МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1979

УДК 539.375

ТЕРМОДИНАМИКА РОСТА ТРЕЩИН. РАЗРУШЕНИЕ УПРУГИХ, ПОЧТИ-УПРУГИХ И ВЯЗКИХ ТЕЛ

В. Н. НИКОЛАЕВСКИЙ

(Москва)

Показывается, что поток полной энергии к вершине растущей трещины равен нулю, если выполнены условия локальной стационарности разрушения. Выделение дополнительного стока энергии связывается с эффектом дисбаланса, возникающего при использовании для всех частиц упругой энергии вместо внутренней. Оценка интенсивности дисбаланса на основе учета внутренней энергии и локализованной диссипации приводит не только к известным схемам хрупкого и квазихрупкого разрушения, но и к схеме вязкопластического разрушения почти-упругого тела.

Рассматриваются инвариантные контурные интегралы для изотермических и адиабатических условий. Предлагается критерий автономного разрушения вязкого тела, соответствующий условию стационарности диссипации энергии на единицу образующейся поверхности разрушения. Отмечена возможность применения контурного интеграла для поля скоростей пластических смещений вблизи вершины трещины [1].

1. Баланс полной энергии. Ограничимся рассмотрением плоской задачи. Пусть вершина α растущей трещины перемещается со скоростью w_i относительно неподвижной системы координат. Рассмотрим составной контур: $\Gamma=\Gamma_\alpha+\Gamma_{\alpha\beta}+\Gamma_\beta+\Gamma_{\beta\alpha}$ (фиг. 1), движущийся со скоростью w_i. Баланс полной энергии для этого контура имеет вид

$$\int\limits_\Gamma \left\{\left(\varepsilon+\frac{\rho v_i v_i}{2}\right)(w_j-v_j)+t_{ij}v_i-q_j\right\}\nu_j\,d\Gamma= \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_{\beta-\alpha}}\left(\varepsilon+\frac{\rho v_i v_i}{2}\right)dS-\int\limits_{S_{\beta-\alpha}} Q\,dS \tag{1.1}$$

где ρ — плотность, ε — удельная внутренняя энергия, v_i — скорость частицы тела, t_{ij} — напряжение, q_j — приток тепла, Q — объемные источники энергии (например, из-за внешних воздействий), $\nu_j d\Gamma$ — ориентированный по внешней нормали ν_j элемент длины контура. Произведение $t_{ij}\nu_j d\Gamma$ означает удельное усилие на элементе $d\Gamma$.

Предположим, что на края трещины $\Gamma_{\alpha\beta}$ и $\Gamma_{\beta\alpha}$ не оказывается силового, массового и энергетического воздействия: $t_{ij}\nu_j d\Gamma=0$, $(w_j-v_j)\nu_j d\Gamma$, $q_j\nu_j d\Gamma=0$.

При учете изменения знака нормали на контуре Γ_α баланс (1.1) сводится к разнице $\Gamma_{\beta-\alpha}$ контурных интегралов Γ_β и Γ_α:

$$\int\limits_{\Gamma_{\beta-\alpha}} \left\{\left(\varepsilon+\frac{\rho v_i v_i}{2}\right)(w_j-v_j)+t_{ij}v_i-q_i\right\}\nu_j\,d\Gamma= \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_{\beta-\alpha}}\left(\varepsilon+\frac{\rho v_i v_i}{2}\right)dS-\int\limits_{S_{\beta-\alpha}} Q\,dS \tag{1.2}$$

[1] Работа была начата автором в Университете Джонса Гопкинса и продолжена в Брауновском Университете (США).

Для движущейся области $S_{\beta-\alpha}$, в которой поле $\varepsilon+{}^1/_2\rho v_i v_i$ стационарно, а источники Q отсутствуют, контурный интеграл

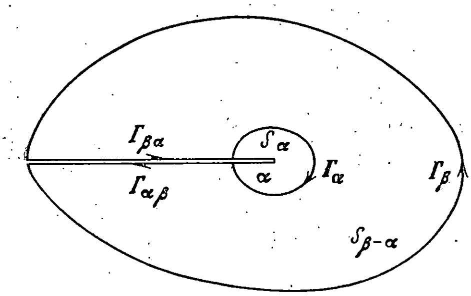
$$\int\limits_{\Gamma_\beta}\left\{\left(\varepsilon+\frac{\rho v_i v_i}{2}\right)(w_j-v_j)+t_{ij}v_i-q_j\right\}\nu_j\,d\Gamma=\int\limits_{\Gamma_\alpha}\{\ldots\}\,\nu_j\,d\Gamma=\mathrm{const} \quad (1.3)$$

оказывается инвариантом.

С другой стороны, контур Γ_α является уже односвязным, если считать, что точка разрушения α принадлежит телу. Если в области S_α поле $\varepsilon+{}^1/_2\rho v_i v_i$ стационарно и $Q=0$ (что для граничной точки α тела означает отсутствие ухода через нее энергии из тела), то контурный интеграл (1.3) по Γ_α будет равен нулю; поэтому для любого контура Γ_β, ограничивающего область стационарности, имеем

$$\int\limits_{\Gamma_\beta}\left\{\left(\varepsilon+\frac{\rho v_i v_i}{2}\right)(w_j-v_j)+t_{ij}v_i-q_j\right\}\nu_j\,d\Gamma=0 \quad (1.4)$$

Это соответствует известному положению, что приток полной энергии в любую замкнутую область тела, в которой происходит стационарный процесс и нет непосредственных внешних воздействий, должен быть равен нулю — вне зависимости от выбора реологической модели тела и от связанного с этим выбором появления сингулярностей. Затраты работы, идущие собственно на разрушение тела, приводят к появлению дополнительных потоков тепла и к специфическим изменениям внутренней энергии транспортируемым со скоростью самих частиц.



Фиг. 1

Укажем в этой связи, что известна и другая точка зрения [1], согласно которой поток полной энергии через контур инвариантен, но отличен от нуля, если этот контур охватывает особую точку. Необходимость стационарности полей внутри контура при этом не оговаривается.

2. Эффект дисбаланса полной энергии. Внутреннюю энергию можно представить в соответствии с [2] в виде суммы начальной энергии ε^0, остающейся неизменной при отсутствии изменений деформаций и энтропии частицы, и внутренней энергии ε' — функции упругих деформаций e_{ij}^e и энтропии σ:

$$\varepsilon=\varepsilon^0+\varepsilon'(e_{ij}^e,\sigma) \quad (2.1)$$

Упругие деформации e_{ij}^e будем определять как разницу полной деформации e_{ij} и необратимой e_{ij}^p:

$$e_{ij}^e=e_{ij}-e_{ij}^p,\quad de_{ij}={}^1/_2(v_{j,i}+v_{i,j})\,dt \quad (2.2)$$

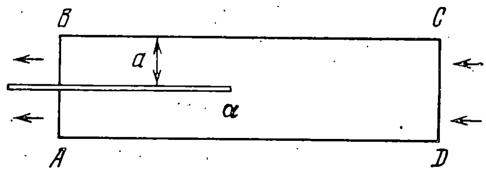
Будем трактовать локальное разрушение тела как переход «объем — поверхность» для частиц, находящихся в плоскости растущей трещины. Соответственно выделим по Гиббсу термодинамическую поверхностную фазу, обозначив через ε_v внутреннюю энергию частицы, принадлежащей объему тела, а через ε_s — частицы, находящейся на ее поверхности. Тогда при разрушении тела будет происходить следующее изменение внутренней энергии:

$$[\varepsilon]=\varepsilon_s-\varepsilon_v=[\varepsilon^\circ]+[\varepsilon'],\ [\varepsilon^\circ]=\varepsilon_s{}^\circ-\varepsilon_v{}^\circ,\ [\varepsilon']=\varepsilon_s'-\varepsilon_v' \tag{2.3}$$

В теории разрушения удельную внутреннюю энергию произвольной частицы ε, как правило, отождествляют с удельной внутренней энергией ε_v. Будем, однако, учитывать различие между ними. Тогда балансовое равенство (1.4) представляется в виде

$$\int_{\Gamma_\beta}\left\{\left(\varepsilon_v+\frac{\rho v_i v_j}{2}\right)(w_j-v_j)+t_{ij}v_i-q_j\right\}\nu_j\,d\Gamma=\int_{\Gamma_\beta}(\varepsilon_v-\varepsilon)(w_j-v_j)\nu_j\,d\Gamma \tag{2.4}$$

Отсюда при традиционном использовании функции ε_v баланс притока полной энергии к вершине стационарно растущей трещины оказывается отличным от нуля за счет ненулевой разницы [3] в правой части (2.4) на тех участках контуров Γ_β, где выходят частицы, претерпевшие переход объем – поверхность. Изменения внутренней энергии ε', связанные с разгрузкой частиц из-за появления трещины, учитываются в решениях при использовании $\varepsilon_v\equiv\varepsilon$. Зависимость ε' от необратимых деформаций $e_{ij}{}^p$ существенна для сред с «пластической памятью» [2]; здесь они рассматриваться не будут. Если дополнительные изменения ε', связанные с изменениями состава материала на поверхности трещины, несущественны, то $[\varepsilon]=[\varepsilon^\circ]$, $[\varepsilon']=0$.



Фиг. 2

Сопоставление интегральных равенств (1.4) и (2.4) показывает, что отличие от нуля инвариантного контурного интеграла – притока полной энергии – обусловлено эффектом дисбаланса при традиционном отождествлении функций ε и ε_v. Отметим аналогию баланса (2.4) с энергетическим балансом в теории детонационных волн, где вне ударного перехода используются одни и те же термодинамические функции, а для погашения дисбаланса вводится дополнительный источник энергии, соответствующий изменению химических связей.

Для оценки дисбаланса полной энергии рассмотрим контур Γ_α, взяв в качестве последнего прямоугольник *АВСД* (фиг. 2). В пренебрежении потоками через границы *ВС* и *АД* для правой части выражения (2.4) имеем следующее равенство [3]:

$$E_\alpha=\int_{\Gamma_\alpha}(\varepsilon_v-\varepsilon)(w_j-v_j)\nu_j\,d\Gamma=\int_{AB}(\varepsilon_s{}^\circ-\varepsilon_v{}^\circ)(w_1-v_1)\,dx_2 \tag{2.5}$$

При выводе выражения (2.5) учитывалось, что через границу *СД* поступают частицы с внутренней энергией $\varepsilon=\varepsilon_v$, а выходят – с измененной $\varepsilon=\varepsilon_s$ через границу *АВ* (где $\nu_1=-1$). Введем скорость $l^\cdot$ роста трещины относительно материала тела ($l^\cdot=w_1-v_1$). Если существует конечный предел

$$\lim_{a\to0}\int_{-a}^{a}(\varepsilon_s{}^\circ-\varepsilon_v{}^\circ)(w_1-v_1)\,dx_2=\lim_{a\to0}2l^\cdot[\varepsilon^\circ]a=2\gamma_0 l^\cdot=E_\alpha \tag{2.6}$$

то он соответствует скорости затраты гриффитсовской работы на образование новой поверхности. Существенно, что величина γ_0, интерпретируемая как поверхностная энергия, допускает оценку $\gamma_0\sim[\varepsilon^\circ]a$ и является функцией параметров состояния поверхностной фазы Гиббса. Она не может зависеть от скорости роста трещины, но тепловое и химическое воздействие существенно влияет на поверхностную энергию.

Для учета этого обстоятельства следует вводить в рассмотрение химические потенциалы компонент, слагающих материал у бортов трещины. В частности, известный эффект водородного охрупчивания связан с резким убыванием поверхностной энергии [4] из-за адсорбции водорода на образующейся поверхности разрушения. Райс [5] отмечает в этой связи возможность даже отрицательных значений γ_0. Значениям $\gamma_0<0$ соответствует условие $\varepsilon_v^\circ>\varepsilon_s^\circ$, т. е. объемная энергия больше чем поверхностная, а E_α становится источником энергии.

Считая, что сток E_α равен дисбалансному члену и для контура Γ_β, получаем окончательно инвариантное условие

$$\int\limits_{\Gamma_\beta} \left\{\left(\varepsilon_v+\frac{\rho v_i v_i}{2}\right)(w_j-v_j)+t_{ij}v_i-q_j\right\}\nu_j\, d\Gamma=E_\alpha=2\gamma_0 l^\cdot \tag{2.7}$$

Отметим, что в балансовом соотношении в [6, 7] части краев трещины считались нагруженными внутренними силами, которые определяли работу на разрушение $2\gamma_0 l^\cdot$. В соотношении (2.7) принято, что эта работа обусловлена изменениями внутренней энергии из-за работы внешних сил.

3. Введение энтропии. Изотермические и адиабатические условия. Составим баланс притока тепла с использованием другой термодинамической функции — энтропии σ. В интегральном виде этот баланс имеет вид

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma_{\beta-\alpha}} \left\{\sigma(w_j-v_j)-\frac{q_j}{T}\right\}\nu_j\, d\Gamma=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{S_{\beta-\alpha}}\sigma\, dS-\int\limits_{S_{\beta-\alpha}}\frac{Q}{T}\, ds-R_{\beta-\alpha}\\ R_{\beta-\alpha}=2\int\limits_{S_{\beta-\alpha}}\Phi\, dS=\int\limits_{S_{\beta-\alpha}}\left\{\frac{t_{ij}e_{ij}^{\cdot p}}{T}-\frac{q_j}{T^2}T_{,j}\right\}dS\end{gathered}\tag{3.1}$$

где T — температура, $R_{\beta-\alpha}$ — рассеяние в области $S_{\beta-\alpha}$, а Φ — локальный потенциал рассеяния [8]. Отсюда, даже в условиях стационарности поля энтропии в области $S_{\beta-\alpha}$ и отсутствия объемных тепловых воздействий $Q=0$, контурные интегралы для потоков энтропии не являются инвариантами (рассеяние $R_{\beta-\alpha}$ зависит от области $S_{\beta-\alpha}$).

Однако существенны два частных случая: $R_{\beta-\alpha}=0$ и $R_{\beta-\alpha}=\text{const}$. Первый из них соответствует адиабатическому или изотермическому состоянию ($q_jT_{,j}=0$) в области $S_{\beta-\alpha}$ упругого ($e_{ij}^{\cdot p}\equiv0$) или почти-упругого ($e_{ij}^{\cdot p}=0$ вне S_α) тела. При этом

$$\int\limits_{\Gamma_\beta}\left\{\sigma(w_j-v_j)-\frac{q_j}{T}\right\}\nu_j\, d\Gamma=\int\limits_{\Gamma_\alpha}\left\{\sigma(w_j-v_j)-\frac{q_j}{T}\right\}\nu_j\, d\Gamma=\text{const} \tag{3.2}$$

Для подсчета значения постоянной обратим внимание, что интеграл по Γ_α для односвязанной области S_α в условиях стационарности процесса в S_α равен

$$\int\limits_{\Gamma_\alpha}\left\{\sigma(w_j-v_j)-\frac{q_j}{T}\right\}\nu_j\, d\Gamma=-R_\alpha \tag{3.3}$$

Введем удельную энтропию σ_v — термодинамическую функцию частицы в объеме тела, связанную с внутренней энергией следующим соотношением:

$$d\varepsilon_v=dU_v+Td\sigma_v,\quad dU_v=t_{ij}de_{ij}^e,\quad Td\sigma_v=q_{j,j}dt+t_{ij}de_{ij}^p \tag{3.4}$$

При помощи этой функции интегралы (3.2), и в частности (3.3), можно представить в виде

$$\int\limits_{\Gamma_\alpha}\left\{\sigma_v(w_j-v_j)-\frac{q_j}{T}\right\}\nu_j\,d\Gamma=-R_\alpha+\int\limits_{\Gamma_\alpha}(\sigma_v-\sigma)(w_j-v_j)\nu_j\,d\Gamma \tag{3.5}$$

Из оценки для прямоугольника $АВСД$ получим

$$\int\limits_{\Gamma_\alpha}\left\{\sigma_v(w_j-v_j)+\frac{q_j}{T}\right\}\nu_j\,d\Gamma=-R_\alpha+2\lim[\sigma]al^\cdot,\quad [\sigma]=\sigma_s-\sigma_v \tag{3.6}$$

Для изотермического случая найдем

$$T\int\limits_{\Gamma_\alpha}\{\sigma_v(w_j-v_j)-q_j\}\,\nu_j\,d\Gamma=-TR_\alpha+2(\gamma_0-\gamma_T)\,l,\quad \gamma_0-\gamma_T=\lim[\sigma]aT \tag{3.7}$$

Соотношение (3.4) имеет следующий интегральный аналог:

$$\int\limits_{\Gamma_\alpha}(\varepsilon_v-U_v)(w_j-v_j)\nu_j\,d\Gamma=T\int\limits_{\Gamma_\alpha}\sigma_v(w_j-v_j)\nu_j\,d\Gamma,\quad T=\mathrm{const} \tag{3.8}$$

В изотермическом случае удобнее использовать традиционную диссипативную функцию D или скорость диссипации $\mathbf{D}$:

$$TR_\alpha=\int\limits_{S_\alpha}t_{ij}e_{ij}^{\cdot p}\,dS=2\int\limits_{S_\alpha}D\,dS=\mathbf{D}_\alpha \tag{3.9}$$

Из соотношений (2.7), (3.7), (3.8) для изотермического случая окончательно получаем

$$\int\limits_{\Gamma_\alpha}\left\{\left(U_v+\frac{\rho v_i v_i}{2}\right)(w_j-v_j)+t_{ij}v_i\right\}\nu_j\,d\Gamma=\mathbf{D}_\alpha+2\gamma_T l^\cdot,\quad T=\mathrm{const} \tag{3.10}$$

Обратимся к адиабатическому случаю, когда $q_j=0$. При этом дифференциальные соотношения (3.4) дают

$$d\varepsilon_v-dU_v=t_{ij}de_{ij}^p \tag{3.11}$$

т. е. разница приращений внутренней энергии и упругого потенциала равна диссипации механической энергии в частице. Интегральный аналог для контура Γ_α должен еще учитывать количество тепла, производимого при гриффитсовском разрушении

$$\int\limits_{\Gamma_\beta}(\varepsilon_v-U_v)(w_j-v_j)\nu_j\,d\Gamma=-\mathbf{D}_\alpha+2(\gamma_0-\gamma_q)\,l^\cdot,\quad q_j=0 \tag{3.12}$$

Из интегральных соотношений (2.7) и (3.12) получаем

$$\int\limits_{\Gamma_\beta}\left\{\left(U_v+\frac{\rho v_i v_i}{2}\right)(w_j-v_j)+t_{ij}v_i\right\}\nu_j\,d\Gamma=\mathbf{D}_\alpha+2\gamma_q l^\cdot,\quad q_j=0$$

Условие адиабатичности выполняется в тех случаях, когда $\varepsilon l^\cdot\gg q_j\sim\lambda T_{,j}$, где λ — коэффициент теплопроводности материала, т. е. для быстрых в тепловом отношении трещин. При изотермических условиях $T\equiv 0$, но $q_j\neq 0$

(хотя они и не входят в баланс (3.10)) — кондуктивное перераспределение температур относительно вершины трещины происходит намного быстрее, чем перенос тепла конвективно, вместе с частицами материала.

В общем случае следует пользоваться интегральным соотношением (2.7).

4. Почти-упругие тела и оценка диссипации. Таким образом, при использовании упругого потенциала U_v баланс полной энергии (2.7) принимает для изотермических и адиабатических случаев следующий вид:

$$\int_{\Gamma_\beta}\left\{\left(U_v+\frac{\rho v_i v_i}{2}\right)(w_j-v_j)+t_{ij}v_i\right\}\nu_j\,d\Gamma=\mathbf{D}_\alpha+2\gamma l^{\boldsymbol{\cdot}};\quad \gamma=\gamma_T,\gamma_q \tag{4.1}$$

Правая часть (4.1) равна постоянной, если диссипация в вершине не меняется в процессе роста трещин. Это означает условие автономности области S_α.

Использованное для вывода (4.1) условие $R_{\beta-\alpha}=0$, $R_\alpha\neq 0$ соответствует почти-упругим телам, у которых приращения необратимых деформаций локализуются только в вершине растущей трещины и сказываются в виде дополнительного расхода энергии на диссипацию. Остаточными смещениями вне S_α пренебрегается — энергия ε_v не зависит от e_{ij}^p, смещения $u_i=v_i dt$ упруги. В этих условиях в левую часть интегрального соотношения можно вводить решения соответствующей упругой задачи для внешней области.

Первое слагаемое правой части (4.1) допускает простую оценку [3]:

$$\mathbf{D}_\alpha=2\int_{S_\alpha}D\,dS=2\langle D\rangle_\alpha S_\alpha \tag{4.2}$$

где $\langle D\rangle_\alpha$ — среднее значение D в S_α.

Величина $D(e_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}p})$ определяется вторым инвариантом тензора скорости деформации. Поскольку по предположению процесс в S_α стационарен, хотя длина трещины меняется, поля переменных в S_α не могут зависеть от l. Иначе говоря, имеет место условие автономности. Определяющими параметрами для S_α могут служить скорость роста трещины $l^{\boldsymbol{\cdot}}$, линейный масштаб области $\sqrt{S_\alpha}$, а также реологические коэффициенты. Будем считать, что гриффитсовский процесс хрупкого разрушения, имеющий характерный линейный масштаб порядка $\gamma/E\ll\sqrt{S_\alpha}$, не коррелирует с процессом сопутствующей диссипации (здесь E — модуль Юнга). Тогда справедлива следующая оценка: $e_{ji}^{\boldsymbol{\cdot}p}\sim l^{\boldsymbol{\cdot}}/\sqrt{S_\alpha}$.

Если в вершине трещины локализовано пластическое течение (частица Ирвина — Орована), то D — однородная функция первого порядка по скорости деформирования, т. е. $\langle D\rangle_\alpha\sim(e_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}p}e_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}p})^{1/2}\sim l/\sqrt{S_\alpha}$, а потому интеграл (4.2) сводится к следующему выражению:

$$\int_{S_\alpha}t_{ij}e_{ij}^{\boldsymbol{\cdot}p}\,dS=2\varkappa\sqrt{S_\alpha}\,l^{\boldsymbol{\cdot}}=2\gamma_* l^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{4.3}$$

причем размерности γ и γ_* совпадают. Коэффициент γ_* обычно считается пропорциональным пределу текучести τ_0 материала.

Отсюда локализованное пластическое течение приводит к аддитивной добавке γ_* по правилу $\gamma_f=\gamma+\gamma_*$ лишь в отсутствие корреляции процессов. В противном случае эффективная поверхностная энергия γ_f была бы равна $\gamma_f=\gamma f(\varkappa\sqrt{S_\alpha}/\gamma;\ E\sqrt{S_\alpha}/\gamma)$ и при постоянной области диссипации S_α. Масштаб $\sqrt{S_\alpha}$ не может быть также функцией $l^\cdot$, поскольку реологические параметры упругопластического тела не могут дать комбинацию размерности времени. Поэтому в условиях локальной автономности и стационарности γ_* выполняет роль материальной константы, характеризующей разрушение.

Если в вершине трещины локализовано вязкое течение [3], то D — однородная функция второго порядка по скорости деформации, т. е. $\langle D\rangle_\alpha\sim$ $\sim e_{ij}^{\cdot p} e_{ij}^{\cdot p}\sim l^{\cdot 2}/S_\alpha$, а потому диссипативный интеграл (4.2) сводится к следующему:

$$\mathbf{D}_\alpha=\langle D\rangle_\alpha S_\alpha=\eta l^{\cdot 2} \tag{4.4}$$

где коэффициент сопротивляемости η пропорционален динамической вязкости течения.

В рассматриваемом случае S_α не меняется с ростом трещины l, но масштаб $\sqrt{S_\alpha}$ прямо пропорционален скорости роста трещины: $\sqrt{S_\alpha}\sim l^\cdot\mu/E$. Однако общее выражение для коэффициента сопротивляемости

$$\eta=\mu f\left(\frac{E\sqrt{S_\alpha}}{\gamma},\ \frac{E\sqrt{S_\alpha}}{l^\cdot\mu},\ \frac{\tau_0}{E}\right)=\mu f\left(l^\cdot\frac{\mu}{\gamma},\ \frac{\tau_0}{E}\right) \tag{4.5}$$

означает, что η будет являться функцией скорости $l^\cdot$ только в условиях корреляции хрупкого разрушения и сопутствующей вязкой диссипации. Если же такой корреляции нет ($\sqrt{S_\alpha}\gg\gamma/E$), то динамическая сопротивляемость η в условиях локальной стационарности и автономности разрушения выполняет роль материальной константы.

Подчеркнем, что схема локализованного вязкого течения соответствует бингамову типу возникновения необратимых деформаций и отличается от построений [9, 10], где рассматривалось разрушение вязких или вязкоупругих (во всем объеме) тел.

5. Контурные J-интегралы и рост трещины. В подвижной системе координат x_1, x_2 в силу стационарности и условия $w_1\gg v_1$, $w_1=l^\cdot$, $w_2=0$ имеем

$$\partial/\partial t=-l^\cdot\,\partial/\partial x_1,\quad v_i=-l^\cdot\,\partial u_i/\partial x_1 \tag{5.1}$$

где u_i — смещение. Тогда контурный интеграл (2.7) принимает вид

$$J_0=\int\limits_{\Gamma_\beta}\left\{\left(\varepsilon_v+\frac{\rho v_i v_i}{2}\right)dx_2-\left(t_{ij}u_{i,1}+\frac{q_j}{l^\cdot}\right)\nu_j\,d\Gamma=\frac{E_\alpha}{l^\cdot}=2\gamma_0\right. \tag{5.2}$$

Контурный интеграл (4.1) в силу условий (5.1) принимает форму[1] J-интеграла [1, 11]:

$$J=\int\limits_{\Gamma_\beta}\left\{\left(U_v+\frac{\rho v_i v_i}{2}\right)dx_2-t_{ij}u_{i,1}\nu_j\,d\Gamma\right\}=\frac{\mathbf{D}_\alpha}{l^\cdot}+2\gamma \tag{5.3}$$

для изотермического и адиабатического случаев.

При росте трещины в почти-упругом теле с превалирующим локализованным пластическим течением для J-интеграла справедливо равенство

$$J=\int\limits_{\Gamma_\beta}\left\{\left(U_v+\frac{\rho v_i v_i}{2}\right)dx_2-t_{ij}u_{i,1}\nu_j\,d\Gamma\right\}=2\gamma_* \tag{5.4}$$

---

[1] Этот интеграл был независимо получен Сандерсом (J. Sanders), Эшелби (J. Eshelby), Райсом (J. Rice) и Г. П. Черепановым. Для правильного отражения приоритета этих авторов в данной статье сохранено название «J-интеграл», но интегрирование ведется по «Г-контуру».

Подобное разрушение называется квазихрупким, поскольку кажущаяся «поверхностная энергия» γ_* оказывается не зависящей от скорости роста трещины.

Для почти-упругого тела с превалирующим локализованным вязким течением (бингамова вязкопластичность) J-интеграл оказывается зависящим от скорости роста трещины

$$J=\int_{\Gamma_\beta}\left\{\left(U_v+\frac{\rho v_i v_i}{2}\right)dx_2-t_{ij}u_{i,1}\nu_j\,d\Gamma\right\}=2\eta l^{\cdot} \tag{5.5}$$

а потому разрушение почти-упругого бингамова тела не является квазихрупким.

Рассмотрим пример квазистатического растяжения плоскости с трещиной $(-l, +l)$ усилием p при локализованном вязком течении. Имеем

$$J=\frac{K_c^2}{8G}=\frac{p^2\pi l}{4G}=2\eta l^{\cdot},\qquad K_c=4\sqrt{G}(\eta l^{\cdot})^{1/2} \tag{5.6}$$

Из дифференциального (относительно l) уравнения (5.6) следует экспоненциальный рост трещины. Вновь отметим, что в отличие от [9] здесь идет речь не о линейно-вязкой плоскости, а об упругой, с локализованным вязким течением.

Величины γ_0 и γ допускают следующую интерпретацию. Как известно, введение дополнительных параметров состояния в уравнение баланса полной энергии (притока тепла) – при неизменном уравнении роста энтропии – соответствует учету дополнительных обратимых эффектов. Для тела в целом длина трещины является параметром состояния, а потому величину γ можно рассматривать как обратимую поверхностную энергию. Величина $\gamma_0-\gamma$ соответственно выполняет роль необратимо диссипированной поверхностной энергии. Эффект обратимости трещин был выявлен в опытах И. В. Обреимова [7, 12] по отдиру тонкого слоя слюды и характерен, например, для раскрытия трещины вдоль слоев кристаллической решетки.

Дж. Райс [5] вводил длину трещины как параметр свободной энергии тела в целом, что соответствует обратимости (залечиваемости) трещины.

6. Разрушение вязкого тела. Вязкая модель является предельной для тел, у которых $e_{ij}^p \gg e_{ij}^e$ (она характеризуется условием $e_{ij}=e_{ij}^p$), а напряжения t_{ij} определяются скоростями деформаций по правилу

$$t_{ij}=\frac{\partial D}{\partial e_{ij}^{\cdot}},\qquad t_{ij}e_{ij}^{\cdot}=\frac{\partial D}{\partial e_{ij}^{\cdot}}e_{ij}^{\cdot}=2D \tag{6.1}$$

и для обычных вязких сред имеются в виду тензоры-девиаторы (среды либо несжимаемы, либо сжимаемы, но нет объемной вязкости).

Поскольку эффектами упругости здесь пренебрегается, то анализ упрощается. Предположение о стационарности процесса в $S_{\beta-\alpha}$ соответствует оговоренному выше второму частному случаю, когда

$$R_{\beta-\alpha}=\int_{\Gamma_{\beta-\alpha}}\left\{\sigma(w_j-v_j)-\frac{q_j}{T}\right\}\nu_j\,d\Gamma=\mathrm{const} \tag{6.2}$$

Для анализа закономерности распространения трещины в вязком теле воспользуемся условием стационарности (6.2), а также условием изотермичности, когда достаточно вводить удельную диссипацию

$$T\frac{\partial}{\partial t}R_{\beta-\alpha}=\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}_{\beta-\alpha}=2\int_{S_{\beta-\alpha}}\frac{\partial D}{\partial t}dS+2\int_{\Gamma_{\beta-\alpha}}Dw_j\nu_j\,d\Gamma=0 \tag{6.3}$$

В силу преобразования

$$2\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{\partial t_{ij}}{\partial t}e_{ij}^{\bullet}+t_{ij}\frac{\partial e_{ij}^{\bullet}}{\partial t}=\left(\frac{\partial^2 D}{\partial e_{ij}^{\bullet}\partial e_{ij}^{\bullet}}e_{ij}^{\bullet}+t_{ij}\right)\frac{\partial e_{ij}^{\bullet}}{\partial t}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial e_{ij}^{\bullet}}\left(\frac{\partial D}{\partial e_{ij}^{\bullet}}e_{ij}^{\bullet}\right)\frac{\partial e_{ij}^{\bullet}}{\partial t}=2\frac{\partial D}{\partial e_{ij}^{\bullet}}\frac{\partial e_{ij}^{\bullet}}{\partial t}=2t_{ij}\frac{\partial e_{ij}^{\bullet}}{\partial t}=2t_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial t}$$

получаем

$$2\int\limits_{S_{\beta-\alpha}}\frac{\partial D}{\partial t}dS=2\int\limits_{\Gamma_{\beta-\alpha}}t_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial t}\nu_j\,d\Gamma-\int\limits_{S_{\beta-\alpha}}\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}\frac{\partial v_i}{\partial t}dS \tag{6.4}$$

Если инерционными силами пренебрегать, то подстановка (6.4) в соотношение (6.3) приводит к условию инвариантности следующего интеграла:

$$\int\limits_{\Gamma_\beta}\left(Dw_j+t_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)\nu_j\,d\Gamma=\int\limits_{\Gamma_\alpha}\left(Dw_j+t_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)\nu_j\,d\Gamma=\mathrm{const} \tag{6.5}$$

для любого контура, охватывающего область стационарности процесса вокруг трещины.

Обращение в нуль постоянной в правой части (6.5) связано с тем, что контурный интеграл для Γ_α при тех же условиях равен скорости изменения рассеяния в области S_α, а последняя есть нуль, если в вершине трещины процесс также стационарен

$$\int\limits_{\Gamma_\alpha}\left(Dw_j+t_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)\nu_j\,d\Gamma=\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}_\alpha=0 \tag{6.6}$$

С другой стороны, в области S_α происходит стационарный процесс перехода объем — поверхность, который для вязкого тела означает смену диссипативной функции D_v, характерной для объема, на диссипативную функцию D_s поверхностного слоя. Поэтому интеграл (6.6) преобразуется к виду

$$\int\limits_{\Gamma_\alpha}\left(D_v w_j+t_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)\nu_j\,d\Gamma=\int\limits_{\Gamma_\beta}(D_v-D)\,w_j\nu_j\,d\Gamma$$

Если взять в качестве Γ_α тот же прямоугольник $АВСД$ (фиг. 2), то получим, что только для стороны AB, где $w_j\nu_j=-w_1\approx-l^{\bullet}$, правая часть будет отлична от нуля

$$\int\limits_{\Gamma_\alpha}(D_v-D)\,(w_j-v_j)\,\nu_j\,d\Gamma=l^{\bullet}\int\limits_{-a}^{a}(D_s-D_v)\,dx_2=l^{\bullet}\int\limits_{-a}^{a}[D]\,dx_2$$

Существование предела, отличного от нуля

$$\lim_{a\to 0}2l^{\bullet}\int\limits_{-a}^{a}[D]\,dx_2=2l^{\bullet}\xi$$

соответствует введению скорости диссипации ξ механической энергии — диссипации, сосредоточенной в вершине трещины.

Если использовать условие $w_1=l^{\bullet}$, $w_2=0$, $\partial v_i/\partial t=-l^{\bullet}v_{i,\,1}$, справедливое для контура Γ_β, охватывающего область стационарности поля D, то интегралам (6.5) можно придать форму, аналогичную J-интегралу

$$J_*=\int_{\Gamma_\beta}(D_v\,dx_2-t_{ij}v_{i,1}\nu_j\,d\Gamma)=2\xi \qquad (6.7)$$

Скорость сосредоточенной диссипации ξ обусловлена необходимостью преодоления сил сцепления. В вязком теле силы сцепления естественно задавать пропорциональными скорости расхождения бортов трещины $\delta^\bullet$, которые в свою очередь пропорциональны $l^\bullet$. Отсюда $\xi\sim\delta^{\bullet 2}\sim l^{\bullet 2}$. К этому же выводу приводит и формальная оценка ξ как приращения диссипативной функции второго порядка однородности, характерного для вязкого тела

$$\xi\sim[D]a\sim(\mu_s-\mu_v)e_{ij}^\bullet e_{ij}^\bullet a\sim(\mu_s-\mu_v)(l^\bullet/\sqrt{S_\alpha})^2a$$

где $a\sim\sqrt{S_\alpha}$ или $a\sim\delta$, а μ_s, μ_v — поверхностная и объемные вязкости. Отсюда можно ввести коэффициент ζ интенсификации рассеяния

$$\xi=\zeta l^{\bullet 2},\quad \zeta=[\mu]/\sqrt{S_\alpha},\quad [\mu]=\mu_s-\mu_v$$

Таким образом получен критерий вязкого разрушения следующего вида:

$$J_*=\int_{\Gamma_\beta}(D\,dx_2-t_{ij}v_{i,1}\nu_j\,d\Gamma)=2\zeta l^{\bullet 2} \qquad (6.8)$$

Формула (6.7) была рекомендована в [9, 10], но в правой части подставлялась величина $2\xi=\eta l^\bullet$, где η — коэффициент сопротивляемости. Тем самым, полученный здесь эффективный критерий (6.8) отличается от рекомендаций [9, 10] порядком зависимости J_*-интеграла от скорости роста трещины (второго вместо первого).

В примере растяжения линейно-вязкой плоскости с трещиной $(-l, +l)$ усилием p на бесконечности получаем

$$J_*=K_c^2/8\mu=p^2\pi l/4\mu=2\zeta l^{\bullet 2},\qquad K_c=4\sqrt{\mu\zeta}\,l^\bullet$$

т. е. коэффициент интенсивности напряжений пропорционален первой степени скорости роста трещины. Это дает следующий квадратичный рост трещины:

$$l=\left\{\sqrt{l_0}+\frac{p\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\mu\zeta}}(t-t_0)\right\}^2,\qquad l(t=0)=l_0$$

вместо экспоненциального [9, 10].

Отметим, что линейный масштаб $\sqrt{S_\alpha}$ может быть в условиях автономности функцией скорости $l^\bullet$ в тех случаях, когда из реологических параметров можно составить комбинацию, имеющую размерность времени, т. е. если $\sqrt{S_\alpha}\sim l^\bullet\mu/E$ или $\sqrt{S_\alpha}\sim\mu/(\rho l^\bullet)$.

Отсюда в рассматриваемом здесь случае отсутствия инерционных сил и упругих деформаций $\sqrt{S_\alpha}$ не меняется при изменениях скорости роста трещины, т. е. коэффициент интенсификации рассеяния ζ также не зависит от скорости $l^\bullet$ и выполняет роль материальной постоянной.

7. Рост трещины в пластической области. Рассмотрим случай, когда вокруг вершины трещины материал находится в жесткопластическом состоянии, характеризуемом диссипативной функцией первого порядка однородности

$$e_{ij}^\bullet=e_{ij}^{\bullet p},\qquad t_{ij}=\partial D/\partial e_{ij}^\bullet;\qquad t_{ij}=(\partial D/\partial e_{ij}^\bullet)e_{ij}^\bullet=D$$

и вновь справедливы условия объемной несжимаемости.

Предположение о стационарности процесса в области $S_{\beta-\alpha}$ в изотермических условиях приводит к интегралу (6.3). Далее справедливо преобразование

$$\partial D/\partial t = t_{ij}(\partial/\partial x_j)(\partial v_i/\partial t) \tag{7.1}$$

Подстановка выражения (7.1) в условие (6.3) дает в результате инвариантность следующего интеграла:

$$\int\limits_{\Gamma_\beta} \left(Dw_j + t_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial t}\right) \nu_j\, d\Gamma = \int\limits_{\Gamma_\alpha} \left(Dw_j + t_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial t}\right) \nu_j\, d\Gamma = \text{const}$$

Рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к следующему критериальному интегралу:

$$\int\limits_{\Gamma_\beta} \left(D_v w_j + t_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial t}\right) \nu_j\, d\Gamma = 2\xi l^{\cdot}$$

а также к J_*-интегралу

$$J_* = \int\limits_{\Gamma_\beta} (D_v\, dx_2 - t_{ij} v_{i,1} \nu_j\, d\Gamma) = 2\xi$$

Оценки, характерные для пластического состояния, дают последовательно

$$[D] \sim \sqrt{e_{ij}^{\cdot} e_{ij}^{\cdot}}, \quad \xi \sim (l^{\cdot}/\sqrt{S_\alpha})\, a \sim l^{\cdot}, \quad J_* = 2\eta_* l^{\cdot}$$

где η_* — коэффициент пластической сопротивляемости, $K_c \sim (l^{\cdot})^{1/2}$.

Вновь, в силу отсутствия комбинации реологических констант, имеющих размерность времени, масштаб $\sqrt{S_\alpha}$ приповерхностной интенсификации рассеяния не зависит от скорости $l^{\cdot}$, и параметр η_* играет роль материальной константы.

В данной статье был использован метод, основанный на представлении, что работа, идущая на образование трещины, не исчезает, а сохраняется в виде приращения внутренней энергии частиц, вышедших на поверхность трещины, или же вызывает потоки тепла. Этот метод позволяет, во-первых, получить известные ранее результаты, как, например, J-интеграл (5.3) для изотермического случая. Во-вторых, оказывается возможным выявить ограничительные условия — стационарности, автономности и отсутствия корреляции процессов разной реологической природы — для применения контурных интегралов.

В-третьих, именно указанным методом удается получить ряд новых результатов. Эти результаты таковы: условие (2.7) для неизотермического случая, в правую часть которого входит не эффективная поверхностная энергия, а только гриффитсовская; условие (5.5) для почти-упругого бингамова тела; доказательство существования J_*-интеграла для поля скоростей в вязком теле и его новое значение (6.8); существование J_*-интеграла для поля скоростей в пластической области.

Формальное применение критических условий роста трещин и контурных интегралов может приводить к ряду противоречий. Дж. Райс [13] отмечает противоречия (парадоксы) классической теории разрушения и видит выход во введении конечной зоны действия сил сцепления [6, 7]. Анализ концевой зоны использует дополнительные предположения о тонкой структуре области $\sqrt{S_\alpha}$ и позволяет в одних (наиболее простых) случаях всего лишь выразить измеримые (по энергетическому балансу) коэффициенты γ, η, ζ через другие материальные параметры. Однако в других, более сложных случаях взаимодействия реологических процессов подобный анализ нужен, чтобы найти функциональную зависимость этих параметров от скорости роста трещины и других условий задачи. Континуальное описание концевой зоны требует привлечения нелокальных моделей сплошных сред [14]. В принципе возможны ситуации, когда недостаточно задавать только энергетические стоки в вершине трещины [3] или же отделить концевую зону трещины от внешних областей тела (нарушение автономности [7, 13]).

В связи с анализом роста трещины в вязком теле нужно заметить, что вывод [15] об обязательной упругости частиц вблизи вершины трещины в вязкоупругом теле справедлив лишь для интервалов времени $\sqrt{S_\alpha}/l^\bullet \ll \mu/E$, где μ/E – время релаксации, но не для $\sqrt{S_\alpha}/l^\bullet \gg \mu/E$. Первая оценка соответствует относительно быстрым трещинам, когда силы сцепления определяются расхождением бортов. Вторая – относительно медленным трещинам, когда силы сцепления определяются скоростями расхождения их бортов.

В экспериментах [16, 17], а также в экспериментах, приведенных в обзоре [18], была четко выделена зависимость коэффициента интенсивности напряжений от скорости роста трещин. В экспериментальной работе [16] утверждается любопытный факт существования минимальной скорости $l^\bullet$, нужной для стационарного роста трещины.

Наконец, идея введения специальной вязкости поверхностного слоя, отличной от вязкости жидкости в объеме, известна в гидродинамике. Она использовалась, в частности, Бусинеском (см. обзор [19]) для поверхностных слоев с адсорбированными частицами, реорганизующими структуру жидкости. Эффект изменения вязкости и упругих параметров из-за перестройки внутренней структуры (переориентации молекул) вблизи границ особо изучается в теории таких сред, как жидкие кристаллы.

Автор признателен Дж. Р. Райсу и Дж. Л. Эриксену за обсуждение постановки проблемы. Автор благодарен В. М. Ентову, Е. М. Морозову, Дж. Р. Райсу и другим участникам семинара Л. А. Галина за полезную дискуссию и замечания.

Поступила 27 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов Г. П.* Инвариантные Г-интегралы и некоторые их приложения в механике. ПММ, 1977, т. 41, вып. 3.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1970.
3. *Nikolaevskii V. N.* On a cirtain general formulation of the fracture criterion in solids. Arch. mech. stosowanej, 1976, vol. 28, No. 2.
4. *Petch N. J.* The lowering of fracture-stress due to surface adsorption. Philos. Mag., 1956, Ser. 8, vol. 1, No. 4.
5. *Rice J. R.* Thermodynamics of the quasi-static growth of Griffith cracks. J. Mech. Phys. Solids, 1978, vol. 26, No. 2.
6. *Баренблатт Г. И.* Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
7. *Костров Б. В., Никитин Л. В., Флитман Л. М.* Механика хрупкого разрушения. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3.
8. *Gyarmati I.* Non-equilibrium thermodynamics. Field theory and variational principles. Berlin, Springer, 1970. (Рус. перев.: М., «Мир», 1974.)
9. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. М., «Наука», 1974.
10. *Качанов Л. М.* Рост трещин в условиях ползучести. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 1.
11. *Rice J. R.* Mathematical analysis in the mechanics of fracture. In: Fracture. An advance treatise. H. Liebowitz ed., vol. 2. New York, Acad. Press, 1968. (Рус. перев.: М., «Мир», 1975.)
12. *Obreimow J. W.* The splitting strength of mica. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1930, vol. 127, No. 805, p. 290–297.
13. *Rice J. R.* Elasto-plastic fracture mechanics. In: Mechanics of Fracture. Sympos. ASME Winter Ann. Meet., Appl. Mech. Div., vol. 19, New York, ASME, 1976.
14. *Eringen A. C., Speziale C. G., Kim B. S.* Crack-tip problem in non-local elasticity. J. Mech. and Phys. Solids, 1977, vol. 25, No. 5.
15. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
16. *Лобасенок В. А., Алешин В. И., Кувшинский Е. В.* Изучение резрушения аморфных твердых тел в условиях стационарного роста трещин. Физ. тв. тела, 1973, т. 15, вып. 1.
17. *Dahlberg L.* Method of measuring crack growth in polymers and some experiments on polymethylmethacrylate. Publ. Inst. Hallfasthetslära, KTH, 1972, No. 179.
18. *Freund L. B.* Dynamic crack propagation. In: Mechanics of Fracture Sympos. ASME Winter Ann. Meet., Appl. Mech. Div., vol. 19, New York, ASME, 1976.
19. *Dryden H. L., Murnaghan F. D., Bateman H.* Hydrodynamics. New York, Dover Publ., 1956.