МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1979

УДК 539.3

# ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ВТОРОГО РОДА В ПРОСТЫХ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ МАТЕРИАЛАХ

М. А. ГРИНФЕЛЬД

*(Москва)*

Рассматриваются фазовые переходы второго рода в простых нелинейно-упругих материалах. Получены общие соотношения, связывающие скачки изотермических модулей упругости, теплоемкости при постоянном тензоре конечных деформаций и производных тензора напряжений по температуре при фиксированном деформированном состоянии. Рассмотрены частные модели нелинейно-упругих сред.

Интенсивное развитие термомеханики сплошных сред затронуло в последнее время вопросы, касающиеся фазовых переходов [1, 2].

В данной работе рассматриваются фазовые переходы второго рода в нелинейно-упругом теле. Для этого предлагается обобщение феноменологического подхода, впервые использованного для изучения фазовых переходов второго рода в жидком гелии П. Эренфестом.

Как известно [3], соотношение Эренфеста связывает между собой скачки теплоемкости при постоянном давлении, сжимаемости и коэффициента теплового расширения. Введенное Эренфестом представление о фазовых переходах второго рода в жидкости естественным образом переносится на случай упругого тела, причем вместо единственного соотношения получается уже группа соотношений, связывающих скачки теплоемкости, тензора изотермических модулей упругости и первых производных тензора напряжений по температуре. Из 81 соотношения не все, однако, являются, независимыми. Например, для идеальной жидкости, входящей в данное рассмотрение в качестве частного случая, имеется лишь одно независимое соотношение, эквивалентное формуле Эренфеста; фазовый переход второго рода в упругом теле, при котором обе фазы являются изотропными, характеризуется шестью независимыми соотношениями при трехосном деформированном состоянии и лишь двумя при всестороннем растяжении – сжатии.

1. Как известно, рассмотрение фазовых переходов второго рода в идеальной жидкости в переменных давление — температура приводит к соотношению Эренфеста [3]:

$$\Delta\frac{\partial v(p,\theta)}{\partial p}\,\Delta c_p+\theta\left[\Delta\frac{\partial v(p,\theta)}{\partial\theta}\right]^2=0 \tag{1.1}$$

Здесь $v$ — удельный объем, $p$ — давление, $\theta$ — абсолютная температура, $c_p$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении, символ $\Delta$ означает скачок соответствующей величины.

Совершенно аналогичное предыдущему рассмотрение фазового перехода второго рода в идеальной жидкости в переменных удельный объем — температура приводит к соотношению

$$\Delta\frac{\partial p(v,\theta)}{\partial v}\,\Delta c_v-\theta\left[\Delta\frac{\partial p(v,\theta)}{\partial\theta}\right]^2=0 \tag{1.2}$$

где $c_v$ — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

В силу ряда обстоятельств соотношение (1.2) оказывается более подходящим для обобщения на случай конечно-деформируемых тел, чем (1.1).

Так, в наиболее употребительных лагранжевых переменных отсутствует удобный аналог теплоемкости при постоянном давлении (например, теплоемкость при постоянном тензоре напряжений Коши $P^{ij}$ в случае жидкости не совпадает с теплоемкостью при постоянном давлении). Кроме того, модель упругого тела обычно задается в виде зависимости тензора напряжений от тензора конечных деформаций $u_{kl}$. Для обобщения соотношения (1.1), очевидно, необходимо было бы потребовать разрешимости этой зависимости относительно напряжений, что не всегда выполнимо. Например, это условие не выполняется при рассмотрении идеальной жидкости в эйлеровых переменных; трудности того же порядка известны и для связи между тензором напряжений Пиолы — Кирхгофа и градиентами перемещений.

Можно показать, что соотношения (1.1) и (1.2) эквивалентны. Для доказательства следует воспользоваться известными термодинамическими тождествами [3]:

$$c_p-c_v=\theta\frac{\partial p(v,\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial v(p,\theta)}{\partial\theta},\qquad \frac{\partial p(v,\theta)}{\partial v}\frac{\partial v(p,\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\theta(p,v)}{\partial p}=-1 \tag{1.3}$$

Для удобства воспользуемся общепринятыми обозначениями

$$\alpha=\frac{1}{v}\frac{\partial v(p,\theta)}{\partial\theta},\qquad \beta=-\frac{1}{v}\frac{\partial v(p,\theta)}{\partial p}$$

при помощи которых соотношения (1.1)—(1.3) запишутся так:

$$\Delta\beta\Delta c_p-\theta v(\Delta\alpha)^2=0,\qquad \Delta\frac{1}{\beta}\Delta c_v+\theta v\left(\Delta\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=0 \tag{1.4}$$

$$c_p-c_v=-\theta v\frac{\alpha^2}{\beta},\qquad \frac{\partial p(v,\theta)}{\partial\theta}=\frac{\alpha}{\beta} \tag{1.5}$$

Воспользовавшись (1.5), получаем

$$\Delta\frac{1}{\beta}\Delta c_v+\theta v\left(\Delta\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=\Delta\frac{1}{\beta}\Delta\left(c_p-\theta v\frac{\alpha^2}{\beta}\right)+\theta v\left(\Delta\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1}{\beta_-+\Delta\beta}-\frac{1}{\beta_-}\right)\left\{\Delta c_p-\theta v\left[\frac{(\alpha_-+\Delta\alpha)^2}{\beta_-+\Delta\beta}-\frac{\alpha_-^2}{\beta_-}\right]\right\}+$$

$$+\theta v\left(\frac{\alpha_-+\Delta\alpha}{\beta_-+\Delta\beta}-\frac{\alpha_-}{\beta_-}\right)^2=-\frac{\Delta\beta}{\beta_-(\beta_-+\Delta\beta)}\times$$

$$\times\left[\Delta c_p-\theta v\frac{2\alpha_-\beta_-\Delta\alpha+(\Delta\alpha)^2\beta_--\alpha_-^2\Delta\beta}{\beta_-(\beta_-+\Delta\beta)}\right]+\theta v\frac{(\beta_-\Delta\alpha-\alpha_-\Delta\beta)}{\beta_-^2(\beta_-+\Delta\beta)^2}=$$

$$=-\frac{\Delta\beta\Delta c_p}{\beta_-(\beta_-+\Delta\beta)}+\theta v\frac{\beta_-(\beta_-+\Delta\beta)(\Delta\alpha)^2}{\beta_-^2(\beta_-+\Delta\beta)^2}=-\frac{1}{\beta_-\beta_+}[\Delta\beta\Delta c_p-\theta v(\Delta\alpha)^2] \tag{1.6}$$

Из (1.6) следует, что соотношения (1.4) эквивалентны, что в свою очередь влечет эквивалентность соотношений (1.1), (1.2).

**2.** Остановимся на некоторых основных положениях термомеханики нелинейно-упругого тела в лагранжевых (материальных) переменных $x^i$ ($i=1, 2, 3$).

В исходной (отсчетной) конфигурации точке $x$ соответствуют: достаточно гладкий радиус-вектор $\mathbf{x}(x)$ (во избежание загромождения формул индексы аргументов по возможности не выписываются), ковариантный базис $\mathbf{x}_i(x)=\partial\mathbf{x}(x)/\partial x^i$, ковариантный метрический тензор $x_{ij}(x)=\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_j$, контравариантный метрический тензор $x^{ij}(x)$ (который задается матрицей, обратной к $x_{ij}$), контравариантный базис $\mathbf{x}^i(x)=x^{ij}\mathbf{x}_j$, кососимметричный тензор $x_{ijk}(x)$ (имеющий главное значение в правой системе координат $x_{123}(x)=\sqrt{x(x)}$, где $x=|x_{ij}|$), элемент объема $d\omega=\sqrt{x}\,dx^1\,dx^2\,dx^3$. При помощи метрического тензора исходной конфигурации осуществляется опускание и поднятие индексов, а также осуществляется ковариантное дифференцирование, обозначаемое индексом после вертикальной черты.

В деформированном (актуальном) состоянии точке $x$ в момент времени $t$ соответствует радиус-вектор $\mathbf{X}(x, t)$, сопутствующий ковариантный базис $\mathbf{X}_i(x, t)=\partial\mathbf{X}/\partial x^i$, метрический тензор $X_{ij}(x, t)=\mathbf{X}_i\cdot\mathbf{X}_j$ (контравариантный метрический тензор $X^{ij}(x, t)$ определяется матрицей, обратной к $X_{ij}$), контравариантный базис $\mathbf{X}^i(x, t)=X^{ij}\mathbf{X}_j$, элемент объема $d\Omega(x, t)=\sqrt{X}dx^1dx^2dx^3$ ($X(x, t)=|X_{ij}|$). Для описания деформированного состояния можно воспользоваться вектором перемещения $\mathbf{u}(x, t)=\mathbf{X}-\mathbf{x}=u^i(x, t)\mathbf{x}_i=u_i(x, t)\mathbf{x}^i$. Справедливы соотношения

$$\mathbf{X}_i=a^{\,j}_{.i}\mathbf{x}_j,\qquad \mathbf{x}_i=b^{\,j}_{.i}\mathbf{X}_j,\qquad \mathbf{X}^i=b^{\,i}_{.j}\mathbf{x}^j,\qquad \mathbf{x}^i=a^{\,i}_{.j}\mathbf{X}^j \tag{2.1}$$

$$X_{ij}=a^{\,k}_{.i}a^{\,l}_{.j}x_{kl}=x_{ij}+2u_{ij},\qquad a^{\,j}_{.i}=\delta^j_i+u^{\,j}_{.|i}$$

$$a^{\,j}_{.i}b^{\,i}_{.k}=\delta^j_k,\qquad u_{ij}={}^1/_2(u_{i|j}+u_{j|i}+x^{kl}u_{k|i}u_{l|j})$$

Пусть $\mathbf{P}^{(j)}d\Sigma$ — поверхностная сила, действующая через площадку, ортогональную базисному вектору $\mathbf{X}^j$; $Q^{(j)}d\Sigma$ — поток тепла через ту же площадку; $M(x, t)$, $\eta(x, t)$, $e(x, t)$, $\psi(x, t)$ — плотность массы и массовые плотности энтропии, внутренней и свободной энергии в деформированном состоянии; $\theta(x, t)$ — абсолютная температура.

В отсутствие распределенных моментов из законов сохранения массы, импульса, момента импульса и энергии вытекает, что объекты $\mathbf{P}^j=\mathbf{P}^{(j)}\sqrt{X^{jj}}$, $Q^j=Q^{(j)}\sqrt{X^{jj}}$ образуют контравариантные тензоры первого ранга, а тензор напряжений Коши $P^{ji}=\mathbf{P}^j\cdot\mathbf{X}^i$ симметричен. Тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа можно определить соотношением $p^{ji}=(X/x)^{1/2}P^{jk}(\delta_k^{\,i}+u^{\,i}_{.|k})$.

Простой нелинейно-упругий материал характеризуется следующими соотношениями для тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа $p^{ji}$, массовых плотностей внутренней энергии $e$, свободной энергии $\psi$, энтропии $\eta$, вектора притока тепла $q^i=(d\Omega/d\omega)Q^i$ в точке с координатами $x^i$:

$$p^{ji}=p^{ji}(x, u_{k|l}, \theta, \theta_{|m}),\qquad e=e(x, u_{k|l}, \theta, \theta_{|m})$$
$$\psi=\psi(x, u_{k|l}, \theta, \theta_{|m}),\qquad \eta=\eta(x, u_{k|l}, \theta, \theta_{|m}),\qquad q^i=q^i(x, u_{k|l}, \theta, \theta_{|m}) \tag{2.2}$$

В дальнейшем неоднородность материала (т. е. явная зависимость физических свойств от координат материальных точек) не будет играть принципиальной роли, поэтому аргумент $x^i$ будет опускаться. Из закона сохранения энергии и второго начала термодинамики в форме Клаузиуса — Дюгема следует, что функции $p^{ji}$, $e$, $\psi$, $\eta$ не могут зависеть от $\theta_{|m}$, причем должны выполняться соотношения [4]:

$$p^{ji}(u_{k|l}, \theta)=m\frac{\partial\psi(u_{k|l}, \theta)}{\partial u_{i|j}},\qquad \eta(u_{k|l}, \theta)=-\frac{\partial\psi(u_{k|l}, \theta)}{\partial\theta},$$
$$m(x)=\frac{d\Omega}{d\omega}M(x, t) \tag{2.3}$$

Здесь $m(x)$ — плотность тела в исходном состоянии.

Удельная теплоемкость на единицу массы при постоянном тензоре $u_{m|n}$ $c_u(u_{k|l}, \theta)$ связана с плотностью энтропии соотношением

$$c_u(u_{k|l}, \theta) = \theta(\partial\eta(u_{k|l}, \theta)/\partial\theta) \tag{2.4}$$

Кроме вытекающих из термодинамики соотношений типа (2.3), на функции (2.2) накладывают еще ряд априорных ограничений. Будем рассматривать следствия принципа материальной независимости, который для простых термоупругих материалов сформулируем следующим образом: любым двум конфигурациям тела с одинаковым метрическим тензором деформированного состояния $X_{ij}$, одинаковой температурой $\theta$ и одинаковым градиентом температуры $\theta_{|m}$ должны соответствовать одинаковые значения тензора напряжений Коши, вектора притока тепла $Q^i$ и плотностей внутренней энергии $e$, энтропии $\eta$ и свободной энергии $\psi$. Такое определение естественным образом обобщает требования к упругому потенциалу, введенному для гиперупругих тел Е. и Ф. Коссера [5]. Только что сформулированный вариант принципа материальной независимости будет выполнен автоматически, если функции в соотношениях (2.2) обладают следующей структурой:

$$p^{ji}(u_{k|l}, \theta) = \frac{m}{M} T^{jk}(u_{mn}, \theta)(\delta_k^i + u^i_{\cdot|k}), \qquad e(u_{k|l}, \theta) = E(u_{mn}, \theta) \tag{2.5}$$

$$\eta(u_{k|l}, \theta) = H(u_{mn}, \theta), \qquad \psi(u_{k|l}, \theta) = \Psi(u_{mn}, \theta),$$

$$q^i(u_{k|l}, \theta, \theta_{|m}) = \frac{m}{M} Q^i(u_{mn}, \theta, \theta_{|r})$$

Здесь предполагается, что тензор конечных деформаций $u_{mn}$ выражен через градиенты перемещений $u_{k|l}$ при помощи последнего из соотношений (2.1). Выполнение принципа материальной независимости для функций $e$, $\eta$, $\psi$, $Q^i$, вводимых соотношениями (2.5), очевидно. Используя невырожденность матрицы $a^i_{\cdot k} = \delta^i_{\cdot k} + u^i_{\cdot|k}$ $(|a^i_{\cdot k}| = m/M)$, убеждаемся в выполнении этого принципа для тензора напряжений Коши $P^{ji}$:

$$P^{ji} = (M/m)p^{jl}b^i_{\cdot l} = T^{jk}a^l_{\cdot k}b^i_{\cdot l} = T^{ji}(u_{mn}, \theta)$$

В дальнейшем под соблюдением принципа материальной независимости будет пониматься выполнение соотношений (2.5).

Из классической термодинамики известно, что термодинамические потенциалы определены с точностью до прибавления некоторых функций температуры [3]. Симметричность тензора деформаций приводит к дополнительному произволу в выборе функций $T^{jk}$, $E$, $\Psi$, $H$, $Q^i$, хотя, конечно, все допустимые для данного материала представители функций $T^{jk}$, $Q^i$ должны совпадать на подмножестве $u_{mn} = u_{nm}$ (это же относится к производным функций $E$, $\Psi$, $H$). В связи с этим отметим следующие обстоятельства. Будем называть функции $A(u_{mn})$ и $B(u_{mn})$ совпадающими $(A \equiv B)$, если они неразличимы как функции девяти независимых аргументов $u_{mn}$; функции $A(u_{mn})$ и $B(u_{mn})$ равны $(A = B)$, если они принимают одинаковые значения при всех значениях аргументов, подчиненных условиям $u_{mn} = u_{nm}$.

В то время как производные совпадающих функций совпадают, производные равных функций по одному и тому же аргументу могут быть не равны, поскольку частная производная функции в некоторой точке множества $u_{mn}=u_{nm}$ существенно связана с поведением функции вне этого множества.

Легко проверить, однако, что симметризованные значения производных равных функций ($\partial T^{jk}/\partial u_{(mn)}\equiv {}^1/_2(\partial T^{jk}/\partial u_{mn}+\partial T^{jk}/\partial u_{nm})$ и т. д.) также равны между собой. Таким образом, в дифференциальных термодинамических соотношениях, куда входят лишь симметризованные значения производных, нет необходимости в уточнении, какая именно из равных функций выбрана.

Из соотношений (2.3), (2.5) следует

$$\frac{m}{M}T^{jk}(u_{mn},\theta)(\delta_k^l+u_{\cdot|k}^{l})=p^{jl}(u_{m|n},\theta)=m\frac{\partial\psi(u_{m|n},\theta)}{\partial u_{l|j}}=$$

$$=m\frac{\partial\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{kq}}a^{l}_{\cdot(k}\delta^{j}_{q)}=\frac{1}{2}m\left[\frac{\partial\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{kj}}+\frac{\partial\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{jk}}\right](\delta_k^l+u_{\cdot|k}^{l}) \tag{2.6}$$

При получении (2.6) были использованы соотношения

$$\frac{\partial u_{kq}}{\partial u_{l|j}}=\frac{1}{2}[\delta_q^j(\delta_k^l+u^l_{\cdot|k})+\delta_k^j(\delta_q^l+u^l_{\cdot|q})]=\delta^j_{(q}a^l_{\cdot k)},\qquad c^{kq}d^{lj}_{(kq)}=c^{(kq)}d^{lj}_{kq}$$

В силу невырожденности матрицы $a^{l}_{\cdot k}$ из (2.6) получаем

$$T^{ji}(u_{mn},\theta)=\frac{1}{2}M\left[\frac{\partial\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{ij}}+\frac{\partial\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{ji}}\right]=M\frac{\partial\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ij)}} \tag{2.7}$$

Поскольку в соотношении (2.6) независимыми переменными были $u_{k|l}$, то (2.7) устанавливает лишь равенство, но не совпадение соответствующих функций.

Нетрудно видеть, что для любой функции $\Psi(u_{mn},\theta)$ найдется равная ей $\Phi(u_{mn},\theta)$ и удовлетворяющая условиям

$$\partial\Phi(u_{mn},\theta)/\partial u_{ji}=\partial\Phi(u_{mn},\theta)/\partial u_{ij} \tag{2.8}$$

В качестве примера укажем функцию $\Phi\equiv\Psi[{}^1/_2(u_{mn}+u_{nm}),\theta]$. Поскольку симметризованные производные равных функций равны между собой, при помощи любой функции $\Phi$, равной $\Psi$ и удовлетворяющей условию (2.8), соотношение (2.7) приводится к виду [6]:

$$T^{ji}(u_{mn},\theta)=M\frac{\partial\Phi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ij)}}=M\frac{\partial\Phi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{ij}}=M\frac{\partial\Phi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{ji}} \tag{2.9}$$

Если вид свободной энергии уже фиксирован, то из всех равных функций, представляющих $T^{ji}$, удобно выбирать те функции $P^{ji}(u_{mn},\theta)$, которые удовлетворяют одному из условий (в зависимости от выполнения или невыполнения (2.8)):

$$\frac{1}{M}P^{ji}(u_{mn},\theta)\equiv\frac{\partial\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ij)}},\qquad \frac{1}{M}P^{ji}(u_{mn},\theta)\equiv\frac{\partial\Phi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{ji}} \tag{2.10}$$

Комбинируя соотношения (2.3)–(2.5), получаем

$$\eta(u_{k|l},\theta)=-\frac{\partial\psi(u_{k|l},\theta)}{\partial\theta}=-\frac{\partial\Psi(u_{kl},\theta)}{\partial\theta}=H(u_{kl},\theta)$$

$$c_u(u_{k|l},\theta)=\theta\frac{\partial\eta(u_{k|l},\theta)}{\partial\theta}=\theta\frac{\partial H(u_{kl},\theta)}{\partial\theta}=C_u(u_{kl},\theta) \tag{2.11}$$

**3.** В десятимерном пространстве параметров $u_{m|n}$, $\theta$ рассмотрим достаточно гладкую гиперповерхность $\chi(u_{m|n},\theta)=0$ и предположим, что функции, задающие тензор напряжений Пиолы — Кирхгофа $p^{ji}(u_{k|l},\theta)$ и плотность энтропии $\eta(u_{k|l},\theta)$, непрерывны на этой поверхности, а их первые производные, хотя и терпят разрыв на гиперповерхности, вне ее существуют и непрерывны; причем существуют конечные предельные значения этих производных при приближении к поверхности разрыва с каждой из сторон. В терминах свободной энергии $\psi(u_{k|l},\theta)$ это означает, что первые производные свободной энергии непрерывны на вышеуказанной гиперповерхности, а ее вторые производные непрерывны вне этой поверхности и имеют конечные предельные значения при приближении к ней с каждой из сторон. Такую особенность уравнений состояния будем определять как поверхность фазовых переходов второго рода, что находится в соответствии с определением Эренфеста [3]. Заметим, что существует точка зрения [7], согласно которой, фазовому переходу второго рода может соответствовать более сильная особенность термодинамических потенциалов.

Для скачков вторых производных свободной энергии на указанной гиперповерхности должны выполняться соотношения совместности [8]:

$$\begin{aligned}
\Delta\frac{\partial^2\psi(u_{m|n},\theta)}{\partial u_{i|j}\,\partial u_{k|l}}&=h\frac{\partial\chi(u_{m|n},\theta)}{\partial u_{i|j}}\frac{\partial\chi(u_{m|n},\theta)}{\partial u_{k|l}}\\
\Delta\frac{\partial^2\psi(u_{m|n},\theta)}{\partial u_{i|j}\,\partial\theta}&=h\frac{\partial\chi(u_{m|n},\theta)}{\partial u_{i|j}}\frac{\partial\chi(u_{m|n},\theta)}{\partial\theta}\\
\Delta\frac{\partial^2\psi(u_{m|n},\theta)}{\partial\theta^2}&=h\frac{\partial\chi(u_{m|n},\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\chi(u_{m|n},\theta)}{\partial\theta}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Хотя в [8] явно оговаривается непрерывность самой функции $\psi$ на сингулярной поверхности, нетрудно заметить, что при выводе соотношений типа (3.1) фактически используется лишь непрерывность первых производных.

Из соотношений (3.1) немедленно вытекает

$$\Delta\frac{\partial^2\psi(u_{m|n},\theta)}{\partial u_{i|j}\,\partial u_{k|l}}\Delta\frac{\partial^2\psi(u_{m|n},\theta)}{\partial\theta^2}=\Delta\frac{\partial^2\psi(u_{m|n},\theta)}{\partial u_{i|j}\,\partial\theta}\Delta\frac{\partial^2\psi(u_{m|n},\theta)}{\partial u_{k|l}\,\partial\theta} \tag{3.2}$$

Используя (2.3), (2.4), приводим (3.2) к виду

$$\Delta\frac{\partial p^{ji}(u_{m|n},\theta)}{\partial u_{k|l}}\Delta c_u(u_{m|n},\theta)=-\frac{\theta}{m}\Delta\frac{\partial p^{ji}(u_{m|n},\theta)}{\partial\theta}\Delta\frac{\partial p^{lk}(u_{m|n},\theta)}{\partial\theta} \tag{3.3}$$

Если принять принцип материальной независимости в форме (2.5), то из (3.2), (3.3) вытекают следующие соотношения:

$$\Delta\frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ij)}\,\partial u_{(kl)}}\Delta\frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial\theta^2}=\Delta\frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ij)}\,\partial\theta}\Delta\frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(kl)}\,\partial\theta} \tag{3.4}$$

$$\Delta\frac{\partial P^{ij}(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(kl)}}\Delta C_u(u_{mn},\theta)=-\frac{\theta}{M}\Delta\frac{\partial P^{ij}(u_{mn},\theta)}{\partial\theta}\Delta\frac{\partial P^{kl}(u_{mn},\theta)}{\partial\theta} \tag{3.5}$$

**4.** Соотношения (3.2) — (3.5) аналогичны соотношению (1.2), характеризующему фазовый переход второго рода в идеальной жидкости. Покажем, что в случае идеальной жидкости выполнение всех этих связей эквивалентно выполнению единственного соотношения (1.2).

Модель идеальной жидкости фиксируется выбором свободной энергии в форме $\Psi(u_{mn}, \theta)=\varphi(v, \theta)$, где $v=1/M$ — удельный объем жидкости ($v_0=1/m$ — удельный объем жидкости в исходной конфигурации); зависимость от тензора конечных деформаций осуществляется в силу соотношений

$$v=v_0\frac{m}{M}=v_0\sqrt{\frac{X}{x}}=v_0\left[\frac{1}{6}x^{ijk}x^{pqr}X_{ip}X_{jq}X_{kr}\right]^{1/2}, \qquad X_{ip}=x_{ip}+2u_{ip} \quad (4.1)$$

Из соотношений (2.11), (4.1) находим

$$\frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial\theta^2}=-\frac{C_u(u_{mn},\theta)}{\theta}=\frac{\partial^2\varphi(v,\theta)}{\partial\theta^2}=-\frac{c_v(v,\theta)}{\theta} \qquad (4.2)$$

где $c_v$ — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Из соотношений (1.5), (2.3), (4.1) следует

$$\frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ij)}\partial\theta}=\frac{\partial^2\varphi(v,\theta)}{\partial v\,\partial\theta}vX^{ij}=-\frac{\partial p(v,\theta)}{\partial\theta}vX^{ij}=-\frac{\alpha v}{\beta}X^{ij} \qquad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ij)}\,\partial u_{(kl)}}=-\left[\frac{\partial p(v,\theta)}{\partial v}v+p\right]vX^{ij}X^{kl}+pv(X^{ik}X^{jl}+X^{il}X^{jk})=$$

$$=v(1/\beta-p)X^{ij}X^{kl}+pv(X^{ik}X^{jl}+X^{il}X^{jk}-X^{ij}X^{kl})$$

Здесь величину $p(v, \theta)=-\partial\varphi(v, \theta)/\partial v$ следует отождествить с давлением идеальной жидкости, поскольку

$$P^{ji}(u_{mn},\theta)=M\frac{\partial\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ij)}}=\frac{\partial\varphi(v,\theta)}{\partial v}X^{ij}$$

Подставляя соотношения (4.2), (4.3) в (3.4), получаем

$$\Delta\frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ij)}\,\partial u_{(kl)}}\Delta\frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial\theta^2}-\Delta\frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ij)}\,\partial\theta}\Delta\frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(kl)}\,\partial\theta}=$$

$$=-\frac{v}{\theta}\left[\Delta\frac{1}{\beta}\Delta c_v+\theta v\left(\Delta\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right]X^{ij}X^{kl} \qquad (4.4)$$

Из (4.4) немедленно вытекает эквивалентность (1.2), (1.4), (3.4). Эквивалентность соотношений (3.2)—(3.5) в рассматриваемом случае очевидна.

5. Простые изотропные нелинейно-упругие среды характеризуются свободной энергией $\Psi$ следующего вида [4, 6]:

$$\Psi(u_{kl},\theta)=\varphi(J_1, J_2, J_3, \theta), \qquad J_1={}^1/_2x^{mnp}x^{qrs}x_{mq}x_{nr}X_{ps}$$

$$J_2={}^1/_2x^{mnp}x^{qrs}x_{mq}X_{nr}X_{ps}, \qquad J_3={}^1/_2x^{mnp}x^{qrs}X_{mq}X_{nr}X_{ps}, \qquad X_{ps}=x_{ps}+2u_{ps} \qquad (5.1)$$

Нетрудно убедиться, что справедливы следующие соотношения для симметризованных производных главных инвариантов $J_1$, $J_2$, $J_3$:

$$J_1^{(ij)}=\frac{\partial J_1}{\partial u_{(ij)}}=2x^{ij}, \qquad J_2^{(ij)}=\frac{\partial J_2}{\partial u_{(ij)}}=2(x^{ij}\chi_p{}^p-\chi^{ij}) \qquad (5.2)$$

$$J_3^{(ij)}=\frac{\partial J_3}{\partial u_{(ij)}}=x^{ij}\chi_{\cdot p}^{p}\chi_{\cdot s}^{s}-x^{ij}\chi_{\cdot s}^{p}\chi_{\cdot p}^{s}+2\chi^{pi}\chi_{\cdot p}^{j}-2\chi^{ij}\chi_{\cdot p}^{p},$$

$$J_1^{(ij)(kl)}=\frac{\partial^2 J_1}{\partial u_{(ij)}\partial u_{(kl)}}=0,\qquad J_2^{(ij)(kl)}=\frac{\partial^2 J_2}{\partial u_{(ij)}\partial u_{(kl)}}=2(2x^{ij}x^{kl}-x^{ik}x^{jl}-x^{il}x^{jk})$$

$$J_3^{(ij)(kl)}=\frac{\partial^2 J_3}{\partial u_{(ij)}\partial u_{(kl)}}=2(2x^{ij}x^{kl}\chi^{p}_{\cdot p}-2x^{ij}\chi^{kl}-2x^{kl}\chi^{ij}+$$

$$+x^{kj}\chi^{il}+x^{jl}\chi^{ik}+x^{il}\chi^{jk}+x^{ik}\chi^{jl}-x^{kj}x^{il}\chi^{p}_{\cdot p}-x^{lj}x^{ik}\chi^{p}_{\cdot p})$$

$$\chi^{i}_{\cdot k}=x^{il}X_{lk},\qquad \chi^{ik}=x^{im}x^{kn}X_{mn}$$

Комбинируя (5.1) с (5.2), получаем

$$\frac{\partial\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ij)}}=\frac{\partial\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_1}J_1^{(ij)}+\frac{\partial\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_2}J_2^{(ij)}+\frac{\partial\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_3}J_3^{(ij)}\tag{5.3}$$

$$\frac{\partial\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial\theta}=\frac{\partial\varphi(J_T,\theta)}{\partial\theta},\qquad \frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ij)}\partial\theta}=\frac{\partial^2\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_1\partial\theta}J_1^{(ij)}+$$

$$+\frac{\partial^2\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_2\partial\theta}J_2^{(ij)}+\frac{\partial^2\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_3\partial\theta}J_3^{(ij)},\qquad \frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ij)}\partial u_{(kl)}}=$$

$$=\left[\frac{\partial^2\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_1\partial J_1}J_1^{(kl)}+\frac{\partial^2\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_1\partial J_2}J_2^{(kl)}+\frac{\partial^2\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_1\partial J_3}J_3^{(kl)}\right]J_1^{(ij)}+$$

$$+\left[\frac{\partial^2\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_2\partial J_1}J_1^{(kl)}+\frac{\partial^2\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_2\partial J_2}J_2^{(kl)}+\frac{\partial^2\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_2\partial J_3}J_3^{(kl)}\right]J_2^{(ij)}+$$

$$+\left[\frac{\partial^2\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_3\partial J_1}J_1^{(kl)}+\frac{\partial^2\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_3\partial J_1}J_1^{(kl)}+\frac{\partial^2\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_3\partial J_2}J_2^{(kl)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_3\partial J_3}J_3^{(kl)}\right]J_3^{(ij)}+\frac{\partial\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_1}J_1^{(ij)(kl)}+\frac{\partial\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_2}J_2^{(ij)(kl)}+$$

$$+\frac{\partial\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_3}J_3^{(ij)(kl)}$$

Собственные значения и соответствующие им собственные векторы линейной однородной системы $(X_{ij}-\Lambda^2x_{ij})a^j=0$ дают три экстремальных квадрата удлинений $\Lambda_1^2$, $\Lambda_2^2$, $\Lambda_3^2$ и три соответствующие им взаимно перпендикулярных (в исходной и актуальной конфигурациях) материальных волокна. Из формул Виета вытекают известные соотношения

$$J_1=\Lambda_1^2+\Lambda_2^2+\Lambda_3^2,\quad J_2=\Lambda_1^2\Lambda_2^2+\Lambda_2^2\Lambda_3^2+\Lambda_3^2\Lambda_1^2,\quad J_3=\Lambda_1^2\Lambda_2^2\Lambda_3^2\tag{5.4}$$

В исходной конфигурации выберем декартову систему лагранжевых координат, орты которой направлены вдоль главных удлинений. В такой системе координат метрические тензоры описываются матрицами

$$\|x_{ij}\|=\|x^{ij}\|=\begin{Vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Vmatrix}\tag{5.5}$$

$$\|X_{ij}\|=\|\chi^{i}_{\cdot j}\|=\|\chi^{ij}\|=\begin{Vmatrix}\Lambda_1^2&0&0\\0&\Lambda_2^2&0\\0&0&\Lambda_3^2\end{Vmatrix}$$

Из соотношений (5.2)–(5.5) находим

$$\frac{\partial\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(11)}}=2\frac{\partial\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_1}+2\frac{\partial\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_2}(\Lambda_2^2+\Lambda_3^2)+$$

$$+2\frac{\partial\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_3}\Lambda_2^2\Lambda_3^2=2\frac{\partial\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_1}\frac{\partial J_1}{\partial\Lambda_1^2}+2\frac{\partial\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial\Lambda_1^2}+\tag{5.6}$$

$$+2\frac{\partial\varphi(J_T,\theta)}{\partial J_3}\frac{\partial J_3}{\partial\Lambda_1^2}=2\frac{\partial\varepsilon(\Lambda_M^2,\theta)}{\partial\Lambda_1^2}$$

$$\frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(11)}\partial u_{(22)}}=4\Bigg[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial J_1^2}\frac{\partial J_1}{\partial\Lambda_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial J_1\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial\Lambda_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial J_1\partial J_3}\frac{\partial J_3}{\partial\Lambda_2^2}\right)\frac{\partial J_1}{\partial\Lambda_1^2}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial J_2\partial J_1}\frac{\partial J_1}{\partial\Lambda_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial J_2^2}\frac{\partial J_2}{\partial\Lambda_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial J_2\partial J_3}\frac{\partial J_3}{\partial\Lambda_2^2}\right)\frac{\partial J_2}{\partial\Lambda_1^2}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial J_3\partial J_1}\frac{\partial J_1}{\partial\Lambda_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial J_3\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial\Lambda_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial J_3^2}\frac{\partial J_3}{\partial\Lambda_2^2}\right)\frac{\partial J_3}{\partial\Lambda_1^2}+$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial J_2}\frac{\partial^2 J_2}{\partial\Lambda_1^2\partial\Lambda_2^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial J_3}\frac{\partial^2 J_3}{\partial\Lambda_1^2\partial\Lambda_2^2}\Bigg]=4\frac{\partial\varepsilon(\Lambda_M^2,\theta)}{\partial\Lambda_1^2\partial\Lambda_2^2}$$

В соотношениях (5.6) $\varepsilon(\Lambda_M^2,\theta)$ — функция, задающая свободную энергию изотропного упругого тела в зависимости от температуры и квадратов главных удлинений: $\varepsilon(\Lambda_M^2,\theta)=\varphi(J_T,\theta)$ при $J_T$ $(T=1, 2, 3)$, определяемых (5.4).

Вычисления, аналогичные (5.6), приводят к соотношениям

$$\frac{\partial\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ii)}}=2\frac{\partial\varepsilon(\Lambda_M^2,\theta)}{\partial\Lambda_i^2},\quad \frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ii)}\partial\theta}=2\frac{\partial^2\varepsilon(\Lambda_M^2,\theta)}{\partial\Lambda_i^2\partial\theta}\tag{5.7}$$

$$\frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ii)}\partial u_{(jj)}}=4\frac{\partial^2\varepsilon(\Lambda_M^2,\theta)}{\partial\Lambda_i^2\partial\Lambda_j^2}$$

$$\frac{\partial\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ij)}}=0,\quad \frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ij)}\partial\theta}=0\quad\text{при}\quad i\neq j\tag{5.8}$$

$$\frac{\partial^2\Psi(u_{mn},\theta)}{\partial u_{(ij)}\partial u_{(kl)}}=0\quad\text{при}\quad i\neq j,\ \text{либо}\ k\neq l$$

В соотношениях (5.7) нет суммирования по повторяющимся индексам.

Из первого соотношения в (5.7) и непрерывности первых производных $\Psi(u_{mn},\theta)$ вытекает непрерывность первых производных функции $\varepsilon(\Lambda_M^2,\theta)$ при фазовых переходах второго рода в изотропном упругом теле. Из второго и третьего соотношения (5.7), а также (5.8) следует, что в рассматриваемом случае в совокупности соотношений (3.4) имеется не более шести существенных

$$\Delta\frac{\partial^2\varepsilon(\Lambda_M^2,\theta)}{\partial\Lambda_i^2\partial\Lambda_j^2}\Delta\frac{\partial^2\varepsilon(\Lambda_M^2,\theta)}{\partial\theta^2}=\Delta\frac{\partial^2\varepsilon(\Lambda_M^2,\theta)}{\partial\Lambda_i^2\partial\theta}\Delta\frac{\partial^2\varepsilon(\Lambda_M^2\ \theta)}{\partial\Lambda_j^2\partial\theta}$$

Можно показать, что фазовый переход второго рода в изотропном упругом теле в случае гидростатического напряженного состояния и сохранения изотропности в новой фазе описывается двумя независимыми соотношениями: одно из них (для модуля объемного сжатия) совершенно аналогично (1.2), второе показывает, что при таком фазовом переходе либо модуль сдвига, либо теплоемкость при постоянном объеме не изменяются.

Рассмотрим абстрактную термодинамическую систему с обобщенными координатами $z^i$, обобщенными силами $Z_i$ и свободной энергией $\psi(z^i,\theta)$. Поверхность фазовых переходов второго рода определим как гиперповерхность в пространстве $z^i$, $\theta-\omega(z^i, \theta)=0$, на которой первые производные свободной энергии непрерывны, а вторые испытывают правильный разрыв (т. е. такой разрыв, что выполняются условия применимости леммы Адамара [8]). Для скачков вторых производных в этом случае справедливы соотношения совместности

$$\Delta\frac{\partial^2\psi(z,\theta)}{\partial z^i\partial z^j}=\pi\frac{\partial\omega(z,\theta)}{\partial z^i}\frac{\partial\omega(z,\theta)}{\partial z^j}\qquad(5.9)$$

$$\Delta\frac{\partial^2\psi(z,\theta)}{\partial z^i\partial\theta^j}=\pi\frac{\partial\omega(z,\theta)}{\partial z^i}\frac{\partial\omega(z,\theta)}{\partial\theta}$$

$$\Delta\frac{\partial^2\psi(z,\theta)}{\partial\theta^2}=\pi\frac{\partial\omega(z,\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\omega(z,\theta)}{\partial\theta}$$

Комбинируя соотношения (5.9), получаем

$$\Delta\frac{\partial^2\psi(z,\theta)}{\partial z^i\partial z^j}\Delta\frac{\partial^2\psi(z,\theta)}{\partial\theta^2}=\Delta\frac{\partial^2\psi(z,\theta)}{\partial z^i\partial\theta}\Delta\frac{\partial^2\psi(z,\theta)}{\partial z^j\partial\theta}$$

или

$$\Delta\frac{\partial Z_i(z,\theta)}{\partial z^j}\Delta c_z=-\theta\Delta\frac{\partial Z_i(z,\theta)}{\partial\theta}\Delta\frac{\partial Z_j(z,\theta)}{\partial\theta}\qquad(5.10)$$

Отметим, что другие подходы к изучению фазовых переходов второго рода в абстрактных термодинамических системах были развиты в [9—11]. В частности, из формул, полученных в [9], могут быть выведены некоторые из соотношений (5.10) (а именно те, которым соответствуют совпадающие значения индексов $i=j$).

Автор выражает признательность В. Л. Бердичевскому, А. О. Глико и А. А. Мовчану за полезные обсуждения и ценные библиографические сведения.

Поступила 6 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Varley E., Day A.* Equilibrium phases of elastic materials at uniform temperature. Arch. Ration. Mech. and Analys., 1966, vol. 22, No. 4.
2. *Murdoch A. I.* On phase transition of elastic continua. Appl. Math. and Phys., 1977, Bd 28, H. 4.
3. *Леонтович М. А.* Введение в термодинамику. М., Гостехиздат, 1952.
4. *Трусделл К. А.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., «Мир», 1975.
5. *Коссера Э., Коссера Ф.* Заметка о теории эвклидовского действия. В кн.: *Аппелль П.* Руководство теоретической (рациональной) механики, т. 3. Равновесие и движение сплошных средин. М., И. Н. Кушнер и К°, 1911.
6. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика, т. 5. Статистическая физика. М., «Наука», 1964.
8. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 4. М., Гостехиздат, 1958.
9. *Семенченко В. К.* Фазовые переходы II рода и критические явления. Ж. физ. хим., 1947, т. 21, № 12.
10. *Borghesani R.* Second order phase equilibrium for cassical bodies. Pubbl. Inst. Mat. Univ. Gen., 1972, No. 36.
11. *Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П.* Основы кристаллофизики. М., «Наука», 1975.