МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1979

УДК 539.3:534.1

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

А. М. ПРОЦЕНКО

(Москва)

Рассматривается асимптотика решения трехмерных уравнений теории упругости для тонкой цилиндрической оболочки. Решение сводится к построению поверхностных волн типа волн Релея, при этом фазовые скорости оказываются зависящими от частоты. Основное внимание уделяется длинноволновой асимптотике.

1. Волны на поверхности сплошного цилиндра. Рассматривается осесимметричная волна, распространяющаяся вдоль цилиндра: R — радиус поверхности цилиндра, r и z — цилиндрические координаты, u и w — перемещения по направлениям r и z соответственно.

Уравнения теории упругости для этой задачи в перемещениях имеют вид

$$(\lambda+\mu)\varepsilon_{,r}+\mu(\Delta-1/r^2)u=\rho u^{\cdot\cdot},\quad (\lambda+\mu)\varepsilon_{,z}+\mu\Delta w=\rho w^{\cdot\cdot} \tag{1.1}$$

Краевыми условиями являются отсутствие на поверхности нормальных и касательных напряжений

$$\sigma_r(R)=\lambda\varepsilon+2\mu u_{,r}=0,\quad \tau_{rz}(R)=\mu(u_{,z}+w_{,r})=0 \tag{1.2}$$

где ρ — плотность; остальные обозначения общепринятые.

Вводим два волновых потенциала: объемный Φ и сдвиговый Ψ:

$$u=\Phi_{,r}+\Psi_{,z},\quad w=\Phi_{,z}-\Psi_{,r}-\Psi/r \tag{1.3}$$

Уравнения (1.1) распадаются на два

$$a^2\Delta\Phi=\ddot{\Phi},\quad c^2\left(\Delta-\frac{1}{r^2}\right)\Psi=\ddot{\Psi},\quad a^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho},\quad c^2=\frac{\mu}{\rho} \tag{1.4}$$

где a, c — скорости объемной и сдвиговой волн.

Краевые условия (1.2) удобно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}\sigma_r(R)=\lambda\Delta\Phi+2\mu(\Phi_{,rr}+\Psi_{,rz})=0\\ \gamma_{rz}(R)=2(\Phi_{,rz}+\Psi_{,zz})-(\Delta-1/r^2)\Psi=0\end{gathered} \tag{1.5}$$

Решение волновых уравнений (1.4), связанных краевыми условиями (1.5), будем строить в окрестности цилиндрической поверхности $r=R$. Для этой цели можно было бы использовать традиционное преобразование Фурье в виде

$$\Phi(r,\zeta,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-i(\omega t-\zeta z)]\Phi(r,z,t)\,dt\,dz$$

Уравнения (1.4) решаются в модифицированных функциях Бесселя, аналитических по ζ и ω. Использование таких решений в условиях (1.5) приводит к однородной системе уравнений, определитель которой дает дисперсионное уравнение $\Delta(\zeta, \omega)=0$. Решение этого уравнения $\omega=\omega(\zeta)$ определяет зависимость частоты от волнового числа. Фазовая скорость, в общем случае зависящая от частоты, определяется так: $b(\zeta)=\omega(\zeta)/\zeta$.

Высказанные соображения являются основанием для несколько иного подхода. А именно, введем сразу фазовую скорость $b(\zeta)$, и решение строим в виде нелинейного интеграла Фурье

$$\Phi(r,z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i\zeta(bt-z)]\Phi_0(r,\zeta)\,d\zeta$$

$$\Psi(r,z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i\zeta(bt-z)]\Psi_0(r,\zeta)\,d\zeta$$

Считаем, что $\Phi=\Psi=0$ при $bt<z$ — это функция типа волны, приходящей слева. Для волны, приходящей справа, в показателе экспоненты нужно поменять знак. Относительно функций Φ_0 и Ψ_0 предполагаем, что они допускают дифференцирование по переменной r под знаком интеграла и в дальнейшем рассматриваем их как операторы

$$\Phi_0(r,\zeta)f(\zeta)=f(\zeta)\Phi_0(r,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i\zeta(bt-z)]\Phi_0(r,\zeta)f(\zeta)\,d\zeta$$

Уравнения (1.4) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}&\Phi_{0,rr}+\frac{1}{r}\Phi_{0,r}-\zeta^2\alpha^2\Phi_0=0, \qquad \alpha^2=1-\frac{b^2}{a^2}\\ &\Phi_{0,rr}+\frac{1}{r}\Psi_{0,r}-\zeta^2\left(\frac{1}{r^2\zeta^2}+\beta^2\right)\Psi_0=0, \qquad \beta^2=1-\frac{b^2}{c^2}\end{aligned}\tag{1.6}$$

Решения этих уравнений записываются в виде модифицированных функций Бесселя первого и второго родов

$$\begin{aligned}&\Phi_0(r,\zeta)=A_1(\zeta)I_0(\zeta r\alpha)+A_2(\zeta)K_0(\zeta r\alpha)\\ &\Psi_0(r,\zeta)=B_1(\zeta)I_1(\zeta r\beta)+B_2(\zeta)K_1(\zeta r\beta)\end{aligned}\tag{1.7}$$

Подставим эти решения в краевые условия (1.5) и учтем, что при $r=0$ требуется регулярность решения, т. е. $A_2=B_2=0$. После ряда простых преобразований получим систему уравнений

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\mu}\sigma_r(R)=\left[\zeta^2\left(1-\frac{b^2}{2c^2}\right)I_0(\zeta R\alpha)-\frac{\zeta\alpha}{R}I_1(\xi R\alpha)\right]A_1-\\ &\qquad -\frac{1}{2}i\zeta^2\beta[I_0(\zeta R\beta)+I_2(\zeta R\beta)]B_1=0\\ &\frac{1}{\mu}\tau_{rz}(R)=i\zeta\alpha I_1(\zeta R\alpha)A_1+\zeta\left(1-\frac{b^2}{2c^2}\right)I_1(\zeta R\beta)B_1=0\end{aligned}\tag{1.8}$$

Неизвестными здесь являются величины A_1 и B_1. Поэтому, приравнивая нулю определитель системы, получаем дисперсионное уравнение $\Delta(b, \gamma)=0$, где $\gamma=\zeta R$. Решить такое уравнение в обозримом виде, естественно, не удается, но можно провести асимптотическое исследование. Так, при $\gamma\to\infty$ дисперсионное уравнение переходит в уравнение для скорости волны Релея на плоской поверхности $b(\infty)=b_\infty$.

Оказывается, что возможны скорости $b(\gamma)>c$. Использование асимптотического представления в нуле функций $I_n(\gamma\alpha)$ и $I_n(\gamma|\beta|)$ приводит к известной скорости распространения волны в стержне

$$b^2(0)=\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}c^2=2(1+\nu)c^2=\frac{E}{\rho} \tag{1.9}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга.

Исследование дисперсионного уравнения показывает, что $b(\gamma)$ — непрерывная и монотонно убывающая функция. Причем при $\beta=0$ функция Ψ_0 вырождается в линейную и γ_1 определяется из уравнения

$$(3\alpha^2-1)I_0(\gamma_1\alpha)=3\alpha^2 I_2(\gamma_1\alpha), \qquad \alpha^2=1-c^2/a^2$$

Решением уравнения (при $\nu=0.25$) является $\gamma_1\approx\pi$. Это означает, что при длине волны, примерно равной диаметру цилиндра, скорость движения волны совпадает со скоростью волны сдвига.

Достаточно быстрое убывание $b(\gamma)$ в длинноволновом диапазоне иллюстрируется тем, что при $b^2(\gamma_2)=2c^2$ для γ_2 получается уравнение $I_1'(i\gamma_2)=0$. Здесь $\gamma_2\approx2$, а $\beta^2=-1$.

Принимая в выражениях (1.7) $A_1=B_1=0$, получаем решение для волны на цилиндрической полости радиусом R, регулярное на бесконечности. Аналогично задаче о цилиндре может быть получено дисперсионное уравнение и зависимость $b^*=b^*(\gamma)$ с той же самой коротковолновой асимптотикой $b^*(\infty)=b_\infty$. Однако в нуле асимптотика будет иной $b^*(0)=a$. Действительно, при стягивании полости в точку на ней невозможны по условиям симметрии сдвиговые деформации.

Скорость $b(0)$, вычисленная по формуле (1.9), является асимптотической скоростью распространения длинных волн и в то же время — это скорость распространения волн в стержне. Далее будет показано, что для этой скорости имеются более веские основания.

В коротковолновом диапазоне получается единая асимптотика для цилиндра и полости, а в итоге — концентрация энергии в тонком слое около поверхности.

2. Волны на цилиндрической оболочке. Полное решение для волновых потенциалов (1.7) применим для цилиндрической оболочки с радиусом срединной поверхности R и толщиной стенки $2h$.

Подставим (1.7) в (1.5) и примем, что последние действуют на поверхностях $R\pm h$. Получим систему четырех линейных уравнений относительно четырех коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2:

$$\sigma_r(R\pm h, A, B, \gamma, b)=0, \qquad \tau_{rz}(R\pm h, A, B, \gamma, b)=0 \tag{2.1}$$

Определитель этой системы приводит к очень сложному уравнению, решение которого вряд ли можно проанализировать. Поэтому для достаточно тонких оболочек предлагается следующий асимптотический анализ. Запишем условия (2.1) в виде разложения в ряд Тейлора

$$\begin{aligned}\sigma_r(R\pm h)&=\sigma_r(R)\pm\sigma_{r,r}(R)h+O(h^2)=0\\ \tau_{rz}(R\pm h)&=\tau_{rz}(R)\pm\tau_{rz,r}(R)h+O(h^2)=0\end{aligned} \tag{2.2}$$

Асимптотика порядка $O(h)$ в длинноволновом диапазоне приводит к двум рассмотренным выше скоростям $b(0)$ и $b^*(0)$ — скоростям на цилиндре и полости.

Асимптотика порядка $O(h^2)$ приводит к системе четырех уравнений, отнесенных к срединной поверхности оболочки

$$\sigma_r(R)=0,\quad \tau_{rz}(R)=0,\quad \sigma_{r,r}(R)=0,\quad \tau_{rz,r}(R)=0 \tag{2.3}$$

Точка $r=R$ — внутренняя точка интервала $[R-h,\ R+h]$, в которой определены все производные волновых потенциалов. Это обстоятельство позволяет ввести шесть функций

$$\varphi(\zeta)=\Phi_0(R,\zeta),\quad \varphi_r(\zeta)=\Phi_{0,r}(R,\zeta),\quad \varphi_{rr}(\zeta)=\Phi_{0,rr}(R,\zeta)$$
$$\psi(\zeta)=\Psi_0(R,\zeta),\quad \psi_r(\zeta)=\Psi_{0,r}(R,\zeta),\quad \psi_{rr}(\zeta)=\Psi_{0,rr}(R,\zeta)$$

Все эти функции связаны двумя уравнениями типа (1.6) и четырьмя уравнениями (2.3). Подстановка (1.6) в первые два уравнения (2.3) приводит к системе

$$\zeta\left(1-\frac{b^2}{2c^2}\right)\varphi-\frac{1}{\gamma}\varphi_r-i\psi_r=0$$
$$i\varphi_r+\zeta\left(1-\frac{b^2}{2c^2}\right)\psi=0 \tag{2.4}$$

В коротковолновом диапазоне эти уравнения тождественно удовлетворяются благодаря дисперсионному отношению, что в длинноволновом диапазоне не имеет места. Такое предположение позволяет решить (2.4) относительно φ_r и ψ_r. Подчеркнем, что здесь не раскрываются выражения для потенциалов с помощью (1.7). В итоге оставшиеся два уравнения (2.3) переходят в следующие:

$$\frac{1}{\gamma}\left(1-2\frac{c^2}{a^2}\right)\varphi+i\left(\frac{1}{\gamma^2}-\frac{b^2}{2c^2}\right)\psi=0$$
$$i\left(2-2\frac{c^2}{a^2}-\frac{b^2}{2c^2}\right)\varphi+\frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{b^2}{2c^2}\right)\psi=0 \tag{2.5}$$

Обозначим $x=b^2/c^2$ и $k=c^2/a^2$ и приравняем нулю определитель системы (2.5)

$$\gamma^2-4\frac{3-4k-(1-k)x}{x[4(1-k)-x]}=0 \tag{2.6}$$

Из этого уравнения получается дисперсионное отношение $b=b(\gamma)$ и $b^2(0)=E/\rho$. Это та же самая асимптотика (1.9), полученная из уравнений (2.4) без использования представления (1.7). Иными словами, скорость распространения волн в стержне имеет очень сильные асимптотические свойства в длинноволновом диапазоне. Для коротковолнового диапазона уравнение (2.6) приводит к решению $b(\infty)=0$. Такой результат явно некорректный, поскольку в коротковолновом диапазоне фазовая скорость стремится к релеевской. Но с другой стороны практическое использование уравнения (2.6) может быть полезным для решения задач в длинноволновом диапазоне, так как коротковолновая часть быстро отсекается.

3. Полубесконечная цилиндрическая оболочка. Пусть на свободном крае ($z=0$) приложены нормальная сила $N_z(t)$ и изгибающий момент $M_z(t)$. Задачу рассматриваем в стационарных условиях для волны, приходящей слева.

Напряжения σ_z представим с помощью потенциалов

$$\sigma_z(r,\zeta)=\lambda\varepsilon+2\mu w_{,z}=-\lambda\zeta^2\frac{b^2}{a^2}\Phi_0-2i\mu\zeta\left(-i\zeta\Phi_0-\Psi_{0,r}-\frac{1}{r}\Psi_0\right)$$

Входящие в выражение для σ_z функции разложим в ряд Тейлора по $\xi=r-R$, удерживая только линейные члены. Тогда получим, используя обозначения п. 2

$$\frac{1}{2\mu}\sigma_z(\xi,\zeta)=\zeta^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^2}{2c^2}\right)(\varphi+\xi\varphi_r)-$$
$$-i\zeta\left[\frac{1}{R}\psi+\psi_r+\zeta^2\left(1-\frac{b^2}{2c^2}\right)\psi\xi\right] \qquad (3.1)$$

Обобщенные внутренние силы определим, как обычно

$$N_z(\zeta)=\int_{-h}^{h}\sigma_z(\xi,\zeta)\,d\xi,\qquad M_z(\zeta)=\int_{-h}^{h}\xi\sigma_z(\xi,\zeta)\,d\xi$$

После интегрирования и приведения подобных членов получаем окончательно

$$N_z(\zeta)=4\mu h\zeta^2\frac{b^2}{c^2}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\varphi-\frac{i}{2\gamma}\psi\right)$$
$$M_z(\zeta)=Di\zeta^3\left(1-\frac{b^2}{2c^2}\right)\frac{b^2}{c^2}\psi,\qquad D=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \qquad (3.2)$$

Введем обозначения

$$Q(\zeta)=\left\|\begin{matrix}Q_1(\zeta)\\ Q_2(\zeta)\end{matrix}\right\|,\qquad f(\zeta)=\left\|\begin{matrix}\varphi(\zeta)\\ \psi(\zeta)\end{matrix}\right\|$$

$$A(\zeta)=\zeta^2\frac{b^2}{c^2}\left\|\begin{matrix}4\mu h\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} & -2\dfrac{i\mu h}{\gamma}\\ 0 & Di\zeta\left(1-\dfrac{b^2}{2c^2}\right)\end{matrix}\right\|$$

При помощи таких обозначений (3.2) записывается компактно

$$Q(\zeta)=A(\zeta)f(\zeta) \qquad (3.3)$$

Обращение этого выражения следует проводить с использованием нелинейного интегрального оператора Фурье, введенного в п. 1. Пусть $Q(p)$ — образ Фурье, в котором $p=\zeta b$ и по заданному ζ однозначно определяется p. Тогда уравнение (3.3) эквивалентно следующему:

$$\partial_\zeta(\zeta b)\,Q^*(\zeta b)=A(\zeta)f(\zeta),\qquad Q^*(p)=\left\|\begin{matrix}N_z(p)\\ M_z(p)\end{matrix}\right\|$$

или $f(\zeta)=\partial_\zeta(\zeta b)A^{-1}(\zeta)Q(\zeta b)$.

Окончательно получаем

$$f(z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i\zeta(bt-z)]\,\partial_\zeta(\zeta b)A^{-1}(\zeta)Q(\zeta b)\,d\zeta \qquad (3.4)$$

Далее с помощью уравнений (2.4) и (1.6) можно построить φ_r, φ_{rr}, ψ_r и ψ_{rr}.

Примем, что фазовая скорость подчиняется уравнению (2.6). Тогда для групповой скорости $v_g=\partial_\zeta(\zeta b)$ не будет стационарной точки. Это означает, что представление (3.4) возможно и все возмущения с края без искажения будут передаваться на оболочку. Последующие искажения возмущений, распространяющиеся по оболочке, напоминают распространение волновых пакетов в нелинейной оптике.

Зададим подвижную систему координат, перемещающуюся вдоль оси z с постоянной скоростью $v=z/t$. Перепишем выражение (3.4)

$$f(v,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i(\zeta b-\zeta v)t]F(\zeta)d\zeta,\quad F(\zeta)=\partial_\zeta(\zeta b)A^{-1}(\zeta)Q^*(\zeta b) \tag{3.5}$$

Величину v следует выбирать из допустимого диапазона скоростей, например $0\leqslant v\leqslant b(0)$. При достаточно больших t можно использовать метод стационарной фазы. Стационарная фаза определяется из решения уравнения $\partial_\zeta(\zeta b)-v=0$.

Это эквивалентно выбору групповой скорости $v_g=v$ и движения системы координат с такой скоростью. Если $v<b(0)$, то данное уравнение имеет единственное решение ζ_1 — стационарную фазу. Поэтому (3.5) преобразуется к виду

$$f(v,t)=[2\pi t\partial_\zeta^2(\zeta_1 b_1)]^{-1/2}F(\zeta_1)e^{is(\zeta_1,v)t}+O(t^{-3/2}) \tag{3.6}$$

$$b_1=b(\zeta_1),\quad \partial_\zeta^2(\zeta_1 b_1)>0,\quad s(\zeta_1,v)=\zeta_1(b_1-v)+\pi/4$$

$$F(\zeta_1)=\partial_\zeta(\zeta_1 b_1)A^{-1}(\zeta_1)Q^*(\zeta_1 b_1)$$

В выражении (3.6) примем $Q^*\in R_2$, $\|Q^*\|=1$. В этом случае (3.6) будет фундаментальным оператором Грина, когда на краю $z=0$ действуют возмущения в виде δ-функций.

Более детальный анализ оператора Грина приводит к эффекту размывания δ-функций. Объяснение этому факту простое — δ-функция эквивалентна равномерному спектру, поэтому низкие частоты, обладая большей скоростью, уходят вперед, опережая высокие частоты. Если справедливо дисперсионное уравнение (2.6), то ультракороткие волны тормозятся. Таким образом размывается не только δ-функция. Подобная картина будет наблюдаться для импульса первоначально прямоугольной формы. Здесь будет сглаживание переднего и заднего фронтов.

Поступила 15 III 1978