МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1979

УДК 539.3:534.1

РАСЧЕТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧКИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ, ИСПОЛЬЗУЕМОЙ В КАЧЕСТВЕ ГИБКОГО ЭЛЕМЕНТА ВОЛНОВОЙ ПЕРЕДАЧИ

Ю. Б. НЕДЕШЕВ

(Москва)

Построен асимптотически рекуррентный процесс определения нижних частот и форм колебаний шарнирно закрепленной оболочки вращения отрицательной гауссовой кривизны, имеющей так называемый собственный размер. Решение получено, исходя из полных моментных уравнений теории оболочек при помощи разложения искомых величин в асимптотические суммы по малому параметру h – относительной полутолщине оболочки. Приведен пример численного расчета.

В конструкциях волновых передач все большее применение находят гибкие элементы, имеющие форму оболочки отрицательной кривизны. Такие оболочки обладают повышенной податливостью на распирающее воздействие генератора волн по сравнению с цилиндрическими и коническими оболочками. У шарнирнозакрепленных оболочек отрицательной гауссовой кривизны существуют размеры, при которых они становятся более гибкими [1]. Такие размеры получили название собственных. Так как податливость – одно из наиболее важных требований, предъявляемых к гибким элементам волновых передач, то целесообразно использовать оболочки отрицательной кривизны именно собственного размера.

1. При работе волновой передачи в оболочке генерируются бегущие волны. Так как нижняя собственная частота колебаний оболочек отрицательной кривизны собственного размера мала [2] и имеет порядок ε^q, $q>0$ ($\varepsilon=h^{1/2}$, h – относительная полутолщина), то в оболочке на рабочих частотах может возникнуть резонанс.

Следуя [3], будем строить решение методом расчленения напряженного состояния: решение в первом приближении ищется в виде основного интеграла системы уравнений теории оболочек, удовлетворяющего тангенциальным граничным условиям, и дополнительного интеграла, снимающего невязку в нетангенциальных граничных условиях. При этом в тангенциальных граничных условиях появится невязка, но уже в величинах следующего порядка малости. Она устраняется следующим приближением основного интеграла.

Граничные условия, соответствующие шарнирному закреплению

$$T_1=0,\ u_2=0,\ G_1=0,\ w=0 \tag{1.1}$$

Первое и второе из них – тангенциальные. В дальнейшем будем называть их соответственно силовым и геометрическим граничными условиями.

Уравнения равновесия, описывающие напряженное состояние произвольной оболочки вращения отрицательной кривизны, имеют вид:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \xi}+r'(T_1-T_2)+A\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}+\frac{rr''}{A^2}N_1=Ar\lambda^2u_1$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2}+r\frac{\partial S}{\partial \xi}+2r'S-N_2=Ar\lambda^2 u_2 \qquad (1.2)$$

$$-\frac{rr''}{A^2}T_1+T_2+\left[\frac{\partial (rN_1)}{\partial \xi}+\frac{\partial (AN_2)}{\partial \alpha_2}\right]=Ar\lambda^2 w$$

Формулы, связывающие деформации и смещения, запишем в форме

$$\frac{1}{A}\frac{\partial u_1}{\partial \xi}+\frac{r''}{A^3}w=\varepsilon_1, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}+\frac{r'}{Ar}u_1-\frac{w}{Ar}=\varepsilon_2$$

$$\frac{A}{r}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{u_1}{A}\right)+\frac{r}{A}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{u_2}{r}\right)=\omega \qquad (1.3)$$

Здесь приняты обозначения монографии [4]. Уравнения записаны в безразмерном виде при помощи подстановок

$$R\xi=\alpha_{10},\ Rr=r_0,\ \lambda^2=E^{-1}\rho R^2\Omega^2$$

$$2Eh_0(T_i,\ S)=(T_{i0},\ S_0),\ R(u_i,\ w)=R(u_{i0},\ w_0) \qquad (i=1,\ 2)$$

Где нулевой индекс стоит при размерных величинах; R — некоторый характерный радиус оболочки; ξ, α_2 — безразмерные координаты соответственно по меридиану и параллели оболочки; r — безразмерный радиус; r' и r'' — первая и вторая производные от радиуса по координате ξ; ρ — плотность материала; h_0 — полутолщина оболочки. Оболочка совершает гармонические колебания, поэтому множитель $\sin \Omega t$ при искомых и заданных величинах опускается.

Считаем, что искомое решение меняется относительно медленно. Подразумевая под символом K любую из неизвестных величин, зададим его в виде асимптотической суммы по малому параметру ε:

$$K=\varepsilon^0 K^{(0)}+\varepsilon^1 K^{(1)}+\varepsilon^2 K^{(2)}+\ldots,\quad \varepsilon=(h_0 R^{-1})^{1/2} \qquad (1.4)$$

Такую же сумму составим для квадрата безразмерной частоты

$$\lambda^2=\varepsilon^0\lambda_0^2+\varepsilon^1\lambda_1^2+\varepsilon^2\lambda_2^2+\ldots \qquad (1.5)$$

Подставив (1.4), (1.5) в граничные условия и полную систему уравнений теории оболочек, сгруппируем члены полученных равенств при одинаковых степенях ε. Оценив силовые факторы системы относительно перемещений, получим, что моментные члены в уравнениях равновесия при построении медленно меняющихся решений на первых этапах интегрирования учитывать не следует. Учитывая результаты [2, 5], положим $\lambda_0=0$. Приравнивая во всех уравнениях нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную систему уравнений.

2. Система первого приближения уравнений равновесия получается однородной и имеет вид, аналогичный системе (1.2), в которой правые части равны нулю, усилия снабжены верхним нулевым индексом, а слагаемые, содержащие усилия N_i, отброшены. Задаваясь решениями этой системы в виде тригонометрических рядов по α_2, можно свести ее к одному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\Phi_n''+r^{-1}r''(n^2-1)\Phi_n=0 \qquad (2.1)$$

Здесь Φ_n — функция напряжений. Коэффициенты разложения усилий в ряды Фурье $T_{in}^{(0)}, S_n^{(0)}$ определяются через Φ_n при помощи формул

$$T_{1n}^{(0)}=\frac{A}{r^2}\Phi_n,\quad T_{2n}^{(0)}=\frac{r''}{Ar}\Phi_n,\quad S_n^{(0)}=-\frac{1}{n}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\Phi_n}{r}\right)$$

Силовые граничные условия при $\xi=\xi_i$ ($i=1, 2$) для Φ_n принимают вид $\Phi_n=0$. В общем случае решение уравнения (2.1) при однородных граничных условиях равно нулю, но при собственных размерах оболочки существует нетривиальное решение задачи.

Пусть Φ_i — линейнонезависимые решения уравнения (2.1). Звездочкой обозначим усилия и деформации, определяемые этими решениями. Удовлетворяя граничным условиям, получим, что для оболочки собственного размера усилия можно определить с точностью до произвольной постоянной $T_{in}^{(0)}=cT_{i*}$, $S_n^{(0)}=cS_*$.

Систему первого приближения геометрических уравнений сведем к одному дифференциальному уравнению для n — компоненты ряда Фурье окружного перемещения $u_{2n}^{(0)}$. Получим уравнение, совпадающее в левой части с (2.1), в правой части вместо нуля стоит функция

$$H(\xi)=cf(\xi),\ f(\xi)=A\frac{d\omega_*}{d\xi}+\left(\frac{rr''}{A}+\frac{Ar'}{r}\right)\omega_*+\frac{A^2n}{r}\varepsilon_{1*}+r''n\varepsilon_{2*}$$

Его решение можно записать в следующем виде:

$$u_{2n}^{(0)}=\Phi_2\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\frac{\Phi_1cf}{W}d\xi-\Phi_1\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\frac{\Phi_2cf}{W}d\xi+B_1\Phi_1+B_2\Phi_2$$

$$W=\Phi_1\Phi_2'-\Phi_2\Phi_1' \tag{2.2}$$

Здесь Φ_i — по прежнему линейнонезависимые решения уравнения (2.1); B_i, ξ_0 — произвольные постоянные (одна из которых может быть выражена через другие две). Подставляя решение (2.2) в геометрические граничные условия, получим систему двух уравнений

$$B_1\Phi_1(\xi_i)+B_2\Phi_2(\xi_i)=\Phi_1(\xi_i)\int\limits_{\xi_0}^{\xi_i}\frac{\Phi_2cf}{W}d\xi-\Phi_2(\xi_i)\int\limits_{\xi_0}^{\xi_i}\frac{\Phi_1cf}{W}d\xi\quad(i=1,2)$$

Главный определитель этой системы равен нулю, так как размер оболочки собственный (это равенство является условием существования собственного размера). Следовательно, для того, чтобы решение существовало и было отлично от нуля, необходимо потребовать равенства нулю дополнительных определителей системы, что приведет к уравнению

$$\Phi_2(\xi_1)\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\Phi_1cf}{W}d\xi-\Phi_1(\xi_1)\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\Phi_2cf}{W}d\xi=0 \tag{2.3}$$

Так как функции Φ_1 и Φ_2 не могут одновременно обращаться в нуль в одной точке, приходим к выводу, что равенство (2.3) выполняется только в том случае, когда $c=0$, и, следовательно, равны нулю силовые факторы первого приближения.

Перемещения определяются из однородной системы геометрических уравнений, имеющей нетривиальное решение, отвечающее граничным условиям (1.1), с точностью до произвольной постоянной $u_{in}^{(0)}=Bu_{i*}$, $w_n^{(0)}=$ $=Bw_*$ ($B=\text{const}$).

Полученное решение удовлетворяет пока только тангенциальным граничным условиям. При помощи простого краевого эффекта выполним последние два равенства в (1.1)

$$G_1^{(0)} + G_1^{\vee} = 0, \quad w^{(0)} + w^{\vee} = 0 \tag{2.4}$$

Здесь $G_1^{\vee}$ и $w^{\vee}$ — выражения краевого эффекта, $G_1^{(0)}$ — момент, определяемый перемещениями $u_1^{(0)}$, $w^{(0)}$. В случае шарнирного опирания краев оболочки $G_1^{(0)}=0$.

Из условий (2.4) могут быть определены неизвестные функции Ψ_j ($j=1, 2, 3, 4$), входящие в выражения $G_1^{\vee}$ и $w^{\vee}$ [4]. Зная их, можно написать выражения для тангенциальных составляющих краевого эффекта

$$u_2^{\vee}(\xi_i)=0, \qquad T_1^{\vee}(\xi_i)=\varepsilon\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{lr'}{\sqrt{ARr}}\frac{w^{(0)}(\xi_i)}{Ar}\right),$$

$$l=(R^2[3(1-\nu^2)]^{-1})^{1/4}$$

Из-за влияния краевого эффекта тангенциальные граничные условия теперь не выполняются, но уже в величинах следующего порядка малости. Для того чтобы устранить эту невязку, повторим итерационный процесс с самого начала, приравняв нулю коэффициенты, стоящие при первой степени малого параметра ε в уравнениях равновесия. Получим систему, в левой части аналогичную (1.2), в правой части которой стоят соответственно $Ar\lambda_1^2 u_i^{(0)}, Ar\lambda_1^2 w^{(0)}$, а слагаемые, содержащие N_i, отброшены. Силовые граничные условия преобразуются к виду $T_1^{(1)}+T_1^{\vee}=0$.

3. Система второго приближения также может быть сведена к дифференциальному уравнению (2.1), которое в этом случае будет неоднородным, и в правой его части стоит функция

$$F=B\lambda_1^2F_*, \quad F_*=-3rr'u_{1*}+nAru_{2*}+$$

$$+w[A^2rn^2-r(r')^2-r^2r'']-r^2r'\frac{dw_*}{d\xi}-r''\frac{du_{1*}}{d\xi} \tag{3.1}$$

Усилия определяются через функцию Φ_n посредством формул

$$T_{1n}^{(1)}=Ar^{-2}\Phi_n, \quad T_{2n}^{(1)}=r''A^{-1}r^{-1}\Phi_n+Ar\lambda_1^2w_n^{(0)}$$

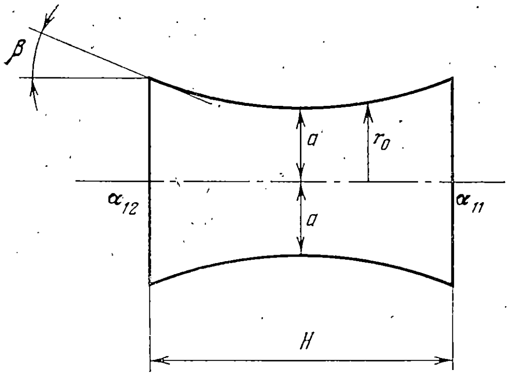
$$S_n^{(1)}=-\frac{1}{n}\left[\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\Phi_n}{r}\right)+\lambda_1^2r(r'w_n^{(0)}+u_{1n}^{(0)})\right]$$

Решение полученного уравнения аналогично (2.2). Обозначим произвольные постоянные этого решения D_i ($i=1, 2$). Подставив его в силовые граничные условия, в силу условия существования собственного размера потребуем равенства нулю дополнительных определителей получившейся системы уравнений. Эти равенства и являются уравнениями для определения собственной частоты. Разрешая их относительно λ_1^2, получим

$$\lambda_1^2=\left[T_1^{\vee}(\xi_2)-T_1^{\vee}(\xi_1)\frac{\Phi_1(\xi_2)}{\Phi_1(\xi_1)}\right]\left(\Phi_1(\xi_1)\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\Phi_2F_*}{W}d\xi-\Phi_2(\xi_1)\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\Phi_1F_*}{W}d\xi\right)^{-1} \tag{3.2}$$

Повторяя процесс интегрирования дальше, т. е. приравнивая последовательно нулю коэффициенты при последующих степенях ε и решая полученные краевые задачи, можно построить следующие приближения собственной частоты λ_2, λ_3 и т. д. Формы собственных колебаний в первом приближении определяются изгибаниями оболочки.

4. В качестве примера расчета рассмотрим тонкостенную оболочку в виде симметричного однополостного гиперболоида вращения (фигура).



Уравнение образующей оболочки запишем в виде

$$r_0 = ab^{-1}\sqrt{b^2+\alpha_{10}^2} \qquad (4.1)$$

Условие существования собственного размера имеет вид

$$\Phi_1(\xi_1)\Phi_2(\xi_2) - \Phi_1(\xi_2)\Phi_2(\xi_1) = 0 \qquad (4.2)$$

Учитывая (4.1), из (2.1) получим

$$\Phi_1 = r\cos\left(n \operatorname{arctg}\frac{a}{b}\xi\right), \quad \Phi_2 = -r\sin\left(n \operatorname{arctg}\frac{a}{b}\xi\right) \qquad (4.3)$$

Уравнение (4.2) сведется к выражению, полученному в [1]:

$$\operatorname{arctg}\frac{a}{b}\xi_1 - \operatorname{arctg}\frac{a}{b}\xi_2 = \frac{m\pi}{n} \qquad (m=1,2,\ldots)$$

Полагая $m=1$, $n=2$, получим собственный размер оболочки $H=2b$. По краям гибкого элемента волновой передачи расположены тонкие диафрагмы, поэтому необходимо несколько изменить последнее граничное условие (1.1):

$$(w^{\vee}+w^{(0)})\cos\beta + (u_1^{\vee}+u_1^{(0)})\sin\beta = 0, \quad \operatorname{tg}\beta = r' \qquad (4.4)$$

Процедура получения собственной частоты при этом не изменится, так как $u_1^{\vee} \sim \varepsilon(w^{\vee})$. Подставляя выражение (4.3) в (2.2), приняв во внимание, что $c=B_2=0$, и определив радиальное и осевое перемещения через окружное, получим

$$u_{2*} = r\cos\left(n \operatorname{arctg}\frac{a}{b}\xi\right), \quad u_{1*} = \frac{r^2}{An}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{u_{2*}}{r}\right), \qquad (4.5)$$

$$w_* = -\frac{A^2}{r''}\left[\frac{2rr'A^2 - r^2r'r''}{A^3 n}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{u_{2*}}{r}\right) + \frac{r^2}{An}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{u_{2*}}{r}\right)\right]$$

Определим выражение для $T_1^{\vee}(\xi_i)$. Проделав необходимые выкладки, из первого равенства (2.4) и из (4.4) получим

$$\Psi_1 = -2Eh(w_n^{(0)} + u_{1n}^{(0)} r'), \quad \Psi_2 = 0 \qquad (4.6)$$

Учитывая (4.6), найдем $T_1^{\vee}$ при $\xi=\xi_i$:

$$T_1^{\vee} = \varepsilon\frac{r'w^{(0)} + (r')^2 u_1^{(0)}}{\sqrt{2}(Ar)^{3/2}[3(1-\nu^2)]^{1/4}} \qquad (4.7)$$

Из (3.2), с учетом (3.1), (4.1), (4.5) и (4.7), для $a=0.03$ м, $b=0.05$ м, $h=5\cdot10^{-4}$ м, $E=2.1\cdot10^{11}$ Н·м$^{-2}$, $\rho=7900$ кгм$^{-3}$, $\nu=0.3$ получим значение нижней собственной частоты $\Omega_*\approx1100$ гц $(\Omega_*=\Omega(2\pi)^{-1})$

Асимптотический порядок собственной частоты, соответствующей колебаниям, по форме изгибаний поверхности равен $h^{1/2}$. В [2] порядок этой частоты равен h. Расхождение объясняется тем, что в цитируемой работе не рассматривалось влияние краевого эффекта.

Поступила 17 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. З.* К теории безмоментных оболочек вращения. Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 5.
2. *Лийва Т. В., Товстик П. Е.* Свободные неосесимметричные колебания оболочек вращения отрицательной Гауссовой кривизны. Тр. VII Всес. конференции по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1970.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Качественный анализ свободных колебаний упругой тонкой оболочки. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М., «Наука», 1976.
5. *Лийва Т. В.* О собственных неосесимметричных колебаниях оболочек отрицательной кривизны. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, вып. 293, 1970.