирать непротиворечивые сочетания значений, удовлетворяющие некоторым условиям. Они подробно

Таблица 1

N	p	q	t	k	A	B
1	$1-2r$	0	0	0	$1/4 < r \leq 1/2$	$0 \leq p < 1/2$
2	$-r$	$2r$	$1+r$	0	$-1 < r \leq 0$	$0 \leq p < 1$
3	$1/5(3-2r)$ $1/2$	0 0	0 0	$1/5(2-8r)$ 0	$-1 < r \leq 1/4$ $1/4 < r < \infty$	$1/2 \leq p < 1$

сформулированы в [3] и, в сущности, сводятся к требованию, чтобы при фиксированных таким способом p, q, r, t, k в системе (2.5) был возможен предельный (при $\eta \rightarrow 0$) переход, приводящий к формально непротиворечивой предельной системе. Последнее означает, что ни в какой совокупности уравнений, выделенной из предельной системы, число равенств не должно превышать числа неизвестных.

В табл. 1 приведены три варианта (N) непротиворечивых сочетаний. Числа p, q, t, k выражены через r и считается, что r можно придавать любые значения в пределах неравенств, указанных в столбце A . Интервал допустимого этими неравенствами изменения r будем называть областью существования соответствующего варианта (в столбце B табл. 1 даны интервалы изменения p , вытекающие из ограничений, наложенных на r).

Замечание 2.1. Вариант 3 подразделяется на два подварианта. При этом область существования варианта 3 ($-1 < r < \infty$) разбивается на две подобласти, в которых связь чисел p, q, t, k и r устанавливается различным образом. Так, в одном из подвариантов число p фиксировано ($p=1/2$) и в области существования этого подварианта не зависит от выбора r .

Примем следующее предположение: каждому из приведенных в табл. 1 вариантов непротиворечивых сочетаний p, q, r, t, k соответствует некоторая совокупность решений уравнений (1.1) — (1.4), с известной степенью приближения удовлетворяющих соответствующей предельной системе. Эти решения таковы, что все искомые величины, отмеченные нулём в формулах (2.4), имеют одинаковый асимптотический порядок, а дифференцирование по ξ^1, ξ^2, ξ^3 не может привести к существенному возрастанию этих величин.

Тогда число p будет совпадать по смыслу с показателем изменчивости (пока считается, что показатели изменчивости в направлении всех трех координат одинаковы), а степени η в (2.4) устанавливают асимптотику всех искомых величин относительно $w=w_0$.

Заметим, что для выполнения предположения об одинаковом асимптотическом порядке величин λ_0 и μ_0 в (2.4) надо потребовать в (1.2), чтобы $\rho/\rho_0 = O(\eta^0)$. Кроме того, считается, что $C/C_0 = O(\eta^0)$. Это ограничивает область применимости получаемых результатов исследованием колебаний достаточно тонких оболочек или оболочек, содержащих достаточно тяжелую жидкость.

Схема вывода предельных систем заключается в следующем. Из сравнения уравнений (1.1) — (1.4) и уравнений (2.5) видно, что каждому множителю η^{k_n} в (2.5) соответствует в уравнениях (1.1) — (1.4) множитель f_n . Значения показателей k_n степеней η сведены в табл. 2. В той же таблице для рассматриваемых вариантов даны выражения χ_n , получающиеся после подстановки в них соответствующих непротиворечивых значений p, q, t, k через r . В зависимости от значений, которые принимают в пределах области существования различных вариантов, соответствующие им множители

Таблица 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
χ_n	$2r+2p$	$2-2p-q$	k	$2-4p+$ $+k-q$	$2r+k-$ $-q+t$	$2r-1-q+$ $+p+k+t$	$t-q$	$2p+q$	t
$N=1$	$2(1-r)$	$4r$	0	$2(4r-1)$	$2r$	0	0	$2(1-2r)$	0
$N=2$	0	2	0	$2(1+r)$	$1+r$	0	$1-r$	0	$1+r$
$N=3$	$\frac{6}{5}(r+1)$ $1+2r$	$\frac{4}{5}(r+1)$ 1	$\frac{2}{5}(1-4r)$ 0	0 0	$\frac{2}{5}(r+1)$ $2r$	0 $\frac{1}{2}(4r-1)$	0 0	$\frac{2}{5}(3-2r)$ 1	0 0

j_n разобьем на три группы: $j_n=j_{n_1}$ при $\chi_n>0$, $j_n=j_{n_2}$ при $\chi_n\geq 0$ и $j_n=j_{n_3}$ при $\chi_n=0$.

Искомая предельная система получается из уравнений (1.1)–(1.4), если в них положить $j_{n_1}=0$, $j_{n_3}=1$, а множители j_{n_2} сохранить, считая, что

$$j_{n_2}=0 \text{ при } \chi_{n_2}>0, j_{n_2}=1 \text{ при } \chi_{n_2}=0 \quad (2.6)$$

Значения n_1 , n_2 и n_3 для различных вариантов непротиворечивых сочетаний будут равны

N	n_1	n_2	n_3
1	1, 2, 4, 5	8	3, 6, 7, 9
2	2, 4, 5, 7, 9	—	1, 3, 6, 8
3	1, 2, 5, 8	3, 6	4, 7, 9

3. Применяв такой подход, получим следующие результаты. Первый вариант приводит к предельным уравнениям вида

$$\nabla_\alpha T^{m\alpha} = 0, \quad \frac{1}{2Eh} b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = \mu\Phi^*, \quad \Delta\Phi = 0 \quad (3.1)$$

$$T^{mn} = E^{mna\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{mn} = \nabla_m v_n + b_{mn} w^{-1/2} c_{mn} c^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_\beta$$

$$\mu^{mn} = \nabla_m \gamma_n - j_s c_{\alpha m} b_n^{\alpha} \delta, \quad \gamma_m = \nabla_m w - j_s b_m^{\alpha} v_\alpha \quad (3.2)$$

$$\delta = -1/2 c^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_\beta, \quad M^{mn} = 1/3 h^2 (G^{mna\beta} \mu_{\alpha\beta} + j_s H^{mna\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}), \quad N^m = \nabla_\alpha M^{m\alpha}$$

Решения, которые, согласно предположению п. 2, приближенно определяются этой системой, назовем квазипоперечными безмоментными sf -интегралами.

Равенства (3.1) образуют замкнутую подсистему для определения неизвестных T^{mn} , ε_{mn} , v_n , w , Φ . Они представляют собой безмоментные sf -уравнения движения, в которых из всех сил инерции удержаны только силы инерции присоединенной массы жидкости.

Все математические трудности приближенного построения квазипоперечных безмоментных sf -интегралов заключаются в интегрировании уравнений (3.1) для построения искомых величин. Величины γ_m , δ , μ_{mn} , M^{mn} , N^m после этого можно определить в том порядке, в котором они выписаны, прямыми действиями по формулам (3.2). Эти равенства при $r < 1/2$ ($p > 0$) можно дополнительно упростить, так как, согласно (2.6) и табл. 1, $j_s = 0$.

Второй вариант приводит к предельным уравнениям вида

$$\frac{1}{2Eh} \nabla_\alpha T^{m\alpha} + \lambda v^m = 0, \quad T^{mn} = E^{mna\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{mn} = \nabla_m v_n - 1/2 c_{mn} c^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_\beta \quad (3.3)$$

$$\gamma_m = -b_m^\alpha v_\alpha, \quad \delta = -1/2 c^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_\beta, \quad \mu_{mn} = \nabla_m \gamma_n - c_{\alpha m} b_n^\alpha \delta \quad (3.4)$$

$$M^{mn} = 1/3 h^2 (G^{mn\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} + H^{mn\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}), \quad N^m = \nabla_\alpha M^{m\alpha} \quad (3.5)$$

$$\Phi^* = \frac{1}{\mu 2 E h} b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \quad (3.5)$$

$$\Delta \Phi + \lambda (C_0/C)^2 \Phi = 0 \quad (3.6)$$

Решения, приближенно определяемые этой системой, назовем квазитангенциальными *sf*-интегралами. Равенства (3.3) образуют замкнутую подсистему относительно неизвестных T^{mn} , ε_{mn} , v^m . Они совпадают с уравнениями динамической плоской задачи теории упругости в искривленной метрике оболочки.

Неизвестные γ_m , δ , μ_{mn} , M^{mn} , N^m и Φ^* могут быть определены прямыми действиями по формулам (3.4) и (3.5). Для определения величины Φ служит уравнение Гельмгольца (3.6). Оставшуюся неизвестной величину w можно найти из условия непротекания (1.5).

Третий вариант приводит к предельным уравнениям вида

$$\frac{1}{2 E h} (j_3 b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha N^\alpha) = j_6 \mu \Phi^*, \quad N^m = \nabla_\alpha M^{m\alpha} \quad (3.7)$$

$$M^{mn} = 1/3 h^2 G^{mn\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta}, \quad \mu_{mn} = \nabla_m \gamma_n, \quad \gamma_m = \nabla_m w \quad (3.8)$$

$$\Delta \Phi = 0 \quad (3.8)$$

$$\nabla_\alpha T^{m\alpha} = 0, \quad T^{mn} = E^{mn\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{mn} = \nabla_m v_n + b_{mn} w - 1/2 c_{mn} c^{\alpha\beta} \nabla_\alpha v_\beta \quad (3.9)$$

Решения, которые приближенно определяются этой системой, назовем *sf*-интегралами с большой изменчивостью (здесь $p \geq 1/2$).

Вообще говоря, при $r < 1/4$ ($p > 1/2$) множители $j_3 = 0$, $j_6 = 1$ и уравнения (3.7) – (3.9) разделяются. Равенства (3.7) и (3.8) образуют замкнутую подсистему для определения неизвестных M^{mn} , N^m , μ_{mn} , γ_n , w , Φ . Они формально (с точностью до свойств метрики) совпадают с уравнениями поперечных *sf*-колебаний пластинки (нормальные силы инерции оболочки не учитываются).

Равенства (3.9) образуют замкнутую подсистему для определения T^{mn} , ε_{mn} , v^m . Они (с точностью до метрики оболочки) совпадают с неоднородными (w считается известной) уравнениями статической плоской задачи теории упругости.

При $r = 1/4$ ($p = 1/2$) множители $j_3 = j_6 = 1$, уравнения (3.7) – (3.9) не разделяются и их надо интегрировать совместно.

При $1/4 < r < \infty$ множители $j_3 = 1$, $j_6 = 0$ и уравнения (3.7) – (3.9) разделяются.

Равенства (3.7) и (3.9) образуют замкнутую подсистему для определения неизвестных T^{mn} , N^m , M^{mn} , ε_{mn} , μ_{mn} , γ_m , v^m , w . Они совпадают с уравнениями состояния с большой изменчивостью [5].

Уравнение (3.8) служит для определения величины Φ .

Выше для упрощения выкладок, приводивших к получению предельных уравнений (в частности, (3.7) и (3.9)), была принята формула (2.1), соответствующая случаю, когда изменчивость искомых величин по всем координатным направлениям одинакова. Выводы, полученные подстановкой (2.1), вообще говоря, остаются правильными и тогда, когда существуют квазистационарные направления, в которых изменчивость характе-

ривуется частным показателем θ , меньшим, чем общий показатель изменчивости p . Нетрудно получить и предельные уравнения, соответствующие таким случаям. Так, если квазистационарные направления совпадают с некоторыми координатными направлениями, надо в предельных уравнениях производные по соответствующим переменным x^m отбросить по сравнению с производными в других направлениях.

Таким способом можно, например, из (3.7) и (3.9) получить уравнения, решениями которых являются известные в статике оболочек интегралы простого краевого эффекта [5].

Данный способ неприменим, когда квазистационарные направления проходят вдоль асимптотических линий. Здесь этот случай не будет рассматриваться, хотя он и представляет интерес при исследовании колебаний со-сверхнизкими частотами [6].

4. Решение краевых sf -задач будем вести методом расчленения; аналогичным изложенному в [5].

Представим полное напряженно-деформированное состояние оболочки P и поле давления в жидкости Φ в виде

$$P = P_m + \eta^* Q_n, \quad \Phi = \Phi_m + \eta^* \Psi_n \quad (4.1)$$

Здесь P_m и Q_n — соответственно главное и дополнительное напряженно-деформированные состояния оболочки; Φ_m и Ψ_n — соответственно главное и дополнительное поля давления в жидкости, η — число, подбираемое должным образом в зависимости от вида закрепления оболочки и типа исследуемых колебаний.

Считается, что P_m , Q_n , Φ_m , Ψ_n определяются интегралами определенного варианта, описанного в п. 3. Индексы m и n назначаются в соответствии с номером этого варианта. Для удобства изложения интегралы, относящиеся варианту 3 при $1/4 < r < \infty$, будем обозначать индексом 4.

Граничные условия на краях оболочки (s -условия) разбиваются на две группы — главную и дополнительную и считается, что главные s -условия должны быть выполнены при построении P_m (одновременно определяется и исходное приближение собственной частоты), а невязки, возникающие в дополнительных s -условиях, должны быть сняты при построении Q_n . При этом в главных s -условиях появятся вторичные невязки, и метод расчленения считается формально обоснованным, если вторичные невязки в известном смысле малы.

Граничные условия на поверхности Σ должны выполняться при интегрировании f -уравнения для построения Φ_m или Ψ_n .

Опуская подробности (описанные в [3]), приведем окончательный результат для случая, когда края оболочки жестко заделаны. Будем допускать, что край оболочки может для некоторых колебаний оказаться квазистационарной линией. Поэтому показатель изменчивости искомого напряженно-деформированного состояния P вдоль края оболочки обозначим через θ . Параллельно введем классификацию колебаний оболочек, содержащих жидкость. Отметим, что эта классификация, так же как классификация [3], не охватывает всех возможных типов колебаний.

Квазипоперечными sf -колебаниями с малой изменчивостью назовем колебания, для которых в (4.1) надо положить $n=1$, $m=4$, $\eta=0$, а под главными и дополнительными s -условиями подразумевать соответственно тангенциальные и нетангенциальные условия на краях оболочки. Приближенный метод исследования таких колебаний (аналогичен [7]) заключается в следующем.

Главные напряженно-деформированное состояние P_1 и поле давления Φ_1 определяются совместно решением главной краевой sf -задачи, со-

стоящей в интегрировании безмоментных sf -уравнений движения с выполнением тангенциальных s -условий и f -условий. Дополнительное напряженно-деформированное состояние Q_4 определяется решением дополнительной краевой s -задачи, состоящей в выполнении нетангенциальных граничных условий за счет интегралов типа простого краевого эффекта уравнений (3.7) и (3.9). Дополнительное поле давлений Ψ_4 определяется решением дополнительной f -задачи, состоящей в интегрировании уравнения Лапласа с выполнением f -условий.

Как и в статике, P_1 приближенно описывает напряженно-деформированное состояние оболочки вдали от краев, а Q_4 , представляющее собой простой краевой эффект, необходимо учитывать вблизи краев.

Изложенный приближенный подход применим к построению квазипоперечных sf -колебаний с малой изменчивостью только в области существования варианта 1, определяемой неравенствами $1/4 < r \leq 1/2$ ($0 \leq p < 1/2$).

Квазитангенциальными sf -колебаниями назовем колебания, для которых в (4.1) надо положить $n=2$, $m=3$, $\kappa = -2/5(1+r)$, а под главными и дополнительными s -условиями подразумевать тангенциальные и нетангенциальные условия на краях оболочки.

Приближенный метод исследования таких колебаний заключается в следующем.

Главная краевая s -задача состоит в интегрировании динамических уравнений плоской задачи (в метрике оболочки) с выполнением тангенциальных s -условий. Она определяет P_2 . Главная f -задача заключается в интегрировании уравнения Гельмгольца с выполнением условий (1.6) на S_1 и S_2 и условия (3.5) на S . Отсюда определяется Φ_2 .

Замечание 4.1. Главная sf -задача в данном случае распалась на s - и f -задачи. Это произошло благодаря тому, что появилась приближенная формула (3.5), позволяющая найти Φ_2^* . (Напомним, что условие непротекания (1.5) служит здесь для определения величины w_2 .)

Дополнительная sf -задача заключается в интегрировании уравнений поперечных sf -колебаний пластинки (в искаженной метрике) с выполнением нетангенциальных s - и f -условий. При этом определяются Q_3 и Ψ_3 .

Изложенный подход применим к построению квазитангенциальных sf -колебаний в области существования варианта 2, которая определяется неравенствами $-1 < r \leq 0$ ($0 \leq p < 1$).

Квазипоперечными sf -колебаниями с большой изменчивостью назовем колебания, для которых главное напряженно-деформированное состояние оболочки и поле давлений в жидкости определяется sf -интегралами с большой изменчивостью.

При некоторых дополнительных предположениях, о которых будет сказано ниже, для этих колебаний в (4.1) надо положить $n=3$, $m=2$, $\kappa = 2/5(4-r)$, а под главными и дополнительными s -условиями подразумевать соответственно нетангенциальные и тангенциальные условия на краях оболочки. При этом главная краевая sf -задача заключается в интегрировании уравнений поперечных sf -колебаний пластинки (в искаженной метрике) с учетом нетангенциальных s - и f -условий. Отсюда определяются P_3 и Φ_3 . Дополнительная s -задача состоит в интегрировании уравнений динамической плоской задачи с выполнением тангенциальных s -условий. При ее решении определяется Q_2 . Дополнительное поле давлений Ψ_2 строится при решении дополнительной f -задачи, состоящей в интегрировании уравнения Гельмгольца с выполнением условий (1.6) на S_1 и S_2 и условия (3.5) на S (в условиях (3.5) правая часть выражается через величины, соответствующие Q_2 .)

Изложенный приближенный подход применим к исследованию квазипоперечных sf -колебаний с большой изменчивостью только в случае, когда

выполняются неравенства $-1 < r \leq 0$, а для P_4 край оболочки является квазистационарной линией, на которой показатель изменчивости θ удовлетворяет неравенству $\theta \leq -r$.

Если справедливы неравенства $-1 < r \leq 1/4$, и $-r < \theta \leq p$, то квазипоперечные sf -колебания с большой изменчивостью надо исследовать при помощи уравнений (3.7)–(3.9), не прибегая к представлениям (4.1) (см. [3]).

5. Обсудим некоторые вопросы, относящиеся к существованию решений главных или дополнительных задач, выявленных в п. 4, ограничившись случаями, когда эти задачи ставятся иначе, чем в теории s -колебаний.

1. Для квазипоперечных колебаний с малой изменчивостью в теории s -колебаний выявились переходные линии и было показано, что главная (безмоментная) задача в определенном диапазоне изменения частотного параметра λ решений не имеет и что с этим связано существование участка сплошного спектра вырожденной задачи [8].

Подобных явлений в теории sf -колебаний нет, так как здесь в предельных sf -уравнениях не сохраняется слагаемое, соответствующее нормальным силам инерции оболочки и обуславливающее точки поворота.

Теоремы существования решений главных sf -задач для квазипоперечных колебаний с малой и большой изменчивостью в общей постановке не исследованы. Однако для некоторых классов таких задач теоремы существования доказаны, а в ряде случаев известны и конкретные решения. Так, например, спектр и формы квазипоперечных sf -колебаний с малой изменчивостью в случае оболочки вращения получены в [9], а для поперечных sf -колебаний пластины эта задача решена в монографии [10].

2. Для квазипоперечных sf -колебаний с малой изменчивостью дополнительная sf -задача распалась на s - и f -задачи.

Дополнительная s -задача состоит в выполнении неоднородных тангенциальных s -условий за счет интегралов простого краевого эффекта уравнений (3.7) и (3.9). Эта задача всегда имеет решение [10], если край оболочки не касается асимптотических линий поверхности S .

Дополнительная f -задача заключается в интегрировании уравнения Лапласа в V с выполнением на Σ следующих f -условий: $\nabla_3 \Psi_3 = w_3$ на S , $\Psi_3 = 0$ на S_1 и $\partial \Psi_3 / \partial n = 0$ на S_2 . Эта задача, вообще говоря, имеет решение. Исключение представляет случай, когда Σ не содержит участков свободной поверхности и $\iint w_3 d\sigma \neq 0$. Не останавливаясь на этом случае подробно,

отметим, что тогда итерационный процесс п. 4 можно видоизменить так, что возникшие в дополнительном состоянии невязки в кинематическом условии непротекания на S будут учтены при построении первой поправки к P_1 и Φ_1 вместе с вторичными невязками в тангенциальных s -условиях.

3. Во всех рассмотренных в п. 4 случаях некоторое число искомых величин и собственные значения λ' частного параметра λ определяются в результате решения некоторой однородной краевой задачи, с которой начинается расчет. При определении остальных неизвестных в некоторых случаях решаются такие зависящие от λ неоднородные задачи A , для которых соответствующие однородные задачи могут при собственных значениях λ'' параметра λ иметь нетривиальные решения. Тогда при $\lambda = \lambda''$ неоднородная задача A разрешима только в случае, если величины, определяющие ее неоднородность, удовлетворяют некоторым условиям.

Если рассматриваемое значение λ' совпадает с одним из значений λ'' , то, следуя [3], будем говорить, что имеет место внутренний резонанс. Ма-

тематически внутренний резонанс проявляется в том, что при таком λ' метод расчленения (в принятой в п. 4 форме) неприменим. В данной работе внутренние резонансы из рассмотрения исключаются.

Отметим, что для случаев, обсужденных в п. 4, внутренние резонансы могут иметь место: для квазитангенциальных sf -колебаний, во-первых, при решении главной f -задачи, состоящей в интегрировании уравнения Гельмгольца, а во-вторых, при решении дополнительной краевой задачи, заключающейся в интегрировании уравнений поперечных sf -колебаний пластинки; для квазипоперечных sf -колебаний с большой изменчивостью при решении дополнительной s -задачи, состоящей в интегрировании динамических уравнений плоской задачи, и при решении дополнительной f -задачи, заключающейся в интегрировании уравнения Гельмгольца.

6. Обсудим более подробно приближенные методы исследования свободных колебаний оболочек, соприкасающиеся с жидкостью, понимая под этим прием замены решения полной sf -задачи решением главной задачи.

Квазипоперечные sf -колебания с малой изменчивостью можно приближенно исследовать, исходя из безмоментных sf -уравнений движения оболочки.

Квазипоперечные sf -колебания с большой изменчивостью можно приближенно исследовать, исходя из уравнений поперечных sf -колебаний пластинки.

Для квазипоперечных колебаний обоих рассматриваемых типов в sf -уравнениях все члены, учитывающие инерцию оболочки, можно отбросить, сохранив только члены, учитывающие инерцию жидкости. Кроме того, жидкость можно считать несжимаемой.

Замечание 6.1. Не внося новых математических трудностей, можно сохранить в уравнениях член, учитывающий нормальную инерцию оболочки, т. е. последнее слагаемое в левой части второго равенства (1.2), хотя оно асимптотически мало. При не достаточно малых относительных толщинах это, как показано в [9], может оказать заметное влияние на результат безмоментного расчета колебаний оболочек с жидкостью.

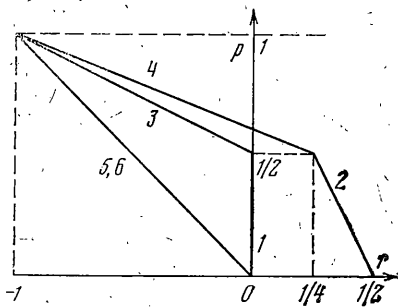
Замечание 6.2. Возможность считать жидкость несжимаемой и заменять уравнение Гельмгольца на уравнение Лапласа основана на предположении, что коэффициенты оператора Δ не слишком сильно меняются в рассматриваемом объеме V . Поэтому, если рассматривать задачу о колебаниях оболочки, погруженной в бесконечно простирающуюся жидкость, то последнюю нельзя всюду считать несжимаемой, и вопрос о применимости изложенных приближенных методов требует доработки.

Квазитангенциальные колебания можно приближенно исследовать, исходя из динамических уравнений пластинки, деформируемой в своей плоскости без учета взаимодействия с жидкостью, но с удержанием слагаемых, учитывающих инерцию оболочки. Определение поля давлений в жидкости выделяется при этом в самостоятельную задачу, при решении которой сжимаемостью жидкости пренебрегать нельзя.

Все сформулированные приближенные методы теряют силу, если имеет место какой-либо из внутренних резонансов.

7. Сравнение полученных в данной работе результатов исследования задачи свободных колебаний оболочек, соприкасающихся с жидкостью (приняты наименования: sf -задача и sf -колебания), с результатами исследования [3, 4] задачи свободных колебаний оболочек в вакууме (соответственно: s -задача и s -колебания) показывает следующее.

1. В обеих задачах можно выделить колебания аналогичных типов, а именно: квазипоперечные колебания с малой и с большой изменчивостью и квазитангенциальные колебания. Напомним, что оба исследования не претендуют на выявление всех возможных типов колебаний. Не



следующие асимптотические формулы частот sf_7 и s -колебаний (ниже величины, относящиеся к s -колебаниям, обозначены звездочкой).

Для квазипоперечных колебаний с малой изменяемостью (прямые 1, 2)

$$\lambda = O(\eta^{1-p}), \quad \lambda^* = O(\eta^0) \quad (0 \leq p < 1/2)$$

Для квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью (прямые 3, 4)

$$\lambda = O(\eta^{3-5p}), \quad \lambda^* = O(\eta^{2-4p}) \quad (1/2 \leq p < 1)$$

Для квазитангенциальных колебаний (прямые 5, 6)

$$\lambda = O(\eta^{-2p}), \quad \lambda^* = O(\eta^{-2p}) \quad (0 \leq p < 1)$$

Как видно, наличие жидкости, соприкасающейся с оболочкой, приводит к снижению собственных частот квазипоперечных колебаний ($\lambda \sim \eta^{1-2p}\lambda^*$), а на асимптотики частот квазитангенциальных колебаний не влияет.

Асимптотики перемещений оболочек при квазипоперечных s -колебаниях, с одной стороны, и sf -колебаниях, с другой стороны, совпадают. Присущее квазитангенциальным колебаниям преобладание тангенциальных перемещений над нормальными в sf -колебаниях проявляется в большей степени, нежели в s -колебаниях ($w \sim \eta^{1-p}w^*$ при $v_{1,2} \sim v_{1,2}^*$, $0 \leq p < 1$).

3. В теории s -колебаний при $\lambda = O(\eta^0)$ имеет место сгущение собственных значений $[1^{-4}]$. Здесь группируются колебания с показателями изменяемости, заключенными в интервале $0 \leq p \leq 1/2$. Этим колебаниям соответствует вертикальная линия на фигуре. К расчету таких s -колебаний применим метод [3] неприменим.

Все соответствующие sf -колебания линии на фигуре наклонны, что является косвенным подтверждением отсутствия в sf -задаче зон сгущения частот, связанных с неразрешимостью главных краевых задач, и, в частности, задачи, заключающейся в интегрировании динамических безмоментных sf -уравнений.

Автор благодарит А. Л. Гольденвейзера за постановку вопроса и внимание к работе.

Поступила 3 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Качественный анализ свободных колебаний упругой тонкой оболочки. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
2. Гольденвейзер А. Л. Классификация интегралов динамических уравнений линейной двумерной теории оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
3. Гольденвейзер А. Л. Приближенные методы исследования свободных колебаний тонких оболочек. ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.

4. Гольдвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М., «Наука», 1979.
5. Гольдвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., «Наука», 1976.
6. Гольдвейзер А. Л. Изгибания поверхностей и сверхнизкие частоты колебаний тонких оболочек. ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
7. Пшеничников Г. И. Применение асимптотического метода интегрирования в задаче о свободных колебаниях тонкой упругой оболочки вращения, частично заполненной жидкостью. Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1970.
8. Гольдвейзер А. Л., Лидский В. Б. Некоторые общие свойства свободных колебаний тонкой упругой оболочки. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 2.
9. Пшеничников Г. И. Точные решения некоторых задач о колебаниях жидкости в упругих безмоментных оболочках. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
10. Буйвол В. Н. Колебания и устойчивость деформируемых систем в жидкости. Киев, «Наукова думка», 1975.