МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1979

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ КОНИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

А. Н. АМРАХОВ

(Кировабад)

Задача о динамическом кручении цилиндрических стержней исследовалась в [1–7]. Сравнительно мало работ посвящено динамическому кручению конических стержней. Для полубесконечного конуса эта задача рассматривалась в [8, 9]. Для случая, когда заданы перемещения на торце конуса, решение получено в [8] для начального момента и при больших значениях времени; в [9] решение построено для случая, когда на торце конуса задано касательное напряжение.

В данной работе строится точное решение смешанной задачи о динамическом кручении конического стержня, имеющего конечную длину. Решение найдено при условии, что в одном торце задано перемещение как произвольная функция от угловой координаты и времени, а другой торец закреплен.

1. В сферической системе координат r, φ, θ стержень занимает область $a\leqslant r\leqslant b$, $0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$. Единственное отличное от нуля перемещение $u_\varphi=v(r, \theta, t)$ определяется из уравнения движения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{v}{r^2\sin^2\theta}=\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

и граничных условий

$$\sigma_{\theta\varphi}=\frac{\mu}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}-v\operatorname{ctg}\theta\right)=0 \quad \text{при } \theta=\theta_0 \tag{1.2}$$

$$v=\psi_0(t)f_0(\theta) \text{ при } r=a \tag{1.3}$$

$$v=0 \text{ при } r=b \tag{1.4}$$

где μ — модуль сдвига, ρ — плотность, $c_2^2=\mu/\rho$; в начальный момент стержень покоится и не деформирован.

Обозначая $x=\cos\theta$, $\tau=c_2 t$ и применяя преобразования Лапласа по τ, решение уравнения (1.1) в изображениях представим в виде $V=R(r)F(x)$:

$$r^2R''(r)+2rR'(r)-[p^2r^2+\alpha(\alpha+1)]R(r)=0 \tag{1.5}$$

$$(1-x^2)F''(x)-2xF'(x)+\left[\alpha(\alpha+1)-\frac{1}{1-x^2}\right]F(x)=0 \tag{1.6}$$

Здесь p — параметр преобразования Лапласа, α — постоянная разделения. Решениями этой системы, ограниченными при $x=1$, будут функции

$$R(r)=\frac{1}{\sqrt{pr}}[AI_{\alpha+1/2}(pr)+BK_{\alpha+1/2}(pr)], \qquad F(x)=P_\alpha^1(x)$$

где $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — функции Бесселя мнимого аргумента, $P_\alpha^1(x)$ — присоединенная функция Лежандра первого рода.

На основе последних формул перемещение представим в виде

$$V=\frac{1}{\sqrt{pr}}[AI_{\alpha+1/2}(pr)+BK_{\alpha+1/2}(pr)]P_\alpha^1(x) \tag{1.7}$$

Записывая граничное условие (1.2) через переменную x и подставляя (1.7), получим соотношение для определения величины α:

$$P_\alpha^2(x_0)=0 \ (x_0=\cos\theta_0) \tag{1.8}$$

Известно [10], что это уравнение имеет бесконечное число простых действительных корней. Обозначая их через α_n, решение задачи получим в виде бесконечной суммы

$$V=(pr)^{-1/2}\sum_{n=1}^{\infty}[A_nI_{\alpha_n+1/2}(pr)+B_nK_{\alpha_n+1/2}(pr)]P_{\alpha_n}^1(x) \tag{1.9}$$

Переходя к переменным x, τ в граничном условии (1.3), находим

$$v=\psi(\tau)f(x),\ V=\Psi(p)f(x),\ r=a \tag{1.10}$$

Используя свойство ортогональности

$$\int_{x_0}^{1}P_{\alpha_n}^1(x)P_{\alpha_k}^1(x)\,dx=\beta_n\delta_{kn} \tag{1.11}$$

разложим функцию $f(x)$ в граничном условии (1.10) в ряд (где δ_{kn} — символ Кронекера)

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_nP_{\alpha_n}^1(x),\qquad f_n=\frac{1}{\beta_n}\int_{x_0}^{1}f(x)P_{\alpha_n}^1(x)\,dx \tag{1.12}$$

Подставляя (1.9) и (1.12) в граничные условия (1.4) и (1.10), получаем систему уравнений для определения постоянных A_n и B_n:

$$A_nI_{\alpha_n+1/2}(pa)+B_nK_{\alpha_n+1/2}(pa)=\sqrt{pa}f_n\Psi(p),\ A_nI_{\alpha_n+1/2}(pb)+B_nK_{\alpha_n+1/2}(pb)=0$$

В результате в области изображения будем иметь

$$V=\sqrt{\frac{a}{r}}\sum_{n=1}^{\infty}f_n\Psi(p)\frac{I_{\alpha_n+1/2}(pr)K_{\alpha_n+1/2}(pb)-I_{\alpha_n+1/2}(pb)K_{\alpha_n+1/2}(pr)}{I_{\alpha_n+1/2}(pa)K_{\alpha_n+1/2}(pb)-I_{\alpha_n+1/2}(pb)K_{\alpha_n+1/2}(pa)}P_{\alpha_n}^1(x) \tag{1.13}$$

Заметим, что решением уравнения (1.6) при $\alpha=0$ будет функция

$$F=C_1\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2}+C_2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}=C_1\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+C_2\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$$

В силу конечности решения на оси конуса найдем, что $C_2=0$, а для того чтобы удовлетворялось условие (1.2) на боковой поверхности, необходимо положить $C_1=0$.

2. Для определения оригинала перемещения $v(r,\theta,t)$ сначала найдем оригинал функции

$$\Phi(p)=\frac{I_{\alpha_n+1/2}(pr)K_{\alpha_n+1/2}(pb)-I_{\alpha_n+1/2}(pb)K_{\alpha_n+1/2}(pr)}{I_{\alpha_n+1/2}(pa)K_{\alpha_n+1/2}(pb)-I_{\alpha_n+1/2}(pb)K_{\alpha_n+1/2}(pa)}\frac{1}{p}$$

Рассмотрим в комплексной плоскости p интеграл от функции $\Phi(p)e^{p\tau}$, взятый вдоль контура, состоящего из прямой $\operatorname{Re} p=\sigma>0$ и части окружности $|p|=R$, лежащей слева от этой прямой.

Чтобы найти нули выражения $I_{\alpha_n+1/2}(pa)K_{\alpha_n+1/2}(pb)-I_{\alpha_n+1/2}(pb)K_{\alpha_n+1/2}(pa)$, подставим в него $p=i\lambda$; тогда оно примет вид $-{}^1/{}_2\pi[J_{\alpha_n+1/2}(a\lambda)Y_{\alpha_n+1/2}(b\lambda)-$ $-J_{\alpha_n+1/2}(b\lambda)Y_{\alpha_n+1/2}(a\lambda)]$, где $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя действительного аргумента.

В комплексной плоскости λ последнее выражение является аналитической и четной функцией и имеет бесконечное число нулей, которые все действительные и простые. Обозначая эти корни через $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2, \ldots$, получаем, что полюсы подынтегральной функции находятся в точках $p=0$, $\pm i\lambda_1$, $\pm i\lambda_2, \ldots$. Вычисляя вычеты этой функции, находим, что они равняются в точке $p=0$:

$$R_n(0)=[a^{\alpha_n+1/2}(b^{2\alpha_n+1}-r^{2\alpha_n+1})]/[r^{\alpha_n+1/2}(b^{2\alpha_n+1}-a^{2\alpha_n+1})]$$

в точках $p=\pm i\lambda_k$:

$$R_n(\lambda_k)\,e^{\pm i\lambda_k\tau},\; R_n(\lambda_k)=\frac{\pi}{2}\frac{J_{\alpha_n+1/2}(\lambda_k a)J_{\alpha_n+1/2}(\lambda_k b)}{J^2_{\alpha_n+1/2}(\lambda_k a)-J^2_{\alpha_n+1/2}(\lambda_k b)}[J_{\alpha_n+1/2}(\lambda_k r)Y_{\alpha_n+1/2}(\lambda_k b)-$$
$$-J_{\alpha_n+1/2}(\lambda_k b)Y_{\alpha_n+1/2}(\lambda_k r)]$$

Используя теорему о вычетах и переходя к пределу при $R\to\infty$, получим оригинал функции $\Phi(p)$:

$$\varphi(\tau)=R_n(0)+2\sum_{s=1}^{\infty}R_n(\lambda_s)\cos\lambda_s\tau$$

Далее легко найти окончательное выражение для перемещения

$$v=\sqrt{\frac{a}{r}}\,\psi(\tau)\sum_{n=1}^{\infty}f_nR_n(0)P_{\alpha_n}{}^1(x)+$$
$$+2\sqrt{\frac{a}{r}}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_nR_n(\lambda_s)\left[\psi(\tau)-\lambda_s\int_0^\tau\psi(\tau_1)\sin\lambda_s(\tau-\tau_1)\,d\tau_1\right]P_{\alpha_n}{}^1(x) \tag{2.1}$$

Напряжения $\sigma_{r\varphi}$ будут определяться по формуле

$$\sigma_{r\varphi}=\mu\psi(\tau)\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left\{\frac{d}{dr}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{1/2}R_n(0)\right]-\frac{a^{1/2}}{r^{3/2}}R_n(0)\right\}P_{\alpha_n}{}^1(x)+$$
$$+2\mu\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left\{\frac{d}{dr}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{1/2}R_n(\lambda_s)\right]-\frac{a^{1/2}}{r^{3/2}}R_n(\lambda_s)\right\}\times$$
$$\times\left[\psi(\tau)-\lambda_s\int_0^\tau\psi(\tau_1)\sin\lambda_s(\tau-\tau_1)\,d\tau_1\right]P_{\alpha_n}{}^1(x) \tag{2.2}$$

Отметим, что $\alpha=1$ является одним из корней характеристического уравнения (1.8); при этом $P_1{}^1(x)=-(1-x^2)^{1/2}=-\sin\theta$. При нахождении поля перемещений и напряжений, соответствующего этой форме колебаний, следует иметь в виду, что при $\alpha_1=1$ цилиндрические функции в выражениях

(2.1) и (2.2) имеют порядок половины нечетного числа. Заменяя их выражениями через элементарные функции, получаем

$$
\begin{gathered}
v_1=-f_1\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{b^3-r^3}{b^3-a^3}\psi(\tau)\sin\theta-\\
-\frac{2f_1}{br}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_s}\frac{(\gamma_1-\cos\lambda_s a)(\gamma_2-\cos\lambda_s b)}{(\gamma_1-\cos\lambda_s a)^2/a-(\gamma_2-\cos\lambda_s b)^2/b}\left[\left(1+\frac{1}{\lambda_s^2 br}\right)\sin\lambda_s(b-r)-\right.\\
\left.-\frac{b-r}{\lambda_s br}\cos\lambda_s(b-r)\right]\left[\psi(\tau)-\lambda_s\int_0^{\tau}\psi(\tau_1)\sin\lambda_s(\tau-\tau_1)\,d\tau_1\right]\sin\theta
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_{r\varphi}^1=\mu f_1\frac{3a^2b^3}{r^3(b^3-a^3)}\psi(\tau)\sin\theta+\\
+f_1\frac{2\mu}{br}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_s}\frac{(\gamma_1-\cos\lambda_s a)(\gamma_2-\cos\lambda_s b)}{(\gamma_1-\cos\lambda_s a)^2/a-(\gamma_2-\cos\lambda_s b)^2/b}\left[\frac{1}{br}\left(3b-r+\frac{3}{\lambda_s^2 r}\right)\times\right.\\
\left.\times\sin\lambda_s(b-r)-\left(\frac{3(b-r)}{\lambda_s br^2}-\lambda_s\right)\cos\lambda_s(b-r)\right]\left[\psi(\tau)-\right.\\
\left.-\lambda_s\int_0^{\tau}\psi(\tau_1)\sin\lambda_s(\tau-\tau_1)\,d\tau_1\right],\quad \gamma_1=\frac{\sin\lambda_s a}{\lambda_s a},\quad \gamma_2=\frac{\sin\lambda_s b}{\lambda_s b}.
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

где λ_s — корни уравнения $\operatorname{tg}\lambda(b-a)=[\lambda(b-a)]/(1+\lambda^2 ab)$. Напряжение $\sigma_{\varphi\theta}$ в этом случае тождественно обращается в нуль.

Переходя к пределу в (1.13) при $b\to\infty$ и вычисляя оригинал найденного выражения при $\alpha=1$, получаем

$$
v_1=\frac{a}{r}f_1\left\{\psi[\tau-(r-a)]-\frac{r-a}{ra}\int_0^{\tau-r+a}\psi[\tau-x-(r-a)]e^{x/a}\,dx\right\}\sin\theta H[\tau-(r-a)]
$$

Отсюда заключаем, что v_1 (аналогично $\partial v_1/\partial\tau$, $\sigma_{r\varphi}^1$), соответствующий форме колебаний $\alpha=1$, описывает процесс распространения волн кручения в конусе без искажения со скоростью поперечных волн. Из выражения (2.3) видно, что деформация в этом случае такова, что каждое сферическое сечение конуса $r=\mathrm{const}$ поворачивается вокруг оси конуса как целое. Нужно отметить, что вследствие влияния боковой поверхности решения, соответствующие случаю $\alpha\neq1$, будут дисперсионными. А каждое сферическое сечение $r=\mathrm{const}$ при этом деформируется таким образом, что после деформации, оставаясь сферическим, искривляются криволинейные радиусы этого сечения.

3. Найдем выражения перемещения для начального момента времени. Так как в этом случае аргументы цилиндрических функций в (1.13) будут большими, заменим их асимптотическими выражениями и вычислим оригинал полученного выражения

$$
v=\frac{a}{r}f(x)\sum_{k=0}^{\infty}\{\psi[\tau-(r-a)-2k(b-a)]-\psi[\tau-2b+a+r-2k(b-a)]\}
$$

Отсюда при $b\to\infty$ получим выражение $v=ar^{-1}f(x)\psi[\tau-(r-a)]$, которое совпадает с решением [8].

Следует отметить, что подобным образом можно решить эту задачу для полого конуса, занимающего область $\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_0$, $a\leqslant r\leqslant b$. Уравнение (1.8) в этом случае заменяется уравнением

$$P_\alpha^2(x_1)Q_\alpha^2(x_0)-P_\alpha^2(x_0)Q_\alpha^2(x_1)=0 \qquad (3.1)$$

где $Q_\alpha^2(x)$ — присоединенная функция Лежандра второго рода. Формулы (1.11)—(1.13), (2.1), (2.2) будут справедливыми и для полого конуса, если в них функции $P_{\alpha_n}^1(x)$ заменить соответственно функциями

$$F(x)=P_{\alpha_n}^1(x)+W_nQ_{\alpha_n}^1(x),\quad W_n=-P_{\alpha_n}^2(x_0)/Q_{\alpha_n}^2(x_0)=-P_{\alpha_n}^2(x_1)/Q_{\alpha_n}^2(x_1)$$

Результаты, полученные при $\alpha=1$, остаются без изменения и для случая полого конуса.

Таким образом, аналогично случаю динамического кручения цилиндрических стержней при распространении волн кручения в конических стержнях каждое сферическое сечение конуса колеблется соответственно заданному колебанию торцевого сечения. В общем случае эти колебания состоят из суперпозиции двух форм: колебания, когда сечения конуса поворачиваются вокруг оси как целое ($\alpha=1$), и бесконечного числа колебаний, при которых сечения конуса искажаются так, что после деформации остаются сферическими ($\alpha=\alpha_n\neq1$). В частности, если заданное колебание торца соответствует только $\alpha=\alpha_n$ ($n=1, 2, \ldots$; $\alpha_1=1$), то в любом сечении конуса также будет возникать колебание, соответствующее только $\alpha=\alpha_n$.

Поля напряжений, соответствующие первой форме волн, образуют основные возмущения; крутящий момент от напряжений, соответствующих второй форме волн в любом сферическом сечении конуса, равен нулю. Следуя [3], эти два поля напряжений можно назвать несамоуравновешенными и самоуравновешенными соответственно.

Поступила 25 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jones R. P. N.* The generation of torsional stress waves in a circular cylinder. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, vol. 12, No. 3.
2. *McCoy J. J.* Propagation of torsional waves in a circular elastic rod. Z. angew. Math. und Phys., 1964, Bd 15, H. 5.
3. *Новожилов В. В., Утешева В. И.* Динамическое кручение полубесконечного цилиндра. Инж. ж. МТТ, 1967, № 1.
4. *Campbell J. D., Tsao M. C. C.* On the theory of transient torsional wave propagation in a circular cylinder. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1972, vol. 25, No. 2.
5. *Поручиков В. Б., Степанов А. В.* Динамическое кручение полого полубесконечного цилиндра. В сб.: Избранные проблемы прикладной механики. М., ВИНИТИ, 1974.
6. *Амрахов А. Н.* Динамическое кручение неоднородного ортотропного круглого цилиндра. Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1975, № 38.
7. *Lawson J. E.* Torsional elastic waves in semi-infinite hollow circular bars. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1975, vol. 28, No. 3.
8. *Кийко И. А.* Динамическое кручение конического стержня. Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1975, № 38.
9. *Matsumoto H., Tsuchida E., Miyao S., Tsunada N.* Torsional stress wave propagation in a semi-infinite conical bar. Bull. JSME, 1976, vol. 19, No. 127.
10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.