

## ПРИНЦИП ПООЧЕРЕДНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ В ЗАДАЧЕ О КОНТАКТЕ СООСНЫХ ЦИЛИНДРОВ

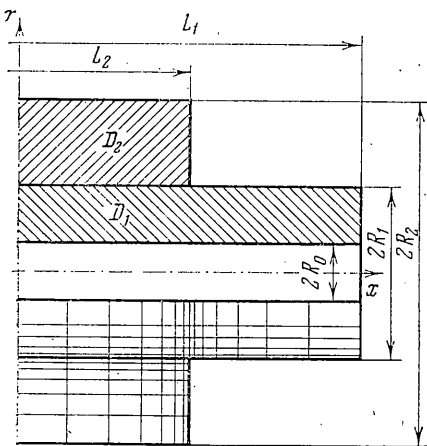
В. К. ПОГОДИН, Л. Б. ЦВИК

(Иркутск)

Известно, что широкое распространение ЭВМ при решении задач механики деформируемого составного тела требует разработки простых и универсальных алгоритмов. Ниже исследуется один из подходов [1], в котором задача о сопряжении решений в системе соприкасающихся тел сводится к последовательности краевых задач для отдельных контактирующих подобластей. При наличии универсальной программы для ЭВМ, позволяющей численно (например при помощи метода конечных элементов или метода интегральных уравнений) решать задачи для отдельного тела, такой подход позволяет углубить стандартизацию алгоритмов расчета состояния составной конструкции, исключить из алгоритма этап построения и решения уравнений, вытекающих из условий сопряжения подобластей, снизить требования к оперативной памяти используемых ЭВМ. Итерационный характер предлагаемого подхода позволяет рассматривать сложные (в том числе с возможным отставанием) условия соприкасания подобластей.

При построении процесса решения используются невязки сопряжения усилий и перемещений на поверхности соприкасания. Статические и кинематические условия сопряжения выполняются в процессе итераций поочередно. Анализ соотношения интегральных характеристик жесткости сопрягаемых тел позволяет обосновать сходимость предложенного процесса и оценить ее быстроту.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим для простоты осесимметричную задачу о соединении с натягом двух соосных цилиндров (фиг. 1). Пусть  $D_1$  означает внутренний цилиндр,  $D_2$  — наружный цилиндр,  $S_i$ ,  $i=1, 2$  — граничные поверхности цилиндров,  $S$  — поверхность возможного соприкасания цилиндров. Поверхности  $S_i$  —  $S$  обозначим  $S_i'$ . Предполагается, что силы трения на поверхности контакта отсутствуют, радиальный натяг соприкасающихся поверхностей составляет величину  $d$  и что условия взаимосвязи цилиндров допускают беспрепятственное отставание соприкасающихся поверхностей. Для постановки задачи используются цилиндрические координаты. В каждом из цилиндров напряженное состояние описывается уравнениями теории упругости



Фиг. 1

мещений,  $\lambda$  и  $\mu$  — постоянные модули упругости, одинаковые для обоих цилиндров. На поверхности  $S$  условия соприкасания цилиндров описыва-

$$Lu = (\lambda + \mu) \text{grad div } u + \mu \Delta u = 0$$

(1.1)

где  $u$  — неизвестный вектор перемещений,  $\lambda$  и  $\mu$  — постоянные модули упругости, одинаковые для обоих цилиндров. На поверхности  $S$  условия соприкасания цилиндров описыва-

ются системой равенств и неравенств [2]:

$$u_r|_{s_-} - u_r|_{s_+} - d = 0, \quad \sigma_r|_{s_+} = \sigma_r|_{s_-} \leq 0 \quad (1.2)$$

$$u_r|_{s_-} - u_r|_{s_+} - d \geq 0, \quad \sigma_r|_{s_+} = \sigma_r|_{s_-} = 0 \quad (1.3)$$

причем заранее неизвестно в каких точках поверхности имеет место контакт (условия (1.2)), а в каких отставание (условия 1.3); здесь  $S_+$  и  $S_-$  указывают на принадлежность величин к  $D_1$  и  $D_2$ ,  $u_r$  — радиальные перемещения,  $\sigma_r$  — радиальные напряжения. Касательные напряжения на поверхности  $S$  подчиняются условиям

$$\tau_{xy}|_{s_+} = \tau_{xy}|_{s_-} = 0 \quad (1.4)$$

Вне поверхностей  $S_+$  и  $S_-$  внешние воздействия на тела  $D_1$  и  $D_2$  отсутствуют, что соответствует равенствам

$$\mathbf{p}|_{s_i'} = 0 \quad (i=1,2) \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{p}|_{s_i'}$  — вектор напряжений на поверхности  $S_i'$ . Сформулированная задача (1.1) — (1.5) рассматривалась в работах [3–6] и является достаточно трудной для аналитических методов.

**2. Метод решения.** Для построения решения задачи (1.1) — (1.5) используется метод последовательных приближений. На каждом шагу приближение строится как результат независимого решения уравнений (1.1) для каждого из тел  $D_i$  при некоторых краевых условиях на  $S_i$ . Развитие численных методов решения задач о деформированном состоянии отдельного тела, а также однотипность шагов метода последовательных приближений делают такой подход удобным для реализации на ЭВМ.

Пусть  $\mathbf{u}'$  — некоторое приближение, удовлетворяющее уравнению (1.1) в каждой из областей  $D_1$  и  $D_2$ , краевым условиям (1.4), (1.5), но не обязательно удовлетворяющее условиям сопряжения (1.2), (1.3). Назовем невязкой сопряжения перемещений и невязкой сопряжения сил соответственно величины

$$\delta u_r' = u_r'|_{s_-} - u_r'|_{s_+} - d, \quad \delta \sigma_r' = \sigma_r'|_{s_-} - \sigma_r'|_{s_+} \quad (2.1)$$

где напряжения  $\sigma_r'$  в каждом из тел соответствуют приближению вектора перемещений  $\mathbf{u}'$ .

Последовательность приближений  $\mathbf{u}^n$ , сходящаяся к искомому решению задачи (1.1) — (1.5), строится следующим образом. Все векторы  $\mathbf{u}^n$ , как и векторы  $\mathbf{u}'$ , удовлетворяют в каждой из областей  $D_i$  уравнению (1.1) и краевым условиям (1.4) — (1.5). Зададим на поверхности  $S$  некоторое нулевое приближение перемещений  $u_r^0|_{s_+} = u_r^0|_{s_-} - d$  и определим, решая соответствующие краевые задачи для тел  $D_i$ , величины  $\sigma_r^0|_{s_+}$ ,  $\sigma_r^0|_{s_-}$ . Далее при всех нечетных  $n$  итерационное приближение краевых сил определяется равенствами

$$\sigma_r^{2h+1}|_{s_+} = \sigma_r^{2h+1}|_{s_-} = \sigma_r^{2h}|_{s_+} + \alpha^{2h} \delta \sigma_r^{2h} \quad (h=1,2,\dots) \quad (2.2)$$

где  $\alpha^n$  — величины, определение которых описано ниже. И в точках контакта поверхностей  $S_+$ ,  $S_-$  и в точках их отставания величины  $\sigma_r|_S$  должны удовлетворять неравенству  $\sigma_r|_S \leq 0$ . Может оказаться, что в некоторых точках поверхности  $S$  величины  $\sigma_r^{2h+1}|_{s_+} = \sigma_r^{2h+1}|_{s_-}$ , определенные по формулам (2.2), положительны. Для этих точек соотношение (2.2) следует заменить равенством  $\sigma_r^{2h+1}|_{s_+} = \sigma_r^{2h+1}|_{s_-} = 0$ . По построенным таким об-

разом крайвым воздействиям можно, решая соответствующие крайвые задачи для тел  $D_i$ , определить величины  $u_r^{2k+1}|_{s_+}$ ,  $u_r^{2k+1}|_{s_-}$ . Переход к приближению с четным номером осуществляется при помощи невязок  $\delta u_r^{2k+1}$ . В точках, в которых построенное приближение удовлетворяет условиям отставания ( $\delta u_r^{2k+1} \geq 0$ ,  $\sigma_r^{2k+1}|_{s=0}$ ) крайвые воздействия определяются равенством

$$\sigma_r^{2k+2}|_{s_+} = \sigma_r^{2k+2}|_{s_-} = 0$$

В остальных точках эти воздействия задаются формулами

$$u_r^{2k+2}|_{s_+} = u_r^{2k+2}|_{s_-} - d = u_r^{2k+1}|_{s_+} + \alpha^{2k+1} \delta u_r^{2k+1} \quad (h=0,1,\dots) \quad (2.3)$$

Сущность описанного процесса заключается в поочередном выполнении статических и кинематических условий сопряжений в точках контакта соприкасающихся тел. Ниже показано, что значения параметров

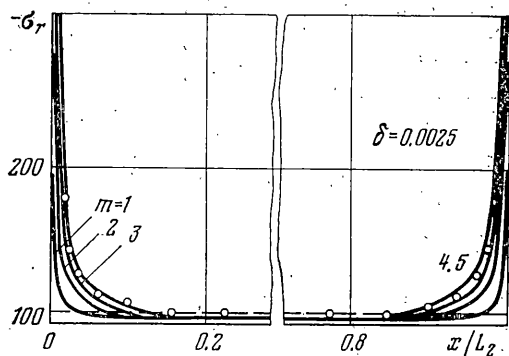
$\alpha_*^{2k+1}$ ,  $\alpha_*^{2k+2}$ , обуславливающие наиболее быструю сходимость процес-

са, удовлетворяют соотношениям  $\alpha_*^{2k+1} + \alpha_*^{2k+2} = 1$ ,  $\alpha_*^{2k+1}, \alpha_*^{2k+2} \geq 0$ ,

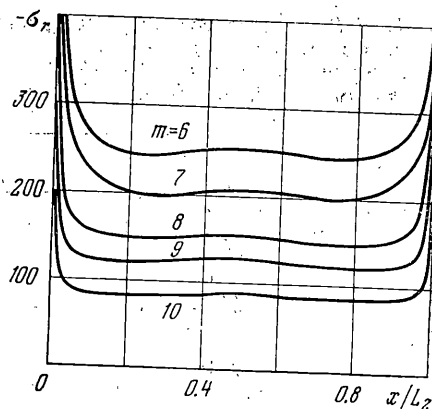
и что возможны стационарные сходящиеся процессы, в которых  $\alpha^{2k-1} = 1 - \alpha^{2k-2} = \alpha$ . При этом невязки процесса  $\delta r^{2k}$  убывают со скоростью некоторой геометрической прогрессии. Оптимальное (в смысле быстроты сходимости) значение параметра  $\alpha_*$  близко к нулю, либо к единице в зависимости от соотношения интегральных характеристик жесткости тел  $D_1$  и  $D_2$ , а также от нумерации тел. Смысл параметра  $\alpha$  следующий. В нечетном приближении поверхности  $S_+$  и  $S_-$  могут не совпадать. В следующем приближении совмещенные поверхности  $S_+$  и  $S_-$  займут некоторое промежуточное положение, определяемое величиной  $\alpha$ . Оптимальное значение  $\alpha_*$  легко подбирается в процессе счета по поведению невязок процесса. Более точные оценки оптимального значения  $\alpha$  приведены ниже.

| $m$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $l_1$ | $l_2$ | $\delta$ | $\alpha_*$ |
|-----|-----------|-----------|-------|-------|----------|------------|
| 1   | 0         | 2         | 1.01  | 1     | 0.0025   | 0.800      |
| 2   | 0         | 2         | 1.06  | 1     | 0.0025   | 0.800      |
| 3   | 0         | 2         | 1.14  | 1     | 0.0025   | 0.800      |
| 4   | 0         | 2         | 1.20  | 1     | 0.0025   | 0.800      |
| 5   | 0         | 2         | 2.00  | 1     | 0.0025   | 0.800      |
| 6   | 0         | 3.00      | 3     | 2     | 0.0050   | 0.860      |
| 7   | 0         | 2.00      | 3     | 2     | 0.0050   | 0.800      |
| 8   | 0         | 1.50      | 3     | 2     | 0.0050   | 0.760      |
| 9   | 0         | 1.35      | 3     | 2     | 0.0050   | 0.710      |
| 10  | 0         | 1.20      | 3     | 2     | 0.0050   | 0.650      |
| 11  | 0.800     | 2.00      | 3     | 2     | 0.0050   | 0.200      |
| 12  | 0.900     | 2.00      | 3     | 2     | 0.0050   | 0.150      |
| 13  | 0.930     | 2.00      | 3     | 2     | 0.0050   | 0.130      |
| 14  | 0.950     | 2.00      | 3     | 2     | 0.0050   | 0.115      |
| 15  | 0.980     | 2.00      | 3     | 2     | 0.0050   | 0.060      |
| 16  | 0.985     | 2.00      | 3     | 2     | 0.0050   | 0.020      |
| 17  | 0.988     | 2.00      | 3     | 2     | 0.0050   | 0.017      |
| 18  | 0.994     | 2.00      | 3     | 2     | 0.0050   | 0.013      |

3. *Примеры.* Размеры цилиндров, рассмотренных в данной работе, приведены ниже ( $m$  — номер варианта). Для всех вариантов  $R_1 = 100$  мм; прочие размеры ци-



Фиг. 2



Фиг. 3

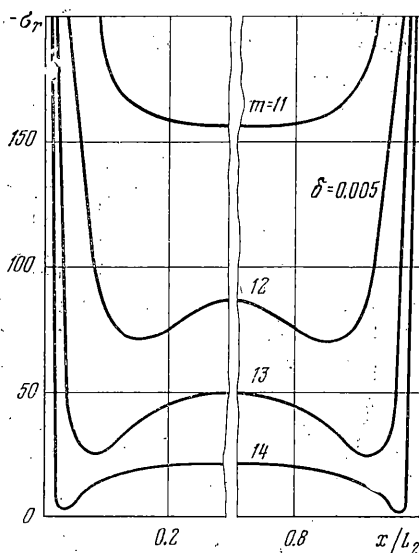
линдров (фиг. 1) определяются соотношениями:  $\beta_1=R_0/R_1$ ,  $\beta_2=R_2/R_1$ ,  $l_1=L_1/R_1$ ,  $l_2=L_2/R_1$ ,  $\delta=d/R_1$ . Величины  $\alpha$ , при которых процесс сходился с наибольшей быстротой, обозначаются  $\alpha_*$  и приведены в таблице.

Расчет осесимметричных полей упругих напряжений и перемещений в каждом из цилиндров осуществлялся с использованием метода конечных элементов [7]. В продольном сечении стенки каждого из цилиндров наносилась прямоугольная конечноэлементная сетка. Как и в работе [4] длина участка контакта вдоль оси делилась на 10–12 отрезков. В радиальном направлении стенка цилиндра разбивалась на десять ячеек. Размеры ячеек сгущались по закону геометрической прогрессии со знаменателем 1.3–1.6. В радиальном направлении ячейки сетки уменьшались к поверхности контакта, в осевом – к границе контакта. Такая структура конечноэлементной сетки позволяет легко автоматизировать подготовку исходных данных, необходимых для работы программы и повысить точность расчета.

При величине  $\alpha=0.8-0.9$  сходимость в вариантах 1–10 была наиболее быстрой и после 12 шагов приближения метода практически повторялись. Для вариантов 11–15 оптимальное значение  $\alpha$  равно 0.02–0.1. В нулевом приближении контактные давления полагались равными нулю. По окончании процесса во всех точках контакта относительные невязки сопряжения перемещений не превышали величины 0.01.

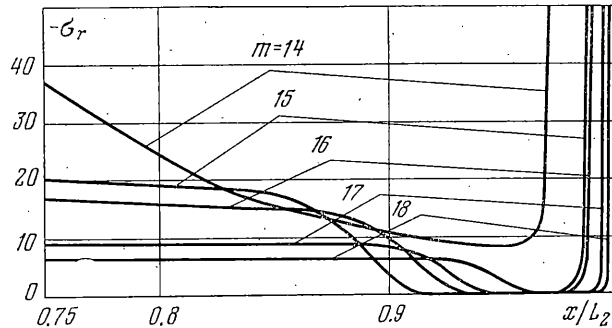
Эпюры распределения контактных давлений (в мегапаскалях), соответствующие вариантам 1–18, приведены на фиг. 2–5 ( $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0.33$ ). На фиг. 2 светлыми точками отмечено решение [5] для вала бесконечной длины, пунктирная прямая соответствует решению задачи Ламе. В вариантах 1–5 относительная длина вала  $l_1$  изменялась от 1.01 до 2. Полученные результаты показывают, что значения давлений в пятом варианте практически совпадают с данными [5]. При  $l=1.2$  сплошной вал может уже рассматриваться как бесконечно длинный. При равной длине цилиндров  $D_1$  и  $D_2$  решение совпадало с известным решением Ламе. В вариантах 6–10 изменялась толстостенность цилиндра  $D_2$  при неизменных размерах цилиндра  $D_1$ . В вариантах 11–18 изменялась толстостенность цилиндра  $D_1$  при неизменных размерах цилиндра  $D_2$ . С увеличением значения  $\beta_1$  до 0.980–0.982 минимальная величина контактного давления приближается к нулю и при дальнейшем уменьшении толстостенности внутреннего цилиндра будет наблюдаться частичное отставание соприкасающихся поверхностей.

Аналогичное явление отмечалось в работе [6] при анализе рассматриваемой задачи с позиций теории оболочек. Для учета возможности отставания поверхностей



Фиг. 4

$S_+$  и  $S_-$  в процессе итераций необходимо в каждом приближении анализировать знак контактного давления и взаиморасположение поверхностей  $S_+$  и  $S_-$  [8, 10]. Условия сопряжения (1.2)–(1.3) корректируются в соответствии со способом, описанным в п. 2. Эпюры контактных давлений для  $\beta_1$ , равного 0.980–0.994, приведены



Фиг. 5

на фиг. 5. Полученные результаты показывают, что при увеличении величины  $\beta_1$  участки отставания соприкасающихся поверхностей локализируются вблизи концов наружного цилиндра, длина их уменьшается, а сами участки отставания смещаются к угловой точке контакта. Такое изменение размеров и положения участков отставания связано с уменьшением зоны краевого эффекта при уменьшении толстостенности внутреннего цилиндра.

**4. Обоснование метода.** Рассмотрим для простоты задачу о полном сопряжении (сцеплении) двух упругих тел, соединенных без натяга. Схематически сечение таких тел изображено на фиг. 6. Уравнения (1.1) будем при этом решать в составной области  $D_1 + D_2$  при условиях

$$\mathbf{u}|_{S_i'} = \Phi_i \quad (i=1, 2) \quad (4.1)$$

где  $\Phi$  — произвольные, регулярные на  $S_1' + S_2'$ , заданные перемещения.

Пусть  $\mathbf{u}'$  — приближенное решение, определенное в  $D_1 + D_2$ ,  $\mathbf{p}'|_S$  — соответствующий вектор напряжений. Невязкой сопряжения перемещений назовем величину

$$\delta \mathbf{u}' = \mathbf{u}'|_{S_-} - \mathbf{u}'|_{S_+} \quad (4.2)$$

Аналогично определим невязку сопряжения сил

$$\delta \mathbf{p}' = \mathbf{p}'|_{S_-} - \mathbf{p}'|_{S_+} \quad (4.3)$$

Последовательность  $\mathbf{u}^n$  ( $n=1, 2, \dots$ ), сходящаяся к решению, будем строить следующим образом. Все приближения непрерывны со своими производными в  $D_1$  и в  $D_2$  и удовлетворяют в них уравнениям (1.1) и условиям (4.1), т. е. в каждой из подобластей приближение  $\mathbf{u}^n$  определяется расчетом состояния соответствующего тела. Кроме того, в четных и нечетных итерациях на  $S$  поочередно выполняются краевые условия

$$\mathbf{u}^{2h}|_{S_+} = \mathbf{u}^{2h}|_{S_-} = \mathbf{u}^0|_S \quad (h=0), \quad \mathbf{u}^{2h}|_{S_+} = \mathbf{u}^{2h}|_{S_-} = \mathbf{u}^{2h-1}|_{S_+} + \alpha^{2h-1} \delta \mathbf{u}^{2h-1} \quad (h=1, 2, \dots) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{p}^{2h+1}|_{S_+} = \mathbf{p}^{2h+1}|_{S_-} = \mathbf{p}^{2h}|_{S_+} + \alpha^{2h} \delta \mathbf{p}^{2h} \quad (h=0, 1, \dots)$$

где  $u^\circ$  — произвольный вектор нулевого приближения перемещений,  $\alpha^{2h-1}$ ,  $\alpha^{2h}$  — скалярные параметры процесса.

Соотношения (4.4) обуславливают поочередную непрерывность на  $S$  статических и кинематических граничных величин. Ниже показано, что всегда может быть построен процесс (4.4), сходящийся к искомому решению задачи (принцип поочередной непрерывности).

Выразим значения переменных в итерации  $2k$  через соответствующие значения в итерации  $2k-2$ . Пусть  $K_i$  — фредгольмовы операторы, устанавливающие соответствие между вектором перемещений на  $S$  и вектором напряжений на  $S$ , когда поверхность  $S_i'$  закреплена. Ядра этих операторов являются функциями влияния для областей  $D_i$ . Из соотношений (4.4) нетрудно вывести равенства

$$u^{2k}|_S = u^{2k-2}|_S + M^{2k-2} \delta p^{2k-2} \quad (4.5)$$

$$\delta p^{2k} = N^{2k-2} \delta p^{2k-2} \quad (h=1, 2, \dots) \quad (4.6)$$

$$M^{2k-2} = \alpha^{2k-2} (1 - \alpha^{2h-1}) K_1 + (1 - \alpha^{2k-2}) \alpha^{2h-1} K_2$$

$$N^{2k-2} = [(1 - \alpha^{2k-2}) K_2 - \alpha^{2k-2} K_1] [(1 - \alpha^{2h-1}) K_2^{-1} - \alpha^{2h-1} K_1^{-1}]$$

Действительно, из соотношений (4.4) следует, что переход к очередному приближению эквивалентен нагружению каждого из тел  $D_i$  некоторыми дополнительными силами на  $S$  либо дополнительному перемещению этой поверхности. По принципу суперпозиции можем записать

$$u^{2k-1}|_{S_+} = u^{2k-2}|_{S_+} + \alpha^{2k-2} K_1 \delta p^{2k-2} \quad (4.7)$$

$$u^{2k-1}|_{S_-} = u^{2k-2}|_{S_-} + (1 - \alpha^{2k-2}) K_2 \delta p^{2k-2}$$

Раскрывая при помощи равенств (4.7) величины  $\delta u^{2k-1}$  и  $u^{2k-1}|_{S_+}$ , в соотношении (4.4), приходим к приведенному выше выражению для оператора  $M^{2k-2}$ . Выражение оператора  $N^{2k-2}$  выводится подстановкой соотношений

$$p^{2k}|_{S_+} = p^{2k-1}|_{S_+} + \alpha^{2k-1} K_1^{-1} \delta u^{2k-1}, \quad p^{2k}|_{S_-} = p^{2k-1}|_{S_-} + (1 - \alpha^{2k-1}) K_2^{-1} \delta u^{2k-1} \quad (4.8)$$

аналогичных равенствам (4.7), в выражение невязки усилий (4.3).

Покажем, что определение параметров  $\alpha_*^{2k-1}$ ,  $\alpha_*^{2k-2}$  из условий минимума энергии деформаций  $E(u^{2k})$  эквивалентно минимизации функции ошибок

$$\Phi(\delta p^{2k}) = \frac{1}{2} \int_S [(K_1^{-1} + K_2^{-1})^{-1} \delta p^{2k}] \cdot \delta p^{2k} dS \quad (4.9)$$

Так как уравнения (1.1) и условия (4.1) удовлетворяются во всех приближениях, то для составной области  $D_1 + D_2$  по формуле Клапейрона имеем (за положительные направления нормалей к поверхности  $S$ ; здесь приняты направления внешних нормалей)

$$E(u^{2k}) = \frac{1}{2} \sum_{(i) S_i} \int p_v^{2k} \cdot u^{2k} dS \quad (4.10)$$

Разбивая поверхность интегрирования на  $S$  и  $S_i'$  и используя теорему взаимности (Бетти) и равенства (4.4), нетрудно показать, что величины  $E(u^{2k})$  и  $\Phi(\delta p^{2k})$  различаются на некоторую константу, не зависящую от

$\alpha^{2h-1}$ ,  $\alpha^{2h-2}$ . Из этого следует, что отыскание значений  $\alpha_*^{2h-1}$ ,  $\alpha_*^{2h-2}$  из условий минимума  $\Phi(\delta \mathbf{r}^{2h})$  эквивалентно минимизации в итерации  $2k$  внутренней энергии составного тела на множестве чисел  $\alpha^{2h-1}$ ,  $\alpha^{2h-2}$ .

Установим единственность пары действительных чисел  $\alpha_*^{2h-1}$ ,  $\alpha_*^{2h-2}$ , определяющей минимум энергии  $E(\mathbf{u}^{2h})$  при фиксированном  $\mathbf{u}^{2h-2}$ , а также соотношения

$$\alpha_*^{2h-2} + \alpha_*^{2h-1} = 1; \quad \alpha_*^{2h-2}, \quad \alpha_*^{2h-1} \geq 0 \quad (4.11)$$

При  $\delta \mathbf{r}^{2h} \neq 0$  энергия  $E(\mathbf{u}^{2h})$  является ограниченным снизу многочленом второй степени относительно каждого из параметров сопряжения  $\alpha^{2h-1}$ ,  $\alpha^{2h-2}$ . Минимум  $E(\mathbf{u}^{2h})$  определяется уравнениями

$$\frac{\partial E(\mathbf{u}^{2h})}{\partial \alpha^{2h-1}} = \frac{\partial E(\mathbf{u}^{2h})}{\partial \alpha^{2h-2}} = 0 \quad (4.12)$$

Эллиптический параболоид, описываемый многочленом  $E(\mathbf{u}^{2h})$ , имеет на множестве чисел  $\alpha^{2h-1}$ ,  $\alpha^{2h-2}$  единственный минимум, что обуславливает единственность экстремальной пары  $\alpha_*^{2h-1}$ ,  $\alpha_*^{2h-2}$ . Как показывают равенства (4.6), (4.9), выражение  $E(\mathbf{u}^{2h})$  симметрично относительно величин  $\alpha^{2h-1}$ ,  $1 - \alpha^{2h-2}$ . Из этой симметрии и единственности экстремальной пары параметров вытекает равенство  $\alpha_*^{2h-1} = 1 - \alpha_*^{2h-2}$ , т. е. первое из соотношений (4.11). Положительность  $\alpha_*^{2h-1}$  и  $\alpha_*^{2h-2}$  установим, рассматривая  $E(\mathbf{u}^{2h})$  при  $\alpha^{2h-2} = \alpha_*^{2h-2}$  и произвольном  $\alpha^{2h-1}$ .

Выражая в равенстве (4.10)  $\mathbf{u}^{2h}|S$  при помощи соотношений (4.4), получим

$$E(\mathbf{u}^{2h}) = (1 - \alpha^{2h-1})^2 E_1 + (\alpha^{2h-1})^2 E_2 + C \quad (4.13)$$

$$E_i = \int_S [(K_i \delta \mathbf{u}^{2h-1})] \cdot \delta \mathbf{u}^{2h-1} dS \quad (i=1,2)$$

где величина  $C$  от  $\alpha^{2h-1}$  не зависит.

Величины  $E_i$  ( $i=1, 2$ ) положительны, так как по своей структуре они представляют собой некоторые энергии деформации тел  $D_i$ . Это приводит к положительности значения  $\alpha_*^{2h-1}$  при отыскании его из соотношений (4.12), (4.13) и к выполнению второго и третьего из соотношений (4.11).

Пусть  $\alpha^{2h-2}$ ,  $\alpha^{2h-1}$  произвольные, не обязательно удовлетворяющие условиям (4.12), числа,  $E(\mathbf{u}^{2h})$  — соответствующая им энергия деформации, а  $\mathbf{u}^{2h}$  построено при помощи условий минимума (4.12). Тогда при фиксированном векторе  $\mathbf{u}^{2h-2}$  выполняется неравенство  $E(\mathbf{u}^{2h}) \leq E(\mathbf{u}^{2h})$ . Из равенства (4.5) следует, что при  $\alpha^{2h-2} = \alpha^{2h-1} = 0$  приближения  $\mathbf{u}^{2h}$  и  $\mathbf{u}^{2h-2}$  совпадают, следовательно, полученное неравенство позволяет записать

$$E(\mathbf{u}^{2h}) \leq E(\mathbf{u}^{2h-2}) \quad (4.14)$$

В силу этого соотношения последовательность положительных чисел  $E(\mathbf{u}^{2h})$  не возрастает и, следовательно, сходится. Установим теперь сходимость разности  $\mathbf{u}^{2h} - \mathbf{u}^{2h-2}$  по энергии. Покажем предварительно справедливость неравенства

$$E[(\mathbf{u}^{2h} + \mathbf{u}^{2h-2})/2] \geq E(\mathbf{u}^{2h}) \quad (4.15)$$

Представим вектор  $\mathbf{u}'^{2k} = (\mathbf{u}^{2k} + \mathbf{u}^{2k-2})/2$  на поверхности  $S$  при помощи соотношения (4.5)

$$\mathbf{u}'^{2k}|_S = \mathbf{u}^{2k-2} + 1/2 M^{2k-2} \delta \mathbf{p}^{2k-2}$$

Из полученного представления следует, что вектор  $\mathbf{u}'^{2k}$  может быть построен при помощи соотношений (4.4), если  $\alpha'^{2k-1}$ ,  $\alpha'^{2k-2}$  определять из алгебраической системы

$$\alpha'^{2k-2} (1 - \alpha'^{2k-1}) = 1/2 \alpha_*^{2k-2} (1 - \alpha_*^{2k-1}),$$

$$\alpha'^{2k-1} (1 - \alpha'^{2k-2}) = 1/2 \alpha_*^{2k-1} (1 - \alpha_*^{2k-2})$$

сводимой к квадратному уравнению с дискриминантом  $D = 1/4 + \alpha_*^{2k-1} (1 - \alpha_*^{2k-1})$ , и в силу неравенств (4.11) всегда имеющей вещественные корни. Так как числа  $\alpha'^{2k-1}$ ,  $\alpha'^{2k-2}$  определены не из условий минимума (4.12), то справедливость неравенства (4.15) установлена.

Сходимость векторов  $\mathbf{u}^{2k} - \mathbf{u}^{2k-2}$  по энергии, т. е. стремление к нулю величины  $E(\mathbf{u}^{2k} - \mathbf{u}^{2k-2})$  вытекает из разложения

$$E(\mathbf{u}^{2k} - \mathbf{u}^{2k-2}) = 2E(\mathbf{u}^{2k}) + 2E(\mathbf{u}^{2k-2}) - 4E[(\mathbf{u}^{2k} + \mathbf{u}^{2k-2})/2]$$

Действительно, при достаточно большом  $k$  из уже установленной сходимости энергий  $E(\mathbf{u}^{2k})$  и из неравенства (4.15) следует неравенство  $E(\mathbf{u}^{2k} - \mathbf{u}^{2k-2}) \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — любое положительное число. По известной теореме вложения в данном случае из сходимости разности  $\mathbf{u}^{2k} - \mathbf{u}^{2k-2}$  к нулю по энергии в объеме  $D$  следует сходимость этой разности к нулю в гильбертовом пространстве  $L_2(S)$ . В [1] показано, что при этом невязка уравнения  $L(\mathbf{u}^{2k})$ , по крайней мере, слабо стремится к нулю. Существенно, что вместе с разностью  $\mathbf{u}^{2k} - \mathbf{u}^{2k-2}$  к нулю стремится и невязка  $\delta \mathbf{p}^{2k-2}$  в соотношении (4.5). Из единственности непрерывного со своими производными в  $D_1 + D_2$  решения системы (1.1) при условиях (4.1) вытекает, что последовательность  $\mathbf{u}^{2k}$  сходится к решению поставленной задачи. При помощи соотношения (4.7) нетрудно показать, что к этому же пределу стремится последовательность  $\mathbf{u}^{2k+1}$ .

Перейдем к оценке быстроты сходимости процесса. Из соотношения (4.6) следует, что возможны и стационарные процессы, в которых скалярные параметры в равенствах (4.4) неизменны во всех приближениях. Для этого достаточно выполнение неравенства

$$\|N^{2k-2}\| \leq q < 1 \quad (k=1, 2, \dots) \quad (4.16)$$

где  $\|\dots\|$  — норма оператора в некотором метрическом пространстве.

Действительно, из соотношения (4.6) вытекает, что при этом невязки процесса будут убывать не медленнее элементов некоторой убывающей геометрической прогрессии. Рассмотрим соотношение для  $N^{2k-2}$  при  $\alpha^{2k-2} = 1 - \alpha^{2k-1} = \alpha$ :

$$N = 2\alpha(1 - \alpha) - \alpha^2 K_1 K_2^{-1} - (1 - \alpha)^2 K_2 K_1^{-1} \quad (4.17)$$

Для оценки оптимального (в смысле быстроты сходимости) значения параметра  $\alpha$  рассмотрим также величину  $\|N\|$ . По неравенству треугольника при  $0 \leq \alpha \leq 1$  из соотношения (4.17) следует неравенство

$$\|N\| \leq 2\alpha(1 - \alpha) + \alpha^2 \|K_1 K_2^{-1}\| + (1 - \alpha)^2 \|K_1^{-1} K_2\| \quad (4.18)$$

Из соотношения (4.18) следует, что для выполнения условия (4.16) достаточно, чтобы норма оператора  $K_1 K_2^{-1}$  (либо обратного ему оператора  $K_2 K_1^{-1}$ ) была меньше единицы. Действительно, в этом случае условие (4.16) будет вытекать из неравенства (4.18) при  $\alpha=0$  (либо при  $\alpha=1$ ).



Быстрота сходимости процесса будет определяться при этом величиной  $\|K_1 K_2^{-1}\|$  (либо величиной  $\|K_2 K_1^{-1}\|$ ), т. е. соотношением интегральных характеристик жесткости тел  $D_1$  и  $D_2$ .

Минимизируя оценку (4.18) на множестве чисел  $\alpha$ , для оптимального значения  $\alpha_*$  получим

$$\alpha_* = \frac{\|K_1^{-1} K_2\| - 1}{\|K_1^{-1} K_2\| + \|K_1 K_2^{-1}\| - 2}, \quad \|N_*\| = \frac{\|K_1^{-1} K_2\| \|K_1 K_2^{-1}\| - 1}{\|K_1^{-1} K_2\| + \|K_1 K_2^{-1}\| - 1} \quad (4.19)$$

Из этих соотношений видно, что с увеличением различия физических свойств тел  $D_1$  и  $D_2$  (т. е. с увеличением различия операторов  $K_1$  и  $K_2$ ) оптимальное значение параметра  $\alpha$  будет приближаться к нулю или единице в зависимости от нумерации тел.

При  $K_1 = K_2$ , т. е. при симметрии тел  $D_1$  и  $D_2$  относительно поверхности  $S$ , соотношения (4.18), (4.19) не позволяют определить необходимую величину параметра  $\alpha$ . Из равенства (4.17) следует, что в этом случае процесс сопряжений сойдется к точному решению при  $\alpha = 1/2$ , причем за два шага.

Формулы (4.19) учитывают соотношение интегральных характеристик жесткости тел  $D_1$  и  $D_2$ . Переход к величинам  $\alpha^n$ , переменным на  $S$ , позволяет учесть при построении процесса соотношение локальных характеристик жесткости сопрягаемых тел. Простые формулы для  $\alpha^n$ , переменных по контакту, возникают при некотором упрощении физических свойств тел  $D_1$  и  $D_2$ . Представим, что эти тела являются линейно деформируемыми несвязанными (Винклеровыми) основаниями. В этом случае интегральные операторы  $K_i$  становятся операторами умножения на скалярную функцию  $K_i$ , являющуюся локальной податливостью основания  $D_i$ . Минимизация значения оператора  $N$ , даваемого формулой (4.17), приводит к формуле

$$\alpha_* = K_2 / (K_1 + K_2) \quad (4.20)$$

где  $\alpha_*$  является уже функцией точки на поверхности  $S$ . Выразим податливости  $K_i$  через текущие значения контактных давлений  $p_i^n$  и контактных перемещений  $u_{i,v}^n$

$$\alpha_* = (u_{2v}^n / p_2^n) / (u_{1v}^n / p_1^n + u_{2v}^n / p_2^n)$$

Учитывая, что в силу особенностей рассматриваемых процессов имеет место равенство  $p_1^{2h+1} = p_2^{2h+1}$ , перепишем эту формулу в виде

$$\alpha_* = u_{2v}^{2h} / (u_{1v}^{2h} + u_{2v}^{2h}) \quad (4.21)$$

При сопряжении упругих тел полученные соотношения могут быть заменены более общими

$$\alpha^{2h} = \beta u_{2v}^{2h} / [(1 - \beta) u_{1v}^{2h} + \beta u_{2v}^{2h}] \quad (4.22)$$

где  $\beta$  — некоторые скалярные параметры. При  $\beta = 1/2$  формулы (4.22) и (4.21) совпадают; при изменении  $\beta$  от 0 до 1 значения функций  $\alpha^{2h}$  также изменяются от 0 до 1. Оптимальные (в смысле быстроты сходимости) величины  $\beta_*$  легко подбираются в процессе счета по поведению невязок на первых шагах процесса.

При рассмотрении вариантов 16—18, описанных в п. 3 сходимость процесса, в котором величина  $\alpha$  постоянна по контакту, несколько замедлялась. Невязки сопряжения при этом достигали минимального значения за 20—25 шагов. Использование формул (4.22) при  $\beta = 0.2 - 0.3$  позволило ускорить сходимость в три — четыре раза.

Приведенное выше обоснование процесса поочередных сопряжений построено для линейной задачи о полном сцеплении сопрягаемых тел. При этом существенно использовалось, что приближения метода отыскивались из условия убывания потенциальной энергии системы. Решение контактных задач с односторонними связями (т. е. при возможном отставании соприкасающихся тел) также удовлетворяет некоторому вариационному принципу минимума [2, 10]. Это обстоятельство делает правдоподобным распространение результатов настоящего пункта на случай решения задач с односторонними связями. Критерием близости построенного приближения к искомому решению задачи могут служить невязки сопряжения. При выполнении условий существования и единственности решения рассматриваемых задач [2] стремление невязок процесса к нулю означает, что построенные приближения сходятся к искомому решению задачи.

Обобщение подхода на случай сопряжения нескольких тел может быть осуществлено несколькими способами. Один из простейших путей — это применение метода релаксации Саусвелла [9].

Поступила 2 XI 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Цвик Л. Б. Принцип поочередной непрерывности при решении задач теории поля по частям. Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 1.
2. Fichera G. Existence theorems in elasticity. Springer Verlag. Berlin — Heidelberg, 1972. (Рус. перев.: М., «Мир», 1974.)
3. Александров В. М. Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра. Изв. АН СССР ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 5.
4. Гаверилкин В. Н., Приварников А. К. О характере взаимодействия жесткой втулки с многослойным цилиндром. Прикладная механика, 1977, № 8.
5. Parsons B., Wilson E. A. A method for determining the surface contact stresses resulting from interference fits. Trans. ASME, Ser B., J. Engng Industry. 1970, No. 2.
6. Дегинко Ф. М., Фастовский В. М. Контактная задача о посадке двух цилиндрических оболочек различной длины. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 3.
7. Угодчиков А. Г. Исследование двумерных задач теории упругости для тел сложной формы. В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, М., «Наука», 1972.
8. Никишин В. С., Шапиро Г. С. Контактные задачи теории упругости с односторонними связями. Докл. АН АрмССР, 1976, т. 63, № 4.
9. Цвик Л. Б. Расчет напряженного состояния многослойных цилиндрических оболочек итерационным методом. Проблемы прочности. 1977, № 7.
10. Власенко Ю. И., Кузменко В. И., Фень Г. А. Контактная задача для упругопластического многослойного пакета с учетом отставания слоев. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5.