

ОПТИМИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТОНКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

А. Б. СМЕРНОВ, В. А. ТРОИЦКИЙ

(Ленинград)

Задачам оптимизации собственных частот одномерных упругих систем заданного веса или оптимизации веса при заданных собственных частотах посвящено большое число исследований [1, 2]. При решении их используются различные постановки и различные методы [1-4].

Здесь решается задача оптимизации собственных частот криволинейных тонких упругих стержней, поставленная в форме изопериметрической вариационной задачи [4]. Другие задачи по оптимизации криволинейных стержней рассмотрены в [5-7]. Численные расчеты для круговых стержней выполнены градиентным методом.

1. Постановка задачи. Считаем заданными криволинейную ось стержня и его объем V_0 , длину l и форму поперечного сечения. На площадь $F(s)$ переменного поперечного сечения наложено ограничение

$$F_1 \leq F(s) \leq F_2 \quad (1.1)$$

в котором постоянные F_1 и F_2 такие, что стержень является тонким.

Рассмотрим малые деформации стержня. Будем полагать ось стержня нерастяжимой и пренебрегать деформацией и изменением формы поперечных сечений. Используем подвижную систему координат, такую, что орты осей x, y, z являются ортами нормали \mathbf{n} , бинормали \mathbf{b} и касательной $\boldsymbol{\tau}$ изогнутой оси стержня.

Квадрат любой собственной частоты колебаний ω_n^2 равен отношению амплитудных значений потенциальной Π и кинетической T энергий [8]. Будем нормировать собственные функции, требуя выполнения равенства

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} ds = 1 \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$ — вектор малых перемещений, ds — элемент дуги оси стержня. Тогда квадрат собственной частоты равен амплитудному значению потенциальной энергии [8]:

$$\omega_n^2 = \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{L} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{L} ds, \quad \mathbf{K} = \frac{\mathbf{nn}}{EJ_x} + \frac{\mathbf{bb}}{EJ_y} + \frac{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}}{\mu J_p} \quad (n=1,2,\dots) \quad (1.3)$$

где $\mathbf{L}(L_x, L_y, L_z)$ — вектор изгибающих моментов, \mathbf{K} — тензор податливости.

Вектор углов поворота $\boldsymbol{\theta}(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$, вектор малых перемещений \mathbf{u} и приращение вектора Дарбу за счет деформации $\delta\boldsymbol{\omega}$ ($\delta\omega_x, \delta\omega_y, \delta\omega_z$) связаны между собой соотношениями Клебша для криволинейных стержней,

которые при сделанных предположениях запишутся в виде [10]:

$$\frac{du}{ds} = \theta \times \tau, \quad \frac{d\theta}{ds} = \delta \omega \quad (1.4)$$

Приращение вектора Дарбу $\delta\omega$ и вектор изгибающих моментов L связаны соотношениями Кирхгофа [10]:

$$\delta\omega = K \cdot L \quad (1.5)$$

Условие постоянства объема представляется равенством

$$\int_0^l F ds = V_0 \quad (1.6)$$

Задача оптимального управления формулируется следующим образом: среди кусочно-непрерывных функций $F(s)$, подчиненных неравенству (1.1) и удовлетворяющих изопериметрическому условию (1.6), найти такую, которая сообщает минимум (или максимум) функционалу (1.3) при выполнении условия (1.2) и связей (1.4), (1.5).

Для стержня круглого сечения, ось которого является частью окружности радиуса a , орты главных осей инерции сечения можно считать совпадающими с осями \mathbf{a} и \mathbf{b} . Связь между моментами инерции сечения и его площадью представляется соотношением $J_x = J_y = pF^2$, $p = 1/4\pi$.

Введем обозначения

$$q_{n,1} = \frac{\omega_n^2 \rho a^4}{pEF_1}, \quad f = \frac{F}{F_1}, \quad \varphi = \frac{s}{a}, \quad \alpha = \frac{l}{a}, \quad V = \frac{V_0}{aF_1}, \quad r = \frac{F_2}{F_1}$$

Ограничение (1.1) переписется в форме

$$1 \leq f(\varphi) \leq r \quad (1.7)$$

Вводя дополнительный параметр управления ϑ , построим зависимость [4]:

$$\psi = (1-f)(f-r) - \vartheta^2 = 0 \quad (1.8)$$

Условие постоянства объема примет форму

$$\int_0^\alpha f d\varphi = V \quad (1.9)$$

Для кругового стержня соотношения Клебша в проекциях на оси x , y , z запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} u_x' + u_\tau &= a\theta_y, & u_y' &= -a\theta_x, & u_\tau' - u_x &= 0 \\ \theta_x' + \theta_\tau &= a\delta\omega_x, & \theta_y' &= a\delta\omega_y, & \theta_\tau' - \theta_x &= a\delta\omega_\tau \end{aligned} \quad (1.10)$$

Используя связи (1.5) и (1.10), можно выразить компоненты вектора изгибающих моментов L через составляющие векторов \mathbf{u} и θ в виде

$$L_x = f^2(a\theta_\tau - u_y''), \quad L_y = f^2(u_\tau' + u_\tau'''), \quad L_\tau = f^2(a\theta_\tau' + u_y') \quad (1.11)$$

Амплитудные значения потенциальной и кинетической энергий распадаются на две группы слагаемых, зависящих от смещений в плоскости стержня и от смещений, перпендикулярных к ней. Это дает возможность отдельно изучать плоские и неплоские колебания стержня, ось которого изогнута по дуге окружности.

2. Колебания стержня в его плоскости. Из связей (1.10) видно, что независимой функцией является прогиб u_τ . Потенциальная и кинетическая энергии плоских колебаний запишутся следующим образом:

$$q_{n,1}^4 = \Pi_1 = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \frac{L_y^2}{f^2} d\varphi \quad (n=1,2,\dots) \quad (2.1)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^\alpha f(u_\tau'^2 + u_\tau''^2) d\varphi = 1 \quad (2.2)$$

Составим расширенный функционал [4]:

$$I_1 = q_{n,1}^4 + \rho_{11}(T_1 - 1) + \rho_{12} \left(\int_0^\alpha f d\varphi - V \right) + \int_0^\alpha \lambda_y [L_y - f^2(u_\tau' + u_\tau''')] d\varphi + \int_0^\alpha \mu_1 \psi d\varphi \quad (2.3)$$

где ρ_{11} , ρ_{12} , λ_y , μ_1 — неопределенные множители Лагранжа, учитывающие изопериметрические условия (1.6) и (1.9), вторую из дифференциальных связей (1.11) и ограничение (1.8).

Необходимое условие стационарности $\Delta I_1 = 0$ функционала (2.3) дает уравнения

$$(\lambda_y f^2)''' + (\lambda_y f^2)' - \rho_{11} [(fu_\tau')' - fu_\tau] = 0 \quad (2.4)$$

$$-\frac{L_y^2}{f^3} - 2\lambda_y f(u_\tau' + u_\tau''') + \frac{1}{2} \rho_{11}(u_\tau'^2 + u_\tau''^2) + \rho_{12} + \mu_1(1+r-2f) = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{L_y}{f^2} + \lambda_y = 0 \quad (2.6)$$

$$2\mu_1 \psi = 0 \quad (2.7)$$

и внеинтегральные члены, которые с учетом (2.6) запишутся следующим образом:

$$[-L_y \delta u_\tau'' + L_y' \delta u_\tau' - (L_y'' + L_y + \rho_{11} f u_\tau') \delta u_\tau]_0^\alpha = 0 \quad (2.8)$$

Исключая λ_y из уравнений (2.4) и (2.5), получим

$$L_y''' + L_y' + \rho_{11} ((fu_\tau')' - fu_\tau) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{L_y^2}{f^3} + \frac{1}{2} \rho_{11}(u_\tau'^2 + u_\tau''^2) + \rho_{12} + \mu_1(1+r-2f) = 0 \quad (2.10)$$

Умножив равенство (2.9) на u_τ и проинтегрировав его по промежутку $[0, \alpha]$, с помощью (2.8) легко установить, что $\rho_{11} = -q_{n,1}^4$. При этом уравнение (2.9) описывает свободные плоские колебания стержня.

Условие (2.8) выполняется за счет граничных условий. Так, в случае жесткой заделки торцов допустимыми являются вариации, для которых $\delta u_\tau = \delta u_\tau' = \delta u_\tau'' = 0$ (на концах перемещение и угол поворота равны нулю). Если конец стержня шарнирно закреплен, то отсутствуют смещение и изгибающий момент $\delta u_\tau = \delta u_\tau' = 0$ и $L_y = 0$. На свободном конце силовые характеристики равны нулю, что равносильно требованиям $L_y = L_y' = 0$ и $L_y'' + L_y - q_{n,1}^4 f u_\tau' = 0$.

Рассмотрим формулы (2.7) и (2.10). Если $\psi = 0$, тогда из равенства (1.8) следует, что функция f принимает одно из крайних допустимых значений, и условие (2.10) позволяет определить множитель μ_1 . Если же параметр $\psi \neq 0$, то множитель $\mu_1 = 0$, и из (2.10) находится функция f .

Необходимое условие Вейерштрасса для рассматриваемой задачи может быть записано в виде [4]:

$$H_1(f_0, u_\tau, L_y, \mu_1) \geq H_1(f, u_\tau, L_y, \mu_1) \quad (2.11)$$

где f_0 отвечает оптимальному решению, а f — любая допустимая кривая. Функция H_1 имеет вид

$$H_1 = \pm \left[\frac{L_y^2}{2f^2} + \frac{1}{2} q_{n,1}^4 (u_\tau^2 + u_\tau'^2) + \mu_1 \psi + \rho_{12} f \right] \quad (2.12)$$

Здесь верхний знак соответствует задаче отыскания профиля стержня, сообщающего минимум параметру $q_{n,1}$, а нижний знак — задаче максимизации частоты.

Рассмотрим случай минимизации параметра $q_{n,1}$. Учитывая выражение (2.12) для функции H_1 , из условия (2.11) получим

$$f_0 = 1, \text{ если } H_1(1) > H_1(r); \quad f_0 = r, \text{ если } H_1(r) > H_1(1) \quad (2.13)$$

Таким образом, функционал (2.1) достигает минимума на кусочно-постоянной функции $f(\varphi)$. В точках разрыва управления должны выполняться условия Эрдмана — Вейерштрасса, которые в данной задаче приводят к непрерывности силовых характеристик стержня и функции H_1 . Перемещение и угол поворота считаются непрерывными.

В случае максимизации собственной частоты будет существовать точка f^* , определяемая формулой

$$f^* = \left(\frac{L_y^2}{\frac{1}{2} q_{n,1}^4 (u_\tau^2 + u_\tau'^2) - \rho_{12}} \right)^{1/3} \quad (2.14)$$

которая сообщает максимум функции H_1 . Учитывая ограничение (4.7) и условие (2.11), получим

$$f_0 = 1, \text{ если } f^* \leq 1; \quad f_0 = f^*, \text{ если } 1 < f^* < r; \quad f_0 = r, \text{ если } f^* \geq r \quad (2.15)$$

Тогда с учетом условий Эрдмана — Вейерштрасса можно сделать вывод, что профиль оптимального стержня непрерывный.

Рассматривая различные условия закрепления торцов стержня, можно получить некоторые качественные характеристики оптимальных профилей. Так, например, в случае максимизации частоты на свободном или шарнирно закрепленном конце $f_0 = 1$, а на заделанном конце стержня $f_0 = r$.

3. Оптимизация частот неплоских колебаний стержня. Колебания из плоскости стержня определяются, как видно из связей (1.10), двумя функциями u_y и θ_τ . Амплитудные значения потенциальной и кинетической энергий имеют вид

$$q_{n,2}^4 = \Pi_2 = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \frac{(L_x^2 + \lambda L_\tau^2)}{f^2} d\varphi \quad (n=1,2,\dots), \quad T_2 = \frac{1}{2} \int_0^\alpha f u_y^2 d\varphi = 1 \quad (3.1)$$

Расширенный функционал в случае минимизации частоты запишется следующим образом:

$$I_2 = q_{n,2}^4 + \rho_{21} (T_2 - 1) + \rho_{22} \left(\int_0^\alpha f d\varphi - V \right) + \int_0^\alpha \mu_2 \psi d\varphi + \quad (3.2)$$

$$+ \int_0^{\alpha} [\lambda_x (L_x - f^2 (a\theta_{\tau} - u_y'')) + \lambda_{\tau} (L_{\tau} - f^2 (a\theta_{\tau}' + u_y'))] d\varphi$$

где ρ_{21} , ρ_{22} , λ_x , λ_{τ} , μ_2 — неопределенные множители Лагранжа.

Необходимое условие стационарности $\Delta I_2 = 0$ функционала (3.2) после преобразований приводит к уравнениям

$$\lambda L_{\tau}' - L_x = 0, \quad L_x'' + \lambda L_{\tau}' + q_{n,2}^4 u_y = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{f^3} (L_x^2 + \lambda L_{\tau}^2) - \frac{1}{2} q_{n,2}^4 u_y^2 + \rho_{22} + \mu_2 (1+r-2f) = 0, \quad 2\mu_2 \vartheta = 0 \quad (3.4)$$

и условиям на торцах

$$[-L_x \delta u_y' + L_x' \delta u_y + 2\lambda L_{\tau} (a\delta\theta_{\tau} + \delta u_y)]_0^{\alpha} = 0 \quad (3.5)$$

удовлетворяющимся за счет закреплений концов стержня. Уравнения (3.3) описывают свободные неплоские колебания стержня. Относительно уравнений (3.4) можно сделать те же замечания, что и о формулах (2.7) и (2.10).

Необходимое условие Вейерштрасса приводит к тому, что функция

$$H_2 = \pm \left[\frac{L_x^2 + \lambda L_{\tau}^2}{2f^2} + \frac{1}{2} q_{n,2}^4 u_y^2 f + \rho_{22} f + \mu_2 \vartheta \right] \quad (3.6)$$

должна достигать максимума на допустимом оптимальном управлении. Знак у функции H_2 выбирается, как и в случае плоских колебаний. При минимизации собственной частоты колебаний стержня оптимальный закон $f_0(\varphi)$ будет определяться формулой (2.13), только вместо функции H_1 необходимо подставить функцию H_2 . Аналогично, в случае максимизации частоты оптимальный профиль стержня задается формулой (2.15), где величина f^* определяется следующим выражением:

$$f^* = \left(\frac{L_x^2 + \lambda L_{\tau}^2}{\frac{1}{2} q_{n,2}^4 u_y^2 + \rho_{22}} \right)^{1/3} \quad (3.7)$$

Замечания о характере оптимальных профилей стержня, сделанные для плоских колебаний, справедливы и в данном случае.

4. Численный метод и результаты вычислений. Решение задачи можно получить численным методом. Ограничение на параметр управления будем учитывать методом внешних штрафных функций [14]. Для плоских колебаний последнее слагаемое в функционале (2.3) заменится функцией штрафа вида (K_f — постоянная величина)

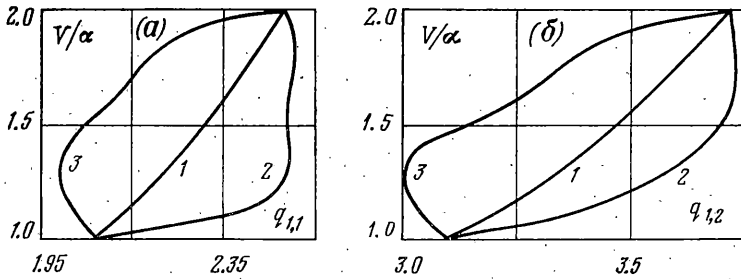
$$K_f \int_0^{\alpha} \eta(\Phi) \Phi^2 d\varphi, \quad \Phi = (1-f)(f-r) \quad (4.1)$$

$$\eta(\Phi) = 0, \text{ если } \Phi \geq 0; \quad \eta(\Phi) = 1, \text{ если } \Phi < 0$$

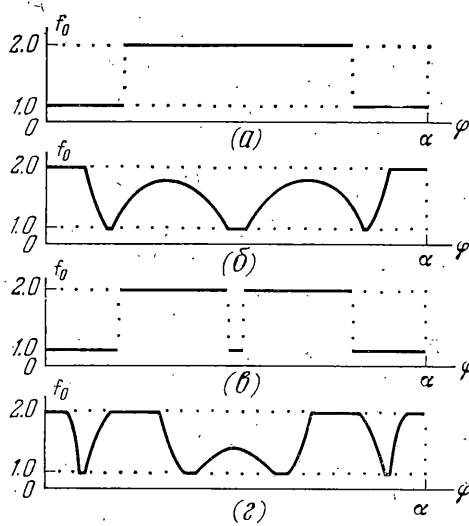
Условия стационарности нового функционала останутся прежними; пропадет лишь равенство (2.7), и формула (2.10) примет вид

$$\frac{L_y^2}{f^3} - \frac{1}{2} q_{n,1}^4 (u_{\tau}^2 + u_{\tau}'^2) + \rho_{12} + 2K_f \eta \Phi (1+r-2f) = 0 \quad (4.2)$$

Численное решение задачи распадается на два этапа: при заданном законе изменения площади поперечного сечения $f(\varphi)$ необходимо найти функции u_{τ} , L_y и частотный параметр $q_{n,1}$; по найденным на первом этапе



Фиг. 1



Фиг. 2

величинам построить добавку Δf к функции f так, чтобы значение функционала приближалось к экстремальному.

Проблема определения частотного параметра и собственных функций решалась методом начальных параметров [12]. На втором этапе применялся градиентный метод первого порядка [4, 11], использующий нарушение условия (4.2).

В качестве примера приведем результаты расчета для полукольца с жестко закрепленными торцами при значении $r=2$. На фиг. 1, а, б представлены кривые, отвечающие оптимизации первой и второй собственных частот плоских колебаний в зависимости от отношения V/α . Кривые 1 характеризуют стержень постоянной площади сечения, а кривые 2 и 3 отвечают задачам максимизации и минимизации частот соответственно.

На фиг. 2 показаны профили стержней, обладающих оптимальными частотами для случая $V/\alpha=1,6$. При минимизации и максимизации параметра $q_{n,1}$ получаются стержни, площади которых изображены на фиг. 2, а, б (фиг. 2, в, г отвечает оптимизации второй частоты). Тем же способом были рассчитаны оптимальные формы при колебаниях полукольца из плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Niordson F. I., Pedersen P.* A review of optimal structural design. The Technical University of Denmark, DSAMM, Report, 1972, No. 31. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1973, № 2.)
2. *Леник Ю. Р.* Приложение принципа максимума Понтрягина в задачах прочности, устойчивости и колебаний конструкций (обзор). Механика. Сб. перев., 1974, № 6.
3. *Гринев В. Б., Филиппов А. П.* Оптимизация элементов конструкций по динамическим характеристикам. Киев, «Наукова думка», 1975.
4. *Троицкий В. А.* Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л., «Машиностроение», 1976.
5. *Бинкевич Е. В., Дзюба А. П.* Проектирование кривого бруса минимального веса. В сб.: Теоретические и экспериментальные исследования прочности, устойчивости и динамики конструкций. Днепропетровск, Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1973.
6. *Баничук Н. В.* Определение оптимальных форм упругих криволинейных стержней. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 6.
7. *Ther mann K.* Zum optimalen eines schwingenden kreisbogenträgers. ZAMM, 1972, Bd 52, № 4.
8. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.—Л., Главн. ред. общетехн. лит. и номогр., 1935.
9. *Голубев О. Б.* Обобщение теории тонких стержней. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1963, № 226.
10. *Лурье А. И.* О малых деформациях криволинейных стержней. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1941, № 3.
11. *Брайсон А., Хо Ю Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М., «Мир», 1972.
12. *Троицкий В. А.* Матричные методы расчета колебаний стержневых систем. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1960, № 240.