

ВИБРАЦИОННОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ПО ИМПУЛЬСНО-ВОЗМУЩЕННОЙ НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

В. В. АНДРОНОВ

(Москва)

Рассматривается задача об относительном движении частицы материала по наклонной плоской опоре, подверженной влиянию периодических мгновенных импульсов, действующих в той же плоскости перпендикулярно линии наибольшего ската. В промежутках между импульсами в направлении движения опоры силы не действуют, поэтому ее поступательное движение в этих интервалах — прямолинейное и равномерное (обратным воздействием частицы на движение опоры пренебрегается). Определяются величина и направление относительной средней скорости частицы в установившихся равномерных в среднем движениях. В отличие от случая гармонического возмущения [1, 2] здесь эти величины допускают точное определение.

Изучается близкая по характеру задача о виброперемещении вдоль гармонически колеблющейся в своей плоскости плоской поверхности с расположенными на ней параллельно линии наибольшего ската прямолинейными ограничителями (стенками). Оказалось, что в режимах движения с ударами частицы о стенки (виброударных движениях) могут достигаться существенно большие скорости транспортировки, чем при таком же возбуждении при чисто вибрационных движениях. Этот эффект в данном случае связан с явлением «затягивания» [3, 4] — существованием в виброударных системах устойчивых колебаний с резко большими, чем в соответствующей безударной системе, амплитудами колебаний.

1. Плоскую поверхность опоры примем за координатную плоскость xu , ось u направим вниз вдоль линии наибольшего ската, ось x — перпендикулярно этой линии. Тогда дифференциальные уравнения относительного движения частицы по плоскости xu в промежутках безударного движения запишутся в виде

$$mx'' = -Fx(x^2 + u^2)^{-1/2}, \quad mu'' = P - Fu'(x^2 + u^2)^{-1/2} \quad (1.1)$$

Здесь m и P — масса и параллельная плоскости (продольная) составляющая веса частицы, x и u — ее координаты в этих осях, F — величина изотропного кулонова трения скольжения.

В моменты взаимодействия опоры с источником импульсов для частицы справедливы уравнения ударов

$$mx_+ - mx_- = S_x, \quad mu_+ - mu_- = 0 \quad (1.2)$$

где $S_x = \pm S$ — проекция на ось x ударного импульса S , действующего в эти моменты времени на частицу. Индекс плюс (минус) в обозначениях проекций скорости частицы указывает на принадлежность соответствующей величины к моменту времени непосредственно после (до) удара.

Уравнения (1.1), естественно, совпадают с соответствующими уравнениями в случае неподвижной плоскости и могут быть точно проинтегрированы [5, 6]. Для этого удобно в (1.1) положить

$$x' = v \sin \varphi, \quad u' = v \cos \varphi \quad (1.3)$$

и перейти тем самым к уравнениям движения в естественной форме

$$mv\dot{\varphi} = P \cos \varphi - F, \quad mv\dot{v} = -P \sin \varphi \quad (1.4)$$

Здесь v , φ — соответственно величина и отсчитываемый по часовой стрелке угол наклона к оси y относительной мгновенной скорости частицы v .

Разделим почленно первое уравнение (1.4) на второе

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{d\varphi} = -\operatorname{ctg} \varphi + \frac{v}{\sin \varphi} \quad \left(v = \frac{1}{\gamma} = \frac{F}{P} \right) \quad (1.5)$$

Далее обе части (1.5) умножим на $d\varphi$ и полученное соотношение проинтегрируем при начальных условиях: $t=t_0$, $v=v_0$, $\varphi=\varphi_0$. В результате придем к формуле

$$v = v_0 \sin \varphi_0 \sin^{-1} \varphi (\operatorname{tg}^{1/2} \varphi \operatorname{tg}^{-1/2} \varphi_0)^v \quad (1.6)$$

Выразим с помощью одного из уравнений (1.4) величину dt и полученное равенство проинтегрируем в соответствующих пределах при учете (1.6). Это дает

$$t - t_0 = m [P(v^2 - 1)]^{-1} [v_0(v + \cos \varphi_0) - v(v + \cos \varphi)] \quad (1.7)$$

Формулы (1.6), (1.7) в параметрической форме выражают закон изменения относительной скорости частицы при ее движении в промежутках между ударами.

В виде функций от φ можно представить и текущие координаты частицы. Поступая аналогично [2, 6], найдем

$$\begin{aligned} x - x_0 &= m [P(4v^2 - 1)]^{-1} [v_0^2 \sin \varphi_0 (2v + \cos \varphi_0) - v^2 \sin \varphi (2v + \cos \varphi)] \\ y - y_0 &= m [4P(v^2 - 1)]^{-1} [v_0^2 (1 + 2v \cos \varphi_0 + \\ &\quad + \cos^2 \varphi_0) - v^2 (1 + 2v \cos \varphi + \cos^2 \varphi)] \end{aligned} \quad (1.8)$$

где x_0 , y_0 — начальные координаты частицы.

Соотношения (1.7), (1.8) — параметрические уравнения относительного движения частицы между ударами (параметр задания — угол φ).

При выводе (1.7), (1.8) предполагалось, что $v \neq 0.5, 1$, однако можно получить аналогичные формулы и для этих частных случаев.

Из (1.6) — (1.8) видно, что в промежутках между ударами при $P > F$ ($0 < v < 1$) частица движется ускоренно, при $P < F$ ($1 < v < \infty$) — замедленно. В последнем случае в системе возможны периодические движения типа двумерного безотрывного виброперемещения [4, 2, 7]. Такие равномерные в среднем движения частицы по плоскости можно характеризовать вектором средней скорости $V\{V_1, V_2\}$ и измеряемой перпендикулярно этому вектору шириной полосы движения L (размахом «поперечных» колебаний частицы).

Будем искать названные интегральные характеристики периодических движений V_1, V_2, L . Предварительно заметим, что возможны два вида таких движений: движения с остановками и без них. В первом случае в интервалах времени между ударами частица успевает остановиться, поэтому каждый очередной импульс прикладывается к неподвижной частице. Во втором случае промежутки относительного покоя частицы на плоскости отсутствуют.

При движении с остановками скорость точки непосредственно перед ударом равна нулю, после него — величине S/m и направлена вдоль импульса. Поэтому в формулах (1.6) — (1.8) для этого случая следует по-

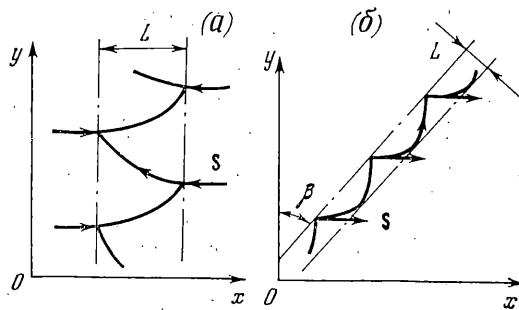
ПОЖИТЬ

$$v_0 = S/m, \quad \varphi_0 = 1/2\pi \quad (1.9)$$

Время движения t_1 до остановки и координаты частицы в момент остановки x_1, y_1 найдем, если в формулах (1.7), (1.8) наряду с (1.9) положим: $v=0, \varphi=0$. Будем иметь

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + \frac{Sv}{P(v^2-1)}, & x_1 &= x_0 + \frac{2vS^2}{Pm(4v^2-1)} \\ y_1 &= y_0 + \frac{S^2}{4Pm(v^2-1)} \end{aligned} \quad (1.10)$$

В случае двусторонних (знакопередающих) импульсов установившееся движение частицы $2T$ — периодически по времени, где T — продолжи-



Фиг. 1

тельность интервала между двумя соседними импульсами. Поскольку при этом справедливы соотношения

$$x^*(t) = -x^*(t+T), \quad y^*(t) = y^*(t+T) \quad (1.11)$$

то это движение также симметрично. При учете (1.10), (1.11) для разыскиваемых осредненных характеристик движения найдем

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2T} \int_0^{2T} x^* dt = 0, & V_2 &= \frac{1}{2T} \int_0^{2T} y^* dt = \frac{1}{T} \int_0^T y^* dt = \\ &= \frac{y_1 - y_0}{T} = \frac{S^2}{4PTm(v^2-1)}, & L &= x_1 - x_0 = \frac{2vS^2}{Pm(4v^2-1)} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Общий вид соответствующего движения частицы показан на фиг. 1, а, где стрелкой обозначено действие на частицу мгновенного импульса.

В случае односторонних ударов период установившегося движения равен T , а формулы для определения V_1 и V_2 таковы:

$$V_1 = 2vS^2 [PTm(4v^2-1)]^{-1}, \quad V_2 = S^2 [4PTm(v^2-1)]^{-1} \quad (1.13)$$

Не вызывает затруднений и получение не приводимой здесь формулы для величины L .

Из (1.13) видно, что при односторонних ударах вектор средней скорости частицы наклонен к линии наибольшего ската под углом β , для определения которого имеем

$$\operatorname{tg} \beta = V_1 V_2^{-1} = 8v(v^2-1)(4v^2-1)^{-1} \quad (1.14)$$

Характер движения частицы в этом случае при $S_x > 0$ показан на фиг. 1, б.

Формула (1.14) замечательна тем, что устанавливает различное направление осредненного движения для различных значений параметра v . В случае наклонной плоскости с коэффициентом трения f и углом наклона α в силу (1.5) имеем $v = f/\operatorname{tg} \alpha$, поэтому при фиксированном α различные значения v фактически означают различные коэффициенты трения. Следовательно, если в некоторой точке односторонне возбуждаемой наклонной плоскости на нее поступают разнородные механические частицы, то в установившемся осредненном движении они перемещаются по прямолинейным траекториям с различными значениями угла наклона β . Происходит так называемая классификация (сепарация) частиц по коэффициентам трения [8]. В связи с этим соответствующие результаты имеют непосредственное отношение к проблеме сепарации сыпучих материалов.

Первое соотношение (1.11) позволяет выразить условие существования движений с остановками $t_1 - t_0 \leq T$ через параметры системы и возбуждения

$$\lambda = TP(v^2 - 1)(vS)^{-1} \geq 1 \quad (1.15)$$

Отметим, что подобные периодические движения с остановками всегда устойчивы в большом.

2. Перейдем к изучению безостановочных движений.

Пусть в принимаемый за начальный момент времени t_k ($k=1, 2, \dots$) двустороннего воздействия импульс положителен ($S_x > 0$), а скорость частицы непосредственно до и после приложения импульса соответственно равна v_k^- , v_k^+ и направлена под углом соответственно φ_k^- , φ_k^+ к оси y . Пусть, далее, через полпериода импульсного воздействия, т. е. в момент $t_{k+1} = t_k + T$, эти же величины равны v_{k+1}^- , v_{k+1}^+ , φ_{k+1}^- , φ_{k+1}^+ . Тогда уравнения (1.2), (1.3), (1.6), (1.7) дают

$$\begin{aligned} v_k^+ \sin \varphi_k^+ \sin^{-1} \varphi_{k+1}^- (\operatorname{tg}^{1/2} \varphi_{k+1}^- \operatorname{tg}^{-1/2} \varphi_k^+)^v &= v_{k+1}^- \\ v_k^+ (v + \cos \varphi_k^+) - v_{k+1}^- (v + \cos \varphi_{k+1}^-) &= TPm^{-1}(v^2 - 1) \\ v_{k+1}^+ \sin \varphi_{k+1}^+ + v_{k+1}^- \sin \varphi_{k+1}^- &= Sm^{-1} \\ v_{k+1}^+ \cos \varphi_{k+1}^+ - v_{k+1}^- \cos \varphi_{k+1}^- &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Установившееся симметричное периодическое движение частицы характеризуется тем, что

$$\begin{aligned} v_{k+1}^+ &= v_k^+ = v_1, & v_{k+1}^- &= v_k^- = v_2 \\ -\varphi_{k+1}^+ &= \varphi_k^+ = \varphi_1, & -\varphi_{k+1}^- &= \varphi_k^- = -\varphi_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения для определения величин v_1 , v_2 , φ_1 , φ_2 получаются после подстановки условий периодичности (2.2) в соотношения (2.1) и имеют вид

$$\begin{aligned} v_1 \sin \varphi_1 \sin^{-1} \varphi_2 (\operatorname{tg}^{1/2} \varphi_2 \operatorname{tg}^{-1/2} \varphi_1)^v &= v_2 \\ v_1 (v + \cos \varphi_1) - v_2 (v + \cos \varphi_2) &= TPm^{-1}(v^2 - 1) \\ v_1 \sin \varphi_1 + v_2 \sin \varphi_2 &= Sm^{-1}, & v_1 \cos \varphi_1 - v_2 \cos \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Умножим последнее уравнение системы (2.3) на $\sin \varphi_2$ и затем сложим его с предпоследним уравнением, умноженным на $\cos \varphi_2$. В результате

получим

$$v_1 = S \cos \varphi_2 [m \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]^{-1} \quad (2.4)$$

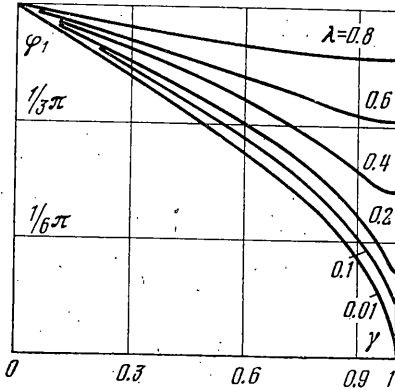
Из второго уравнения (2.3) при учете четвертого найдем

$$v_1 = TP(v^2 - 1) \cos \varphi_2 [m v (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)]^{-1} \quad (2.5)$$

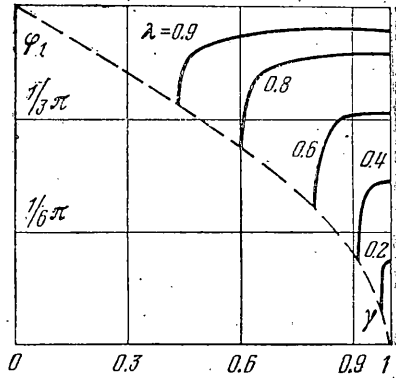
Приравнявая результаты (2.4) и (2.5), получим

$$(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) \sin^{-1} (\varphi_1 + \varphi_2) = \lambda \quad (2.6)$$

где λ определяется выражением (1.15). Другое уравнение относительно



Фиг. 2



Фиг. 3

неизвестных φ_1 , φ_2 дает первое уравнение (2.3) после подстановки в него величины v_1 в силу последнего соотношения этой системы

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg}^{-1} \varphi_2 (\operatorname{tg}^{1/2} \varphi_2 \operatorname{tg}^{-1/2} \varphi_1)^v = 1 \quad (2.7)$$

Для решения полученной системы двух уравнений с двумя неизвестными (2.6), (2.7) в уравнении (2.6) перейдем к тангенсам половинных углов

$$(\operatorname{tg}^{1/2} \varphi_1 - \operatorname{tg}^{1/2} \varphi_2) (1 - \operatorname{tg}^{1/2} \varphi_1 \operatorname{tg}^{1/2} \varphi_2)^{-1} = \lambda$$

Отсюда легко выразить один из углов через другой

$$\operatorname{tg}^{1/2} \varphi_2 = (\operatorname{tg}^{1/2} \varphi_1 - \lambda) (1 - \lambda \operatorname{tg}^{1/2} \varphi_1)^{-1} \quad (2.8)$$

Подставляя это выражение в (2.7), приходим к уравнению с одним неизвестным φ_1

$$\frac{\ln [(1 - \lambda \operatorname{tg}^{1/2} \varphi_1) (\operatorname{tg}^{1/2} \varphi_1 - \lambda)^{-1} \operatorname{tg}^{1/2} \varphi_1]}{\ln [(1 - \lambda^2) (1 - \lambda \operatorname{tg}^{1/2} \varphi_1)^{-1} (\operatorname{tg}^{1/2} \varphi_1 - \lambda)^{-1} \operatorname{tg}^{1/2} \varphi_1]} = \gamma \quad \left(\gamma = \frac{1}{v} \right) \quad (2.9)$$

Таким образом, задача определения периодических движений фактически свелась к решению уравнения (2.9). Если это сделано и величина φ_1 определена, то остальные характеристики периодического режима находятся без труда: вначале по формуле (2.8) вычисляется величина φ_2 , а далее и граничные значения скорости частицы v_1 , v_2 . Первая — по любой из формул (2.4), (2.5), вторая — по формуле

$$v_2 = S \cos \varphi_1 [m \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]^{-1} \quad (2.10)$$

которую получим, разрешив относительно v_2 третье или четвертое уравнения (2.3).

Из физического смысла задачи ясно, что $\varphi_1 \leq 1/2\pi$. Поэтому выражение (2.9) может принимать вещественные значения только при $\lambda < 1$. Из формулы (1.15) и неравенства $P < F$ ($0 < \gamma < 1$) также следует $\lambda > 0$. Следовательно, рассматриваемые безостановочные движения частицы существуют лишь при

$$0 < \gamma < 1, \quad 0 < \lambda < 1 \quad (2.11)$$

Тем самым на плоскости параметров γ, λ определена область существования рассматриваемого периодического режима движения.

Решение уравнения (2.9) сводится к простому вычислению функции $\gamma = \gamma(\varphi_1)$ при различных значениях параметра λ внутри интервала $0 < \lambda < 1$ и последующему обращению этой зависимости. При этом φ_1 следует придавать значения в интервале $(2 \operatorname{arctg} \lambda, 1/2\pi)$, к границам которого эта величина стремится при $\gamma \rightarrow 1$ и при $\gamma \rightarrow 0$. Результаты решения при некоторых значениях λ показаны на фиг. 2.

Приведем формулы для определения интегральных характеристик движения частицы в ее безостановочном движении при двусторонних импульсах

$$\begin{aligned} V_1 = 0, \quad V_2 &= \frac{S}{4mv} \frac{1 - \lambda \sin \varphi_1 + v(1 - \lambda^2) \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1 - \lambda} \\ L &= \frac{S^2}{4Pm(4v^2 - 1)(\sin \varphi_1 - \lambda)^2} \{ (1 - \lambda^2)^2 (2\lambda + \cos \varphi_1) \sin \varphi_1 - \\ &- [(1 + \lambda^2) \sin \varphi_1 - 2\lambda] [2v(1 - 2\lambda \sin \varphi_1 + \lambda^2) + (1 - \lambda^2) \cos \varphi_1] \} \quad (2.12) \end{aligned}$$

Формулы получены на основе зависимостей (1.8), в которых применительно к данному случаю положено: $v_0 = v_1, v = v_2, \varphi_0 = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$, формул (2.4), (2.10) и вытекающих из (2.6) равенств

$$\begin{aligned} \cos \varphi_2 &= (1 - \lambda^2) \cos \varphi_1 (1 - 2\lambda \sin \varphi_1 + \lambda^2)^{-1} \\ \sin \varphi_2 &= [(1 + \lambda^2) \sin \varphi_1 - 2\lambda] (1 - 2\lambda \sin \varphi_1 + \lambda^2)^{-1} \end{aligned}$$

Пусть теперь импульсы направлены в одну, например положительную сторону. При этом установившееся движение частицы T — периодически по времени, причем условия периодичности теперь будут

$$\begin{aligned} v_{k+1}^+ = v_k^+ = v_1, \quad v_{k+1}^- = v_k^- = v_2 \\ \varphi_{k+1}^+ = \varphi_k^+ = \varphi_1, \quad \varphi_{k+1}^- = \varphi_k^- = \varphi_2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Соответствующая конечно-разностная система, аналогичная (2.3), будет отличаться от нее в данном случае только третьим уравнением, вместо которого будем иметь

$$v_{k+1}^+ \sin \varphi_{k+1}^+ - v_{k+1}^- \sin \varphi_{k+1}^- = Sm^{-1}$$

Это обусловит также соответствующую разницу в уравнениях для определения периодического движения, которые получим, заменив третье соотношение в (2.3) уравнением $v_1 \sin \varphi_1 - v_2 \sin \varphi_2 = Sm^{-1}$.

Решая эту систему аналогично предыдущей, получим

$$v_1 = \frac{S \cos \varphi_2}{m \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad v_2 = \frac{S \cos \varphi_1}{m \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_2 = \frac{\lambda - \operatorname{tg} 1/2 \varphi_1}{1 - \lambda \operatorname{tg} 1/2 \varphi_1} \quad (2.14)$$

$$\gamma = \frac{\ln[(1 - \lambda \operatorname{tg} 1/2 \varphi_1)(\lambda - \operatorname{tg} 1/2 \varphi_1)^{-1} \operatorname{tg} 1/2 \varphi_1]}{\ln[(1 - \lambda^2)(\lambda - \operatorname{tg} 1/2 \varphi_1)^{-1} (1 - \lambda \operatorname{tg} 1/2 \varphi_1)^{-1} \operatorname{tg} 1/2 \varphi_1]}$$

Последнее соотношение (2.14) является, подобно (2.9), уравнением для нахождения периодического движения. Его анализ показывает, что принадлежащие интервалу $(0, 1)$ значения γ имеют место при $0 < \lambda < 1$, $\arcsin \lambda < \varphi_1 < 2 \operatorname{arctg} \lambda$, причем значения γ при $\varphi_1 \rightarrow \arcsin \lambda$, $2 \operatorname{arctg} \lambda$ соответственно равны $(1 - \lambda^2)^{1/2}$, 1. Отсюда видно, что область существования разыскиваемого режима имеет вид

$$(1 - \lambda^2)^{1/2} < \gamma < 1, \quad 0 < \lambda < 1 \quad (2.15)$$

Таким образом, в отличие от случая знакопередающихся импульсов здесь установившиеся равномерные в среднем движения реализуются лишь на части рассматриваемого интервала изменения γ $(0, 1)$. Другая часть интервала соответствует ускоренным движениям частицы по плоскости, причем, поскольку $\gamma < 1$, появление среднего ускорения обусловлено действием импульсов.

На фиг. 3 приведены графики для решения уравнения (2.14). Штриховая линия соответствует зависимости $\varphi_1 = \arcsin (1 - \gamma^2)^{1/2}$, определяющей значения φ_1 на границе $\gamma = (1 - \lambda^2)^{1/2}$ области существования (2.15). Сплошные линии задают зависимость имеющего физический смысл корня уравнения (2.14) $\varphi_1 = \varphi_1(\gamma)$ при различных значениях параметра λ в области (2.15). Эти кривые получены расчетом по последней формуле (2.14) и последующим обращением полученных зависимостей.

При помощи кривых фиг. 3 можно вычислить значения V_1 , V_2 , L в безостановочном одностороннем движении частицы. Не приводя соответствующих формул, заметим, что эффект сепарации частиц по коэффициентам трения, установленный выше при анализе одностороннего движения с остановками, сохраняется и в данном случае.

Проварьируем соотношения (2.1) вблизи их решения (2.2)

$$\begin{aligned} v_2 v_1^{-1} \delta v_k^+ - \delta v_{k+1}^- + v_2 (\operatorname{ctg} \varphi_1 - v \sin^{-1} \varphi_1) \delta \varphi_k^+ - \\ - v_2 (\operatorname{ctg} \varphi_2 - v \sin^{-1} \varphi_2) \delta \varphi_{k+1}^- = 0, \quad (v + \cos \varphi_1) \delta v_k^+ - \\ - (v + \cos \varphi_2) \delta v_{k+1}^- - v_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_k^+ + v_2 \sin \varphi_2 \delta \varphi_{k+1}^- = 0 \\ \sin \varphi_2 \delta v_{k+1}^- + v_2 \cos \varphi_2 \delta \varphi_{k+1}^- - \sin \varphi_1 \delta v_{k+1}^+ + v_1 \cos \varphi_1 \delta \varphi_{k+1}^+ = 0 \\ - \cos \varphi_2 \delta v_{k+1}^- + v_2 \sin \varphi_2 \delta \varphi_{k+1}^- - \cos \varphi_1 \delta v_{k+1}^+ + v_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_{k+1}^+ = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Третье и четвертое соотношения (2.16) позволяют выразить вариации δv_{k+1}^+ , $\delta \varphi_{k+1}^+$ через соответствующие вариации доударной скорости частицы δv_{k+1}^- , $\delta \varphi_{k+1}^-$. Для определения этих последних служат два первых уравнения, образующих относительно величин δv_{k+1}^- , $\delta \varphi_{k+1}^-$, δv_k^+ , $\delta \varphi_k^+$ линейную однородную систему в конечных разностях. Полагая в ней $v_{k+1}^- = \rho v_k^+$, $\varphi_{k+1}^- = \rho \varphi_k^+$, приходим к следующему квадратному уравнению для определения характеристических чисел режима ρ :

$$(1 - v^2) \sin^{-1} \varphi_2 \rho^2 - [\operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi_2 + \operatorname{tg} \varphi_2 \cos \varphi_1 + (\cos \varphi_1 + v) (\cos \varphi_2 - v) \sin^{-1} \varphi_2 + \\ + (\cos \varphi_1 - v) (\cos \varphi_2 + v) \sin^{-1} \varphi_1] \rho + (1 - v^2) \sin^{-1} \varphi_1 = 0 \quad (2.17)$$

Это уравнение остается в силе и для периодического режима (2.13),

ибо соответствующая система уравнений в вариациях отличается от (2.16) только своим третьим уравнением.

Анализ (2.17) показал, что его корни по модулю меньше единицы внутри всей области (2.12) существования симметричного периодического режима (2.2), а, следовательно, поскольку (2.12) содержит (2.15), — также и внутри всей области (2.15) существования режима (2.13). Таким образом, оба рассмотренных периодических режима безостановочного движения частицы устойчивы асимптотически.

3. Режимы движения, близкие по своему характеру рассмотренным выше периодическим движениям при двусторонних импульсах, могут возникать и при гармоническом воздействии на опору, если последняя содержит ограничители (фиг. 4, а). В такой системе размах относительных поперечных колебаний частицы может стать равным расстоянию b между ограничителями, и частица вступает с ними в импульсное взаимодействие. При этом в случае $P < F$ может установиться равномерное в среднем виброперемещение, сопровождающееся поперечными колебаниями с периодическими ударами частицы об ограничивающие стенки, с некоторой средней скоростью $V\{0, V_2\}$.

Уравнения относительного движения частицы в промежутках между ударами в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} mx'' &= -Fx'(x^2 + y^2)^{-1/2} + \\ &+ mA\omega^2 \sin \omega t \\ my'' &= -Fy'(x^2 + y^2)^{-1/2} + P, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$(x \neq 0, b)$$

где A, ω — амплитуда и частота гармонических колебаний опоры (лотка). При $x=0, b$ частица испытывает косые удары с ограничивающими стенками, для которых имеем соотношения

$$x_+ = -Rx_-, \quad y_+ = f(y_-) \quad (3.2)$$

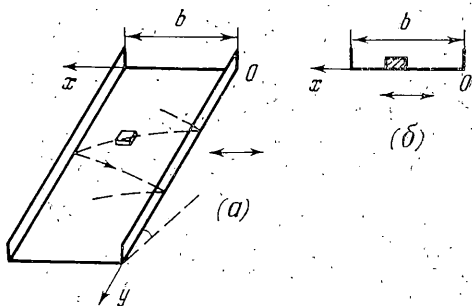
Здесь R — коэффициент восстановления нормальной составляющей скорости частицы. Конкретный вид функции $f(y_-)$, задающей касательную составляющую скорости после удара, может быть тот или иной в зависимости от принятой гипотезы [3, 7].

Система уравнений (3.1), (3.2) точно не интегрируется. Для приближенного исследования воспользуемся допущением [1], согласно которому в установившихся периодических движениях частицы величина my'' мала, и при определении этих движений ею можно пренебречь.

Принятием этой гипотезы одновременно постулируется независимость характера периодического движения от вида функции $f(y_-)$ в уравнениях удара (3.2), которая по этой причине не конкретизировалась. Действительно, при любом виде функции $f(y_-)$ уже непосредственно сразу после удара должно выполняться отвечающее гипотезе соотношение

$$y' = |x'| \gamma (1 - \gamma^2)^{-1/2} \quad (3.3)$$

Тем самым предполагается, что послеударная продольная скорость частицы y_+ , какова бы она фактически ни была, в последующем быстро изменяется и нарушенное при ударе соотношение (3.3) вскоре после него,



Фиг. 4

за пренебрежимо малую часть периода движения, восстанавливается. Отметим, что это тем ближе действительности, чем сильнее неравенство $P < F$.

Учитывая все сказанное выше, для приближенного исследования задачи вместо (3.1), (3.2) получим конечное соотношение (3.3) и уравнения

$$\begin{aligned} mx'' &= \mp (F^2 - P^2)^{1/2} + mA\omega^2 \sin \omega t \text{ при } x \neq 0, b \\ x_+ &= -Rx_- \text{ при } x=0, b \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь знак минус перед корнем соответствует движению частицы в положительную сторону оси x ($x' > 0$), знак плюс — в отрицательную сторону этой оси ($x' < 0$). Укажем еще, что (3.3) получается из второго уравнения (3.1), если в нем, в силу принятого допущения, положить $my'' = 0$ и разрешить полученное соотношение относительно переменной y ; а (3.4) — из первого уравнения (3.1), путем подстановки в него значения y согласно (3.3), и первого уравнения (3.2). Второе соотношение (3.2) опущено за ненадобностью при данном способе приближенного решения.

Итак, задача фактически свелась к рассмотрению более простой системы «тело в вибрирующей полости» [3, 4] (фиг. 4, б). Будем искать симметричные двухударные j -кратные периодические движения этой системы. Такие движения характеризуются тем, что их период $T_* = 2\pi j/\omega$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) может состоять из нескольких периодов возмущающей силы, а внутри периода движения частица дважды ударяется о стенки (по одному разу о каждую). В условии симметричности (1.12) при этом следует положить $T = 1/2 T_* = \pi j/\omega$.

Введем безразмерные переменные

$$\tau = \omega t, \quad \xi = x/A, \quad h = (F^2 - P^2)^{1/2}/mA\omega^2, \quad \sigma = b/2A \quad (3.5)$$

и запишем уравнения (3.4) в следующей безразмерной форме (штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ):

$$\xi'' = \mp h + \sin \tau \text{ при } \xi \neq 0, 2\sigma; \quad \xi'_+ = -R\xi'_- \text{ при } \xi = 0, 2\sigma \quad (3.6)$$

Пусть в момент $\tau = \tau_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) частица ударяется о стенку $x = 0$, после чего движется от нее с начальной скоростью ξ'_k . Законы изменения текущей скорости и координаты при этом будут

$$\xi' = \xi'_k - h(\tau - \tau_k) - \cos \tau + \cos \tau_k \quad (3.7)$$

$$\xi = \xi'_k(\tau - \tau_k) - 1/2 h(\tau - \tau_k)^2 - \sin \tau + \sin \tau_k + (\tau - \tau_k) \cos \tau_k$$

В момент соударения частицы с противоположной стенкой $\tau = \tau_{k+1}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} -R^{-1}\xi'_{k+1} &= \xi'_k - h(\tau_{k+1} - \tau_k) - \cos \tau_{k+1} + \cos \tau_k \\ 2\sigma &= \xi'_k(\tau_{k+1} - \tau_k) - 1/2 h(\tau_{k+1} - \tau_k)^2 - \sin \tau_{k+1} + \sin \tau_k + (\tau_{k+1} - \tau_k) \cos \tau_k \end{aligned} \quad (3.8)$$

Полагая в этой системе двух уравнений в конечных разностях первого порядка $\tau_{k+1} - \tau_k = \pi j$, $\xi'_{k+1} = -\xi'_k$, получим уравнения для определения периодического режима (величин ξ'_k , τ_k)

$$(1-R)R^{-1}\xi'_k + \pi j h + \cos(\pi j + \tau_k) - \cos \tau_k = 0 \quad (3.9)$$

$$\pi j \xi'_k - 2\sigma - 1/2 h \pi^2 j^2 - \sin(\pi j + \tau_k) + \sin \tau_k + \pi j \cos \tau_k = 0$$

При $j=2, 4, 6, \dots$ из первого уравнения найдем $\xi_k' = -\pi j h R (1-R)^{-1}$. Поскольку удары возможны только при $\xi_k' > 0$, режимы с четной кратностью не существуют.

Теперь положим $j=1, 3, 5, \dots$ и выразим значение доударной скорости частицы в этом случае

$$\xi_k' = (2 \cos \tau_k - \pi j h) R (1-R)^{-1} \quad (3.10)$$

Подставляя это значение во второе соотношение (3.9), после некоторых преобразований получим уравнение для определения величины τ_k :

$$j s \cos \tau_k + \sin \tau_k - d = 0, \quad s = \frac{1}{2} \pi (1+R) (1-R)^{-1}, \quad d = \frac{1}{2} \pi j^2 h s + \sigma \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) имеет решение

$$\cos \tau_k = [j s d \pm (1 + j^2 s^2 - d^2)^{1/2}] (1 + j^2 s^2)^{-1} \quad (3.12)$$

допускающее при $1 + j^2 s^2 - d^2 \geq 0$ или, что то же самое, при

$$\sigma \leq (1 + j^2 s^2)^{1/2} - \frac{1}{2} \pi j^2 h \quad (3.13)$$

вещественные значения. Тем самым показано, что режимы такого типа существуют.

Для определения условий существования и устойчивости найденных режимов исследуем уравнение в вариациях конечно-разностной системы (3.8) вблизи ее решения (3.10), (3.12). Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$R^{-2} \xi_k' \rho^2 + [R^{-1} \pi j (h - \sin \tau_k) - 2R^{-1} \xi_k' - \pi j (h + \sin \tau_k)] \rho + \xi_k' = 0 \quad (3.14)$$

Анализ неравенств Шура [3] показывает, что устойчивым может быть только режим со знаком плюс в формуле (3.12).

Фиксируя в (3.14) значение $R < 1$ ($s > \frac{1}{2} \pi$) и рассматривая плоскость параметров h, σ , можно построить на этой плоскости области существования и устойчивости симметричных двухударных 1, 3, 5...-кратных движений частицы. В данном случае это будут области, примыкающие к оси ординат σ и ограниченные сверху прямой

$$\sigma = (1 + j^2 s^2)^{1/2} - \frac{1}{2} \pi j^2 h \quad (3.15)$$

служащей аperiodической границей области устойчивости режима (граница N_+). Соотношение (3.15) найдено в результате решения уравнения, полученного из (3.14) подстановкой значения $\rho = 1$, и, естественно, совпадает с границей области вещественных значений τ_k (случай равенства в (3.13)). Нижней границей каждой такой области является колебательная граница области устойчивости (граница N_-), определяемая из уравнения (3.14) при $\rho = -1$.

Для определения средней скорости виброперемещения в режимах с ударами в силу (3.3) имеем выражение

$$V = T_*^{-1} \int_0^{T_*} y' dt = 2\gamma (1 - \gamma^2)^{-1/2} (\pi j)^{-1} A \omega \quad (j=1, 3, 5, \dots) \quad (3.16)$$

Из сказанного выше относительно характера областей существования и устойчивости рассматриваемых виброударных режимов следует, что при фиксированном R (фиксированном s) каждому значению параметра возбуждения h отвечает множество значений безразмерного зазора σ , а в силу (3.16) — и скорости виброперемещения V . В каждом j -кратном режиме при нижних значениях σ , определяемых границей N_- области существования и устойчивости, имеем минимальную при данном h скорость трансформации, при верхних, соответствующих формуле (3.15), — максималь-

ную. В то же время при безударном движении (при отсутствии ограничителей) имеем при прочих равных условиях лишь один периодический режим со средней скоростью транспортировки [1]:

$$V = 2\gamma(1-\gamma^2)^{-1/2}\pi^{-1}A\omega F(\delta_{\pm}, \delta_{\pm}^*) \quad (3.17)$$

Анализ выражений (3.16), (3.17) показывает, что в виброударных режимах движения могут достигаться существенно большие, чем в чисто вибрационных режимах, скорости транспортировки.

Это хорошо видно из фиг. 5, где наряду с графиком изменения средней скорости обычного вибротранспортирования (кривая 1) приведены графики максимальной средней скорости при транспортировке с ударами (кривые 2, 3). Сплошные кривые 2, 3 соответствуют однократным движениям ($j=1$) и рассчитаны для случаев $R=0$ (кривая 2) и $R=0.5$ (кривая 3), штрихпунктирные — соответственно при тех же значениях R трехкратным движениям ($j=3$). На графиках по оси ординат отложена пропорциональная средней скорости транспортировки величина

$$V^0 = V[2\gamma(1-\gamma^2)^{-1/2}\pi^{-1}A\omega]^{-1}$$

значения которой в безударных режимах определялись согласно (3.17) с использованием формул и графиков [3]; в режимах с ударами, в силу (3.15), (3.16); по формуле

$$V^0 = j^{-1}[(1+j^2s^2)^{1/2} - 1] / 2\pi s j^2 h$$

Отметим, что из предыдущего вполне очевидно и причина повышенной интенсивности виброударных режимов. Она состоит в явлении «затягивания» — существовании в виброударных системах установившихся

колебаний с резко большими, чем в соответствующей безударной системе, амплитудами колебаний [3, 4].

Поступила 21 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов В. В. Движение тела по шероховатой наклонной плоскости, совершающей поступательные поперечные колебания в своей плоскости. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3.
2. Андронов В. В., Нагаев Р. Ф. Вибрационное перемещение вдоль плоскости, колеблющейся перпендикулярно линии наибольшего ската. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 1.
3. Кобринский А. Е., Кобринский А. А. Виброударные системы. М., «Наука», 1973.
4. Бабицкий В. И. Теория виброударных систем. М., «Наука», 1978.
5. Пэнлеве П. Лекции о трении. М., Гостехиздат, 1954.
6. Нагаев Р. Ф., Рубин Б. Б. О торможении при криволинейном движении по наклонной плоскости. Машиноведение, 1974, № 1.
7. Нагаев Р. Ф. Периодические режимы вибрационного перемещения. М., «Наука», 1978.
8. Блехман И. И., Джанелидзе Г. Ю. Вибрационное перемещение. М., «Наука», 1964.