

НЕСИММЕТРИЧНОЕ ВЫПУЧИВАНИЕ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ОСЕВОМ УДАРЕ

Б. А. ГОРДИЕНКО

(Куйбышев)

В соответствующих экспериментах (см. [1-3]) было замечено, что при достаточно высоких скоростях нагружения оболочки вращения теряют устойчивость с образованием циклосимметричных вмятин. Теоретически процесс несимметричного деформирования пластин и оболочек изучен весьма слабо. Большинство относящихся сюда задач было решено без учета сил инерции в тангенциальном направлении — вместо реальных конструкций рассматривались системы с ограниченным числом степеней свободы (см., например, [4-7]). Ниже задача о циклосимметричном деформировании цилиндрических оболочек исследуется комплексным использованием вариационного метода и метода сеток.

1. Рассматривается замкнутая круговая цилиндрическая оболочка постоянной толщины, выполненная из неограниченно упругого изотропного материала. По одному из торцов оболочки производится осевой сжимающий удар абсолютно жестким телом. Краевые сечения оболочки жестко защемлены, причем безмассовое защемление ударяемого торца считается подвижным в осевом направлении.

Поставленная задача исследуется с позиций волновых уравнений типа Тимошенко с начальными и граничными условиями. При этом нелинейные слагаемые удерживаются лишь в уравнении относительно радиальных перемещений:

$$\begin{aligned} u'' &= u_{xx} + A u_{yy} + B v_{xy} - \mu R^{-1} w_x, \quad v'' = v_{yy} + A v_{xx} + B u_{xy} - R^{-1} w_y \\ \alpha'' &= \alpha_{xx} + A \alpha_{yy} + B \beta_{xy} + 12kh^{-2}(w_x - \alpha) \\ \beta'' &= \beta_{yy} + A \beta_{xx} + B \alpha_{xy} + 12kh^{-2}(w_y - \beta) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$w'' = u'' w_x + v'' w_y + k(w_x - \alpha)_x + k(w_y - \beta)_y + (u_x + \mu v_y - \mu R^{-1} w) w_{xx} + \\ + 2A(u_y + v_x) w_{xy} + (\mu u_x + v_y - R^{-1} w)(w_{yy} + R^{-1})$$

$$k = Ak^0, \quad A = \frac{1-\mu}{2}, \quad B = \frac{1+\mu}{2}, \quad d = \frac{D}{L}, \quad t = \frac{cT}{L}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho(1-\mu^2)}$$

$$u \geq 0, \quad u' = V(1+2\varepsilon \sin 2zy) \quad (x=0), \quad u'' = 0 \quad (0 < x \leq 1) \quad (1.2)$$

$$\varphi = 0, \quad \varphi' = 0 \quad \text{при } t=0 \quad \left(z = \frac{n}{2R}, \quad \varepsilon \ll 1 \right)$$

$$u'' = \kappa(u_x + \mu v_y - \mu R^{-1} w), \quad \varphi = 0 \quad \text{при } x=0 \quad (1.3)$$

$$u = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{при } x=1 \quad (\varphi = \{v, w, \alpha, \beta\}, \quad \kappa = M_0 M^{-1})$$

$$\left[\frac{\partial^r(u, \varphi)}{\partial x_i^p \partial x_j^q} \right]_{y=0} = \left[\frac{\partial^r(u, \varphi)}{\partial x_i^p \partial x_j^q} \right]_{y=2\pi R}, \quad x_0=t, x_1=x, x_2=y$$

$$(i, j=0, 1, 2; p+q=r, r=0, 1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

Здесь u, v, w, α, β — линейные и угловые перемещения; L, R, h — длина образующей, радиус срединной поверхности и толщина оболочки; E, μ, ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала; k° — коэффициент распределения касательных напряжений по толщине оболочки; V — скорость удара; ε, n — параметр неравномерности распределения нагрузки и количество полувольт в кольцевом направлении; M_0, M — массы оболочки и груза; d, D — относительные и абсолютные значения произвольного линейного параметра; T — физическое время; x, y — относительные координаты срединной поверхности — вдоль образующей и в кольцевом направлении. Точки означают дифференцирование по безразмерному времени t , а индексы x и y — по соответствующим пространственным переменным. Условие (1.4) выражает свойство непрерывности перемещений и их производных в окружном направлении.

Для компонент перемещений, учитывая циклосимметричный характер нагружения, были выбраны следующие аппроксимации:

$$\begin{aligned} \dot{u}(x, y, t) &= u_1(x, t) + u_2(x, t) \sin 2zy, & v(x, y, t) &= v_2(x, t) \cos 2zy \\ w(x, y, t) &= w_1(x, t) + w_2(x, t) \sin^2 zy, & \alpha(x, y, t) &= \alpha_1(x, t) + \alpha_2(x, t) \sin^2 zy \\ & & \beta(x, y, t) &= \beta_2(x, t) \sin 2zy \end{aligned} \quad (1.5)$$

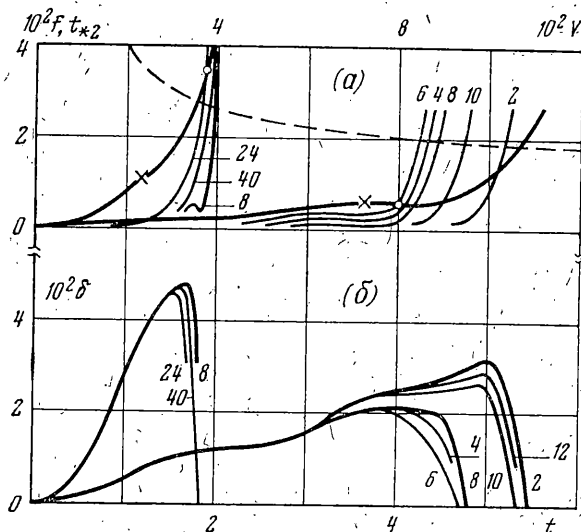
Подстановка (1.5) в (1.1)–(1.3) и последующее интегрирование по методу Бубнова — Галеркина в кольцевом направлении позволили свести рассматриваемую задачу к пространственно-одномерной (условию цикличности (1.4) функции (1.5) удовлетворяют точно; полученная система ввиду громоздкости здесь не приводится). Дальнейшее решение осуществлялось обычным методом сеток (без выделения фронтовых разрывов) на ЭЦВМ БЭСМ-4 и М-222. Результаты исследования представлены ниже.

2. Несимметричное деформирование оболочек в рамках рассматриваемой модели может быть обнаружено лишь при наличии возмущений симметричного движения. В качестве таковых использовались либо малые отклонения от симметричных условий нагружения ($w = V(1 + 2\varepsilon \sin 2zy)$ при $t=0, x=0, \varepsilon \ll 1$), либо малая циклосимметричная начальная погибь ($w_0(x, y) = 2\varepsilon \sin \pi x \sin 2zy$). Было обнаружено при этом, что окончательные результаты — критическое время, прогибы, конфигурация поверхности — практически не зависят ни от характера возмущений, ни от их амплитудных значений (2ε), лишь бы значения эти были достаточно малы ($2\varepsilon \gg 10^{-3}$). При $\varepsilon=0$, как и следовало ожидать, наблюдалось лишь осесимметричное деформирование оболочек, изученное, например, в [2, 3, 8].

На фиг. 1, а показано развитие во времени интегральных прогибов f_1 и f_2 ($x=0, R=0.3, h=0.02$):

$$f_i(t) = \int_0^1 |w_i(x, t)| dx \quad (i=1, 2) \quad (2.1)$$

Числа у кривых — количество полувольт в кольцевом направлении (n). Крестиком и светлой точкой отмечены соответственно значения первого и второго критического времени — t_{*1} (см., например, [8]) и t_{*2} . Видно, что несимметричные формы выпучивания, как и симметричные, начинают развиваться с момента соприкосновения груза с оболочкой, однако на



Фиг. 1

интервале $0 < t < t_{*2}$ они выражены слабее последних. При $t > t_{*2}$ несимметричные конфигурации упругой поверхности становятся доминирующими. Второе критическое время таким образом определяется как время, при котором

$$|w_2(x_*, t \geq t_{*2})| \geq |w_1(x_*, t \geq t_{*2})| \quad (0 < x_* < 1)$$

Замечание. На фиг. 1, а отмечено время τ_* , соответствующее условию: $f_2(t \geq \tau_*) \geq f_1(t \geq \tau_*)$. Исследования показали, что $\tau_* \approx t_{*2}$ при варьировании параметров в весьма широких диапазонах.

Видно (фиг. 1, а), что $t_{*2} = t_{*2}(n)$. Поэтому принято: $t_{*2} = \min \{t_{*2}(n)\} = t_{*2}(n_*)$ (при $V = \text{const}$). Здесь n_* — количество полуволн, которое, по-видимому, должно реализоваться в соответствующих экспериментах. Установлено, что $n_* = n_*(V)$, как это следует и из результатов лабораторных испытаний (на фиг. 2, а — $V = 2 \cdot 10^{-3}$, а на фиг. 2, б — $V = 10^{-3}$). Зависимость $t_{*2}(V)$ изображена на фиг. 1, а штриховой линией.

В процессе счета изучалось изменение длин кольцевых сечений оболочки $(\delta(x, t))$ и вычислялись интегральные значения этого параметра $(\delta(t))$:

$$\delta(x, t) = 1 - \frac{1}{2\pi R} \int_0^\varphi \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} dy$$

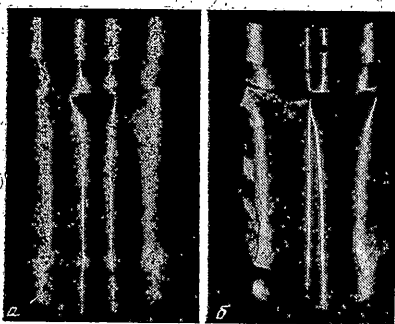
$$\delta(t) = \int_0^1 |\delta(x, t)| dx, \quad \varphi = 2\pi R \left(1 - \frac{w_1}{R} \right)$$

Развитие $\delta(t)$ представлено на фиг. 1, б. Экстремумы на кривых соответствуют наибольшему сжатию оболочки, вслед за которым наблюдается резкое увеличение $f_2(t)$ с последующим переходом на режим нелинейных колебаний (при $\kappa \neq 0$).

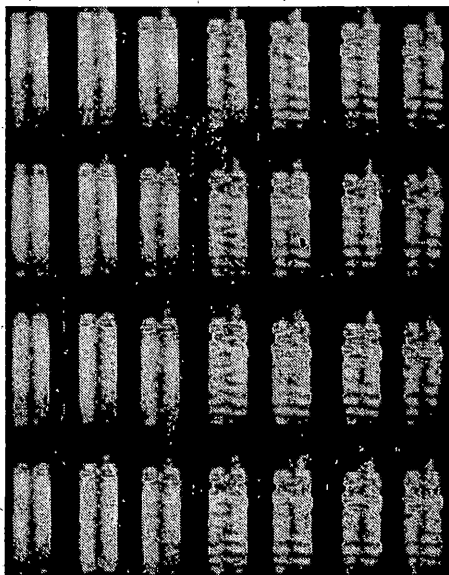
Таким образом, процесс деформирования оболочек при осевом ударе может быть условно расчленен на два периода — осесимметричный и неосесимметричный. Вывод этот находится в полном соответствии с результатами экспериментальных работ (на фиг. 3 представлена кинограмма

ударного выпучивания резиновой оболочки — $V=0.144$, $R/h \approx 28$, скорость съёмки ~ 4000 кадр/с).

Изученная выше модель несимметричного деформирования цилиндрической оболочки должна рассматриваться как модель первого приближения. Эта модель предполагает, что при заданных условиях $n = \text{const}$. В то же время эксперименты убедительно показывают, что $n = n(x, t)$. Эта зависимость может быть обнаружена либо при использовании многочленных аппроксимаций для компонент перемещений, либо путем рассмотрения z в «укороченных» выражениях типа (1.5) как непрерывной функции x и t . В последнем



Фиг. 2



Фиг. 3

случае дополнительное дифференциальное уравнение записывается как уравнение Эйлера — Остроградского для гамильтониана системы «оболочка — груз». Дальнейшее обсуждение этих приемов выходит за рамки предлагаемой работы.

Благодарю В. И. Феодосьева за постоянное внимание к работе и ценные советы, А. В. Кирюшина — за техническую помощь при постановке экспериментов, Е. И. Шолохова — за участие в машинном решении задач и А. И. Сивкова — за предоставленную возможность работы на ВЦ.

Поступила 2 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Агамиров В. Д., Вольмир А. С. Поведение цилиндрических оболочек при продольном ударе. В сб.: Проблемы устойчивости в строительной механике. М., Госстройиздат, 1965.
2. Гордиенко В. А. Поведение цилиндрических оболочек при осевом ударе. Сб. тр. Хабаровск. политехн. ин-та, 1971, вып. 25.
3. Gordienko V. A. Buckling of inelastic cylindrical shells under axial impact. Arch. Mech., 1972, vol. 24, No. 3.
4. Лавренко М. А., Ишинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. Докл. АН СССР, 1949, т. 64, № 6.
5. Вольмир А. С. Об устойчивости цилиндрических оболочек при динамическом нагружении. Докл. АН СССР, 1958, т. 123, № 5.
6. Болотин В. В., Войченко Г. А. Исследование «процелкивания» тонких упругих оболочек под действием динамических нагрузок. В сб.: Расчеты на прочность, вып. 5. М., Машгиз, 1960.
7. Терещушко О. И. Устойчивость цилиндрической оболочки при быстром нагружении осевой силой. Строительная механика и расчет сооружений, 1960, № 1.
8. Гордиенко В. А. Ударное выпучивание упругих систем. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 4.