

СИНГУЛЯРНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ РЕБРА В СОСТАВНОМ НЕОДНОРОДНОМ АНИЗОТРОПНОМ ТЕЛЕ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К КОМПОЗИТАМ

С. Е. МИХАЙЛОВ

(Москва)

Рассматривается краевой эффект, обусловленный наличием линии пересечения свободной поверхности тела с поверхностью соединения его неоднородных анизотропных упругих частей. Показано, что вопрос о степени сингулярности напряжений в окрестности этой линии сводится к двумерной задаче для бесконечного составного клина. Просчитан ряд примеров для композитов, составленных из слоев с различной укладкой волокон, а также подкрепленных изотропным материалом. Построены графики зависимости степени сингулярности напряжений от параметров материалов и геометрии соединения.

В последние годы вопросу об изучении сингулярности напряжений в особой точке границы (точке на ребре или на линии пересечения свободной поверхности с поверхностью соединения нескольких тел, которую также будем называть ребром) было посвящено значительное число работ. Исследования проводились в основном двумя методами: либо искались решения определенного вида, удовлетворяющие однородным уравнениям и граничным условиям вблизи особой точки [1-5], либо при помощи преобразования Мелина и теории вычетов решалась задача для бесконечного клина [6-12]. В первом случае вставал вопрос о полноте полученной системы решений и о влиянии некоторых правых частей уравнений и граничных условий на асимптотический вид решения вблизи особой точки, во втором было затруднительно найти решение для конечной области с непрямолинейными границами.

Для эллиптических краевых задач с непрерывными коэффициентами в несоставных конечных двумерных областях с угловыми или многомерными областях с коническими точками асимптотика решения была дана в работе [13]. Эта асимптотика получается приведением с использованием срезающей функции исходной задачи в конечной области к задаче в бесконечном клине (или конусе), которая решалась при помощи интегральных преобразований. Таким образом снимались недостатки описанных выше подходов. В [14] рассматривалась задача для составной двумерной области с границей соединения, выходящей на свободную поверхность. В этой работе исходная задача сводилась к системе сингулярных интегральных уравнений, которая затем решалась при помощи преобразования Мелина. Результаты для асимптотики в многомерной области с гладкими ребрами были получены в [15].

Ниже с использованием этих результатов будет рассмотрено непрерывно-неоднородное составное анизотропное упругое тело, подверженное действию массовых сил и температурного поля с произвольными граничными условиями.

1. Пусть D' и D'' — части составного тела, каждая из которых подчинена обобщенному закону Гука с учетом термонапряжений и уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} \epsilon_{kl} - \beta_{ij} T \quad (1)$$

$$\sigma_{ij, j} = F_i \quad (2)$$

Индекс после запятой обозначает производную по соответствующей координате, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Подставляя (1) в (2), заменяя деформации через смещения и используя симметричность тензора A_{ijkl} , получаем для каждой части основную систему уравнений относительно смещений

$$(A_{ijkl}u_{k,l})_{,j} = F_i + (\beta_{ij}T)_{,j} = f_i^{\circ} \quad (i, j, k, l=1, 2, 3) \quad (3)$$

Введем декартову систему координат x_1, x_2, x_3 , поместив ее начало в исследуемую особую точку, направив ось x_3 по касательной к ребру, а ось x_1 по касательной к поверхности соединения, а также цилиндрическую $-r, \varphi, x_3$, где угол φ отсчитывается от x_1 в плоскости x_1x_2 . Пусть граничными условиями на свободной поверхности с каждой стороны ребра в окрестности начала координат будут подходящие три из выписанных ниже шести условий

$$A_{ijk}u_{k,l}n_j = p_i^{\circ} + \beta_{ij}Tn_j = t_i^{\circ}, \quad u_i = u_i^{\circ} \quad (i=1, 2, 3) \quad (4)$$

Тем самым охватываются задачи с заданными на свободной границе смещениями, заданными усилиями, задача соприкосновения с жестким контуром, а также смешанная задача с линией смены граничных условий, совпадающей с ребром в окрестности исследуемой точки. На поверхности соединения вблизи исследуемой точки граничными условиями будут подходящие шесть из выписанных десяти

$$(A'_{ijk}u'_{k,l} - A''_{ijk}u''_{k,l})n_j = (\beta'_{ij}T' - \beta''_{ij}T'')n_j = t_i^{\circ}, \quad u'_i - u''_i = u_i^{\circ} \quad (i=1, 2, 3) \quad (5)$$

$$A'_{i2k}u'_{k,l}n_l = \beta'_{i2}T' = t_i', \quad A''_{i2k}u''_{k,l}n_l = \beta''_{i2}T'' = t_i'' \quad (i=1, 3)$$

Тем самым охватывается жесткое соединение с натягом и соприкосновение без трения. Таким образом имеем эллиптическую задачу сопряжения (3) — (5).

В [15] выражения для асимптотики решения эллиптической краевой задачи в несоставной области с ребрами приведены в предположении, что решение бесконечно дифференцируемо вдоль ребра с производными, принадлежащими некоторому функциональному пространству с весом. Это гарантирует сведение исходной задачи к двумерной. Рассматривались лишь решения, для которых определены все производные, встречающиеся в уравнении.

Однако для уравнений теории упругости интересно рассмотреть решение со смещениями, принадлежащими пространству Соболева $u_i \in W^1(D'UD'')$, W^1 — пространство с интегрируемыми квадратами функции и ее первых производных (энергетическое пространство). Делая интегральные оценки для $u_{i,3}$ аналогично тому, как это выполнено в [16, 17] для уравнений в многомерных несоставных областях с ребрами, можно показать, что при наложении на правые части основной системы и граничных уравнений некоторых условий $u_{i,3} \in W^1$. Это гарантирует сведение исходной задачи к двумерной для почти всех x_3 . Проводя, далее, интегральные оценки для $u_{i,33}$ получим, что $u_{i,33} \in W^1(D'UD'')$, и для всех x_3 решение исходной задачи (3) — (5) $u_i \in W^1(\pi)$, удовлетворяет двумерной краевой задаче, получаемой из (3) — (5) выбрасыванием членов с производными по x_3 и с младшими производными, с правой частью, принадлежащей $L_2(\pi)$. Здесь π — сечение достаточно малой окрестности исследуемой особой точки плоскостью, перпендикулярной ребру.

Применяя, далее, к исследованию получившейся двумерной задачи методы [13] или [14], т. е. приводя с использованием срезающей функции эту задачу к задаче с постоянными коэффициентами, равными их значениям в исследуемой особой точке в бесконечном составном двумерном клине, и решая ее при помощи преобразования Мелина, можно показать,

что решение около особой точки имеет вид

$$u_i = \sum_{\alpha < \operatorname{Re} s_k < 1} r^{1-s_k} \sum_{n=0}^{N_k-1} \Phi_{ikh}(\varphi) (\ln r)^n + u_i^{\vee} \quad (6)$$

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha < \operatorname{Re} s_k < 1} r^{-s_k} \sum_{n=0}^{N_k-1} \Psi_{ijkn}(\varphi) (\ln r)^n + \sigma_{ij}^{\vee}$$

Здесь s_k — нули аналитической функции $\Delta(s)$, N_k — их кратность; $\Delta(s)$ не зависит от правых частей основной системы уравнений и граничных условий, и ее нули участвуют в аналогичном представлении решения некоторой модельной задачи в бесконечном составном двумерном клине с тем же углом раствора, что и в исходной задаче в особой точке в локальной системе координат. Уравнения модельной задачи есть главная часть уравнений, получаемых из исходных отбрасыванием членов с производными по x_3 в основной системе и граничных условиях. Коэффициенты этих уравнений постоянны и равны их значениям в исходных уравнениях около особой точки, а правые части — произвольные, отличные от нуля в конечных областях, не содержащих угловую точку, и интегрируемы. В (6) u_i^{\vee} , σ_{ij}^{\vee} определяются гладкостью правых частей исходной задачи (3) — (5) около особой точки, в частности, если $f_i^{\circ} = o(r^{-1})$, $u_i; r^{\circ} \rightarrow 0$, $t_i \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, то $\alpha < 0$, $u_i^{\vee} < \infty$, $\sigma_{ij}^{\vee} \rightarrow 0$; Φ_{ikh} , Ψ_{ijkn} — некоторые функции полярного угла φ .

В рассматриваемом случае уравнениями модельной задачи будут уравнения (3) — (5) с некоторыми правыми частями, если положить $A_{ijkl} = \text{const}$ ($l, j=1, 2; i, k=1, 2, 3$). Напомним, что в локальной системе координат ось x_3 направлена вдоль ребра и, следовательно, в особой точке $n_3=0$.

Нетрудно заметить, что эти уравнения совпадают с уравнениями, получаемыми для составного однородного бесконечного в сечении двугранного клина, поле напряжений в котором не зависит от координаты x_3 . Отличие состоит в том, что на правые части для реализации такого состояния в клине накладываются дополнительные условия: они не должны давать суммарное усилие и момент. Но, как уже отмечалось, правые части не влияют на $\Delta(s)$. Таким образом $\Delta(s)$ в разложении (6) для произвольного составного тела будет такой же, как и в соответствующей задаче для клина, напряжения в котором не меняются вдоль ребра.

Если тензор A_{ijkl} в особой точке имеет плоскость симметрии, перпендикулярную ребру для обеих частей тела, а система (3) — (5) для модельной задачи распадается на две несвязанные: для u_1, u_2 при $i=1, 2$ и для u_3 при $i=3$. В общем случае нагружения в разложении (6) будут присутствовать члены, порожденные нулями функций Δ для обеих систем (назовем их Δ_1 и Δ_2 соответственно) и результирующая функция $\Delta = \Delta_1 \Delta_2$. Но если исходная задача ставится для призматического составного тела, и поле напряжений в нем не зависит от x_3 , то при отсутствии кручения и антиплоской деформации, т. е. при наличии растяжения, изгиба, плоской деформации и двумерного температурного поля, не вызывающего кручения, уравнение для u_3 будет тождественно удовлетворяться функцией

$$u_3 = Ax_1 + Bx_2 + C$$

Тогда в разложении (6) будут присутствовать только члены, порожденные Δ_1 . При чистом кручении или антиплоской деформации в (6) останутся только члены, порожденные Δ_2 .

Рассмотрим вопрос о сингулярности напряжений. Она может порождаться как первым членом в (6), т. е. наличием нулей $\Delta(s)$ в полосе $0 \leq \operatorname{Re} s < 1$ и, следовательно, видом дифференциальных операторов основной системы и граничных условий и геометрией тела вблизи особой точки, так и вторым членом в (6) — σ_{ij} , т. е. недостаточной гладкостью правых частей около особой точки.

Пусть

$$u_i = O(r^{1+\varepsilon}), \quad p_i = O(r^\varepsilon), \quad \beta_{ij} T = O(r^\varepsilon), \quad F_i = O(r^{-1+\varepsilon}) \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad (7)$$

$f_1 = O(f_2)$ при $r \rightarrow 0$ означает, что $\lim |f_1/f_2| < \infty$ при $r \rightarrow 0$.

Для существования энергетического решения достаточно, чтобы $\varepsilon > -1$. Для того, чтобы поведение правых частей вблизи ребра не порождало сингулярных членов, т. е. σ_{ij} была ограниченной функцией, достаточно, чтобы $\varepsilon > 0$; если $\varepsilon = 0$ и $s = 0$ — корень $\Delta(s)$, то возможно появление сингулярности напряжений логарифмического вида. $\sigma_{ij} = O(r^\varepsilon)$ и напряжения будут содержать члены вида $\sigma_{ij} = O(r^\varepsilon)$ при $-1 < \varepsilon < 0$.

Рассмотрим, далее, краевой эффект в композитах. Этому вопросу посвящен ряд работ, где уравнения анизотропной упругости для уложенных под разными углами слоев решались методом конечных разностей [18, 19] или методом конечных элементов [20]. Отмечалось, что в окрестности пересечения свободной поверхности с поверхностью соединения слоев могут возникать бесконечные напряжения. Асимптотический вид их не исследовался. Изучим зависимость степени сингулярности напряжений от коэффициента армирования и локальной геометрии соединения в ортогонально армированных стекло- и углепластиках, а также в композитах, соединенных со слоем алюминия.

Каждый слой будем рассматривать как однородный и анизотропный, характеристики которого определяются параметрами связующего и арматуры и коэффициентом армирования. Между слоями предполагается жесткое сцепление, в окрестности ребра на свободных поверхностях заданы усилия. В остальном композит произвольно нагружен и подвергнут действию температурного поля. Условия (7) считаются выполненными при $\varepsilon \geq 0$. Как указано выше, напряжения будут иметь вид (6), и если в полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$ имеются корни s_k соответствующей функции $\Delta(s)$, то в (6) будут входить сингулярные члены вида $\sigma \sim r^{-s_k}$.

Будут рассматриваться только такие укладки слоев, которые вблизи ребра дают тензоры A_{ijhl} , обладающие плоскостью симметрии, перпендикулярной ребру. Тогда $\Delta(s)$ распадается на $\Delta_1(s)$, соответствующую плоской деформации, и $\Delta_2(s)$ — кручению (или антиплоской деформации). Функция $\Delta_1(s)$ найдена в работе [12], где построено решение для бесконечного составного анизотропного клина при плоской деформации.

Характеристическое уравнение для плоской задачи анизотропной теории упругости имеет вид

$$b_{411}\mu^4 - 2b_{116}\mu^3 + (2b_{12} + b_{66})\mu^2 - 2b_{26}\mu + b_{22} = 0 \quad (8)$$

где b_{ij} — константы материала [12, 21]. Материал, для которого все корни уравнения (8) различны, будем относить к типу А. Материал, имеющий попарно равные корни (8) будем относить к типу В. К типу В относятся изотропные материалы и трансверсально изотропные, с осью изотропии перпендикулярной плоскости рассмотрения. Плоскую задачу для составного клина, обе части которого относятся к типу А, назовем задачей А-А; одна часть которого относится к типу А, другая — к типу В, — задачей А-В; задачу для клина, обе части которого относятся к типу В — задачей В-В.

Далее потребуются $\Delta_1(s)$ для задачи А-В, в этом случае $\Delta_1(s) = \det(B_{1ij})$;

и матрица B_{1ij} имеет вид

$$\begin{array}{cccccccc} a_1^{2-s} & a_2^{2-s} & a_3^{2-s} & a_4^{2-s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^{1-s} b_1 & a_2^{1-s} b_2 & a_3^{1-s} b_3 & a_4^{1-s} b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5^{2-s} & a_6^{2-s} & a_5^{1-s} a_6 (2-s) & a_6^{1-s} a_5 (2-s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5^{1-s} b_5 & a_6^{1-s} b_6 & a_5^{-s} \omega_{56} & a_6^{-s} \omega_{65} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & s-2 & (s-2) \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & -\mu_5 & -\mu_6 & (s-1)\mu_5 - \mu_6 & (s-1)\mu_6 - \mu_5 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & -h_5 & -h_6 & (s-1)h_5 - h_6 & (s-1)h_6 - h_5 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & -\mu_5 h_5 & -\mu_6 h_6 & (s-1)\mu_5 h_5 - \mu_6 h_6 & (s-1)\mu_6 h_5 - \mu_5 h_6 \end{array}$$

Здесь μ_j — корни уравнения (8) для одной и другой части клина. Для простоты принято, что $j=1, \dots, 4$ для материала типа А и $j=5, 6$ для материала типа В в матрице B_{1ij} .

$$\begin{aligned} a_j &= \cos \varphi + \mu_j \sin \varphi, & b_j &= \mu_j \cos \varphi - \sin \varphi \\ p_j &= b_{11} \mu_j^2 + b_{12} - b_{16} \mu_j, & q_j &= b_{12} \mu_j + b_{22} \mu_j^{-1} - b_{26} \\ h_5 &= b_{12}'' - \mu_5 \mu_6 b_{11}'', & h_6 &= h_5 - b_{11}'' (\mu_5 - \mu_6)^2 \\ \omega_{ij}(s) &= (1-s) a_j b_i + a_i b_j \end{aligned}$$

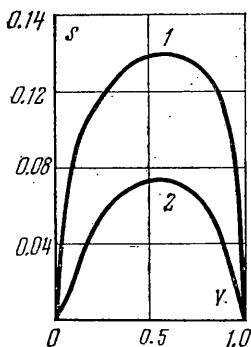
φ — угол наклона свободной границы к линии соединения; в первом материале $\varphi = \varphi_1 > 0$, во втором $\varphi = \varphi_2 < 0$. Для случая А-А правая часть матрицы B_{1ij} изменится и будет иметь вид, аналогичный левой, естественно, со своими μ_j , a_j , b_j , p_j , q_j , φ (для этого случая матрица B_{1ij} выписана в [12]). Для задачи В-В изменится вид левой половины матрицы и она станет аналогичной правой. Функция $\Delta_2(s)$ найдена в работе [5], где искались автомодельные решения задачи о кручении. В рассматриваемых здесь обозначениях $\Delta_2(s) = \det(B_{2ij})$.

Матрица B_{2ij} имеет вид

$$\begin{array}{cccc} a_9^{1-s} & a_{10}^{1-s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11}^{1-s} & a_{12}^{1-s} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ r_9 & r_{10} & -r_{11} & -r_{12} \end{array}$$

где a_j представляются в том же виде, что и выше; индекс $j=9, 10$ относится к одному материалу, $j=11, 12$ — к другому; μ_j — корни уравнения $b_{55} \mu^2 - 2b_{45} \mu + b_{44} = 0$, $r_j = b_{45} - b_{44} \mu_j^{-1}$.

При расчетах зависимости степени сингулярности от коэффициента армирования считалось, что армирующие волокна и связующее изотропны и имеют следующие характеристики [22]: $E=8.4 \cdot 10^3$ кг мм⁻², $\nu=0.22$ — стекловолокно; $E=42 \cdot 10^3$ кг мм⁻², $\nu=0.16$ — углеволокно; $E=0.35 \cdot 10^3$ кг мм⁻², $\nu=0.35$ — эпоксидное связующее. Для получения констант анизотропии слоя через коэффициент армирования и константы упругости компонент использовались зависимости, приведенные в [23]. Слой при расчете по этим формулам получается трансверсально изотропным с осью



Фиг. 1

изотропии, параллельной направлению армирования. Для исследования сингулярности напряжений ортогонально армированного композита, составленного из таких слоев, с ребром, перпендикулярным одному из направлений армирования и параллельным другому, получаем случай А-В и соответствующую ему матрицу B_{1ij} , выписанную выше.

На фиг. 1 показана зависимость степени сингулярности напряжений, возникающих в ортогонально армированных стекло- и углепластике, от объемного содержания волокна V . Ребро параллельно одному из направлений армирования в рассматриваемой точке, а свободная поверхность перпендикулярна поверхности соединения слоев ($\varphi_1 = -\varphi_2 = 90^\circ$). Кривая 1 относится к углепластику, кривая 2 — к стеклопластику. Максимум степени сингулярности s достигается в окрестности армирования $V=0.5$.

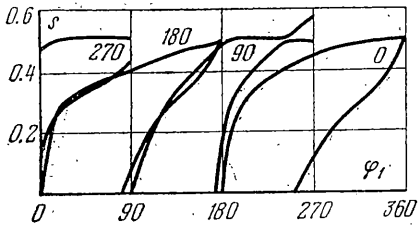
Как и следовало ожидать, для изотропных компонент при армировании $V=0$ и $V=1$, степень сингулярности $s=0$, т. к. оба слоя становятся одинаковыми и изотропными. Если армирующие волокна анизотропны, то такой симметрии не будет, и при $V=1$ степень сингулярности может быть отличной от нуля. Фиг. 1 представляет корни $\Delta_1(s)$. Корней $\Delta_2(s)$ в рассматриваемом интервале для данного композита нет, т. е. кручение таких композитов вокруг оси, параллельной ребру, сингулярности напряжений не дает.

В работах [18-20] расчеты велись для композита с характеристиками слоя: модуль Юнга в направлении армирования $E_L = 14.6 \cdot 10^3$ кг мм⁻², поперечный модуль Юнга $E_z = E_T = 1.48 \cdot 10^3$ кг мм⁻², модули сдвига $G_{LT} = G_{TZ} = G_{Lz} = 0.598 \cdot 10^3$ кг мм⁻²; коэффициенты Пуассона $\nu_{LT} = \nu_{TZ} = \nu_{Lz} = 0.21$. Ось Z перпендикулярна плоскости слоя. Расчет показал, что степень сингулярности напряжений в ортогонально армированных такими слоями композитах равна 0.033.

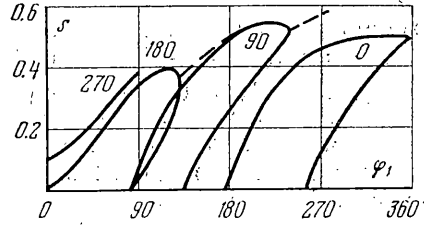
В последнее время получили распространение соединения армированных пластиков с металлами, например углепластиков с алюминием. Рассмотрим сингулярность напряжений, которая может возникнуть в таких материалах. При расчете использовался высокомодульный углепластик с характеристиками [22]: $E_L = 20 \cdot 10^3$ кг мм⁻², $E_T = E_z = 2.1 \cdot 10^3$ кг мм⁻², $G_{LT} = G_{Lz} = G_{TZ} = 0.85 \cdot 10^3$ кг мм⁻², $\nu_{LT} = \nu_{Lz} = \nu_{TZ} = 0.21$. Характеристики алюминия: $E = 7.2 \cdot 10^3$ кг мм⁻², $\nu = 0.3$.

На фиг. 2 и 3 показана зависимость корня $\Delta_1(s)$ от угла наклона свободной поверхности углепластика к поверхности соединения при фиксированных углах наклона свободной поверхности алюминия (фиг. 2 относится к случаю, когда ребро перпендикулярно направлению армирования углепластика, а фиг. 3 — параллельно). Цифры около кривых обозначают в градусах угол между свободной поверхностью алюминия и поверхностью соединения. Видно, что начиная с некоторого угла возникает второй сингулярный корень в полосе $0 < \text{Re } s < 1$.

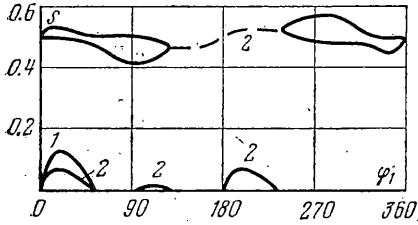
Фиг. 4 и 5 также относятся к случаям, когда ребро перпендикулярно и параллельно направлению армирования соответственно. Кривыми представлены два семейства: 1 — зависимость s от φ_1 (угла наклона углепластика), когда материалы локально составляют полуплоскость ($\varphi_1 - \varphi_2 = 180^\circ$); 2 — плоскость с разрезом ($\varphi_1 - \varphi_2 = 360^\circ$). Штриховой линией обозначена $\text{Re } s$, когда два действительных корня переходят в пару комплексно сопряженных. При расчете оказалось, что в этих случаях $|\text{Im } s| < 0.1$.



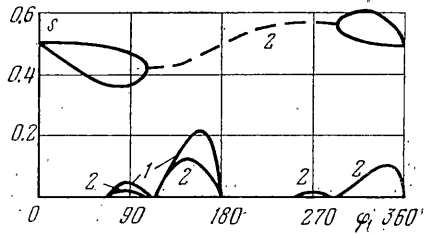
Фиг. 2



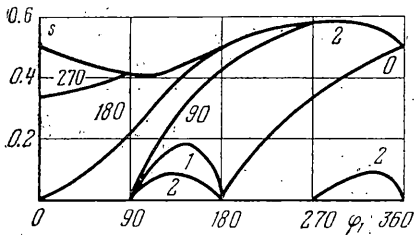
Фиг. 3



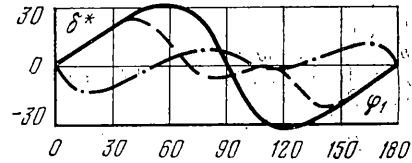
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Так как в рассматриваемом слое композита $G_{LT}=G_{TZ}=G_{LZ}$, то $\Delta_2(s)$ будет одинаковой для случаев, когда ребро параллельно и перпендикулярно направлению армирования.

На фиг. 6 показаны корни $\Delta_2(s)$ в полосе $0 \leq \text{Re } s < 1$ в зависимости от φ_1 для четырех фиксированных значений φ_2 , а также для составной полуплоскости (1) и плоскости с разрезом (2).

Определим области значений φ_1, φ_2 , при которых отсутствует сингулярность напряжений, и критические значения этих углов, при которых максимальный корень $\Delta(s)$ в полосе $0 \leq \text{Re } s < 1$ равен нулю. Пусть $\delta = \varphi_1 - \varphi_2 - 180^\circ$ — локальное отклонение от полуплоскости сечения тела перпендикулярно ребру. На фиг. 7 представлена зависимость критического значения δ^* от φ_1 . Сплошной линией изображена δ_2^* для $\Delta_2(s)$; штриховой — δ_{11}^* для $\Delta_1(s)$, если ребро параллельно направлению армирования; штрихпунктирной — δ_{12}^* для $\Delta_1(s)$, если ребро перпендикулярно направлению армирования. При произвольном нагружении сингулярность напряжений будет отсутствовать, когда ребро параллельно направлению армирования при $\delta < \min(\delta_{11}^*, \delta_2^*)$, и когда ребро перпендикулярно направлению армирования при $\delta < \min(\delta_{12}^*, \delta_2^*)$. Если $\varepsilon = 0$ в оценках (7), то при $\delta = \delta^*$ может возникать сингулярность напряжений логарифмического вида.

Отметим, что $\Delta_1(s) = \det(B_{1ij})$ имеет корень $s=0$ при всех углах φ_1, φ_2 для случая А-В, но, как можно заметить из выражений (13), (14) работы [12] и вида матрицы B_{1ij} , этот корень не поражает соответствующего члена представления (6). Другими словами, в качестве $\Delta_1(s)$ в этом случае следует рассматривать функцию $\det(B_{1ij})s^{-1}$.

Анализируя графики на фиг. 2—7 можно заключить, что в соединениях алюминия с углепластиком, даже если составное тело ограничено гладкой поверхностью ($\varphi_1 - \varphi_2 = 180^\circ$), может возникать сингулярность напряжений. В этом случае при произвольном нагружении сингулярность будет отсутствовать в диапазоне $54^\circ < \varphi_1 < 90^\circ$, когда ребро перпендикулярно направлению армирования, и в диапазоне $0^\circ < \varphi_1 < 70^\circ$, когда ребро параллельно направлению армирования. При достаточно больших углах φ_1 , $|\varphi_2|$ возникает несколько сингулярных членов разложения (6).

Этим же методом можно рассмотреть задачи и с другими граничными условиями.

Автор признателен Ю. Н. Работнову за обсуждение полученных результатов и внимание к работе.

Поступила 25 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. J. Appl. Mech., 1952, vol. 19, No. 4.
2. Ахсентян О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
3. Чобанян К. С., Алексанян Р. К. Термоупругие напряжения в окрестности края поверхности соединения составного тела. Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1971, т. 24, № 3.
4. Алексанян Р. К. Об одном классе решений уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела. Докл. АН Арм. ССР, 1975, т. 61, № 4.
5. Алексанян Р. К., Чобанян К. С. Характер напряжений вблизи края поверхности контакта скручиваемого анизотропного составного стержня. Прикл. механика, 1977, т. 13, № 6.
6. Bogy D. B. Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, vol. 35, No. 3.
7. Bogy D. B. On the problem of edge-bonded elastic quarter-planes loaded at the boundary. Internat. J. Solids and Struct., 1970, vol. 6, No. 9.
8. Bogy D. B. Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1971, vol. 38, No. 2.
9. Hein V. L., Erdogan F. Stress singularities in a two-material wedge. Internat. J. Fract. Mech., 1971, vol. 7, No. 3.
10. Benthem J. P. On the stress distribution in anisotropic infinite wedges. Quart. Appl. Math., 1963, vol. 21, No. 3.
11. Bogy D. B. The plane solution for anisotropic elastic wedges under normal and shear loading. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1972, vol. 39, No. 4.
12. Михайлов С. Е. Об одной плоской задаче для двух соединенных анизотропных клиньев. Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 4.
13. Кондрагьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. Тр. Моск. матем. о-ва, 1967, т. 16.
14. Эскин Г. И. Задача сопряжения для уравнений главного типа с двумя независимыми переменными. Тр. Моск. матем. о-ва, 1970, т. 21.
15. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Об эллиптических краевых задачах в области с кусочно-гладкой границей. Тр. симпозиума по механике сплошной среды и родственными проблемами анализа. Тбилиси, 1971, т. 1, Тбилиси, «Мицниереба», 1973, стр. 171.
16. Кондрагьев В. А. О гладкости решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в кусочно-гладкой области. Дифференциальные уравнения, VI, № 10, 1970.
17. Колдоркина В. А. О трехмерных задачах теории упругости в кусочно-гладких областях. Изв. вузов, Математика, 1973, № 1.
18. Pipes R. B., Pagano N. J. Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension. J. Compos. Mater., 1970, vol. 4, No. 3, p. 538—548.
19. Pagano N. J., Pipes R. B. Some observation on the interlaminar strength of composite laminates. Internat. J. Mech. Sci., 1973, vol. 15, No. 8.
20. Wang A. S. D., Crossman F. W. Some new results on edge effect in symmetric composite laminates. J. Compos. Mater., 1977, vol. 11, No. 1.
21. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М., «Наука», 1977.
22. Скудра А. М., Булавс Ф. Я., Роцenis К. А. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков. Рига, «Зинатне», 1972.
23. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига, «Зинатне», 1972.