МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1979

УДК 539.3

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Ю. К. ЭНГЕЛЬБРЕХТ

(Таллин)

Представляется асимптотический анализ одномерного переходного волнового процесса в нелинейной неоднородной среде. На базе идеи лучевого метода выводятся уравнения переноса первого порядка с соблюдением связанности волн. Для отдельной волны исследуется влияние эффектов нелинейности и неоднородности и определяются основные закономерности процесса. Выводятся уравнения переноса для процессов в нелинейной вязкоупругой среде, в круглом стержне с переменным поперечным сечением и в однородной среде с начальной деформацией. Анализ безразмерных параметров позволяет оценить влияние отдельных эффектов. Представляются численные примеры решения уравнений переноса при разных амплитудах и частотах волн.

Для исследования линейных переходных волновых процессов в неоднородной среде обычно применяется лучевой метод [1]. В последнее время возрос интерес к процессам в нелинейной неоднородной среде, особенно к таким случаям, когда эффекты искажения волн, обусловленные нелинейностью и неоднородностью одного и того же порядка. Такие явления исследованы для звуковых волн, волн в плазме и волн в мелкой воде [2, 3], а также для звуковых импульсов в неоднородном океане [4]. В данной работе исследуются волновые процессы деформации в твердой среде с использованием разработанного в [5] алгоритма.

1. Основные уравнения. Одномерный переходный волновой процесс деформации в неоднородной среде описывается матричным уравнением

$$I\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+A\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}+\sum_{p=2^l}B_{rs}\frac{\partial^p \mathbf{U}}{\partial x^r\,\partial t^s}+K\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}+\mathbf{C}=0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{U}$ — вектор неизвестных полевых величин u_i, $i=1,\ldots,n$; I — единичная матрица, F — известный вектор, $A(x,\mathbf{U})$, $B_{rs}(x,\mathbf{U})$, $K(x,\mathbf{U})$ — переменные матрицы-коэффициенты, $\mathbf{C}(x,\mathbf{U})$ — вектор, который может содержать и интегральные операторы. Уравнение (1.1) является уравнением смешанного типа. Так как в общем случае выполняется $B_{rs}\sim O(\varepsilon)$, где ε — малый параметр, то главная часть уравнения (1.1) является гиперболической.

Исследуем асимптотическое решение $\mathbf{U}=\Sigma\varepsilon^i\mathbf{U}_i$ уравнения (1.1) с граничными условиями

$$\mathbf{U}(x,t)\,|_{t=0}=0,\quad \mathbf{U}(x,t)\,|_{x=0}=\mathbf{\Phi}(t)\,[H(t)-H(t-t_0)]$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда, t_0 — продолжительность импульса, а малый параметр ε связан с амплитудой краевого условия.

Для решения этой задачи применяем алгоритм [4], который в нелинейной постановке ведет к построению уравнений переноса вдоль определенных из ассоциированного гиперболического уравнения бихарактеристик. Считаем, что выполняются все требования относительно зависимых переменных и коэффициентов уравнения (1.1), представленные в [4], основным из которых является условие разложения в ряд по малому параметру ε. Нулевой индекс далее обозначает первый член разложения, причем $A_0=A_0(x)$, $B_{0rs}=\mathrm{const}$, $\mathrm{C}_0=0$. Тогда ассоциированное уравнение с учетом предположения $F\sim O(\varepsilon)$

$$I\frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial t}+A_0\frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial x}=0$$

определяет скорости λ_i отдельных простых волн. Выбирая новые независимые переменные в виде

$$\xi_j=t-\int\limits_0^x(\lambda_j(x))^{-1}\,dx,\qquad \tau=\varepsilon x \tag{1.2}$$

получим из уравнения (1.1) в первом приближении

$$\sum_j^n(I-\lambda_j^{-1}A_0)\frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial \xi_j}=0$$

из которого вытекает

$$\mathbf{U}_0=\sum_i^n \alpha_i(\xi_i,\tau)\,\mathbf{r}_i \tag{1.3}$$

Здесь и далее $\mathbf{l}_i$, $\mathbf{r}_i$ — левый и правый собственные векторы матрицы A_0 при $\lambda=\lambda_i$, а α_i — амплитудный фактор. Подчеркиваем, что новое переменное ξ_j имеет пространственно-временной характер. Если неоднородность проявляется слабо; то имеем $\lambda_j=\lambda_{0j}+O(\varepsilon)$, $\lambda_{0j}=\mathrm{const}$ и взамен преобразования (1.2) справедливо также

$$\xi_j=\lambda_{0j}t-x,\qquad \tau=\varepsilon x \tag{1.4}$$

которое приводит к этому же соотношению (1.3). Полученный результат (1.3) свидетельствует о том, что в основу метода взято разложение по простым волнам. Пусть имеем m взаимодействующих волн. Чтобы облегчить выкладки, построим уравнения переноса для случая слабой неоднородности (1.4), принимая $\tau_n=\varepsilon x_n$, $x_n=x$, $n=1,3,\ldots$; $x_n=-(x-x_0)$, $n=2,4,\ldots$ Здесь нечетные n обозначают волны, идущие в сторону роста координаты x (направо), а четные n — волны, идущие в сторону убывания координаты x (налево). Уравнение переноса первого порядка в этом случае для каждой i-й волны принимает вид

$$a_{i0}\frac{\partial\alpha_i}{\partial\tau_n}+\sum_j^m a_{1j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial\xi_j}+\sum_{p=2}\frac{\partial^p\alpha_i}{\partial\xi_i{}^p}+\sum_j^m f(\alpha_j,\tau_n)=0 \tag{1.5}$$

$$a_{i0}=(-1)^{n+1}\mathbf{l}_iA_0\mathbf{r}_i=(-1)^{n+1}\lambda_i,\qquad a_{1j}=-\mathbf{l}_iA_1\mathbf{r}_j$$

$$a_{2p}=-\lambda_i^{-1}\mathbf{l}_iB_{0rs}\mathbf{r}_i,\qquad f(\alpha_j,\tau_n)=\mathbf{l}_i\mathbf{C}_1(\mathbf{r}_j)\,\alpha_j-\lambda_i^{-1}\mathbf{l}_iK_0\frac{\partial\mathbf{F}_0}{\partial\xi_j}$$

Структура уравнения (1.5) показывает, что определенная i-я волна зависит и от других j-х волн ($j\in m$), для которых выполняется $a_{1j}\neq0$. Оно решается при начальном условии

$$\alpha_i(\xi_i,\tau_n)\big|_{\tau_n=0}=\mathbf{l}_i\Phi(\xi_i)\,[H(\xi_i)-H(\xi_i-\xi_0)]$$

Без учета взаимодействия отдельных волн амплитудный фактор α_i i-й волны $\mathbf{U}_0=\alpha_i\mathbf{r}_i$, идущей направо, определяется из уравнения

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial\tau_1}+a(\alpha_i,\tau_1)\frac{\partial\alpha_i}{\partial\xi_i}+\sum_{p=2}a_{2p}\frac{\partial^p\alpha_i}{\partial\xi_i{}^p}+f(\alpha_i,\tau_1)=0 \qquad (1.6)$$

$$a(\alpha_i,\tau_1)=-\lambda_i^2\mathbf{l}_iA_1(\alpha_i,\tau_i\varepsilon^{-1})\mathbf{r}_i,\ a_{2p}=-\lambda_i^{-2}\mathbf{l}_iB_{0rs}\mathbf{r}_i$$

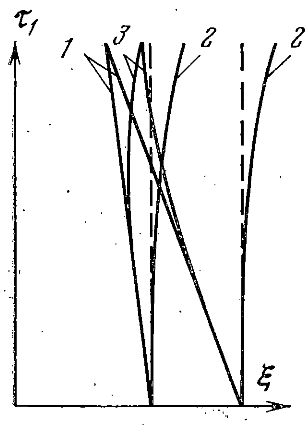
$$f(\alpha_i,\tau)=\lambda_i^{-1}\mathbf{l}_i\mathbf{C}_1(\mathbf{r}_i)\alpha_i-\lambda_i^{-2}\mathbf{l}_iK_0\frac{\partial\mathbf{F}_0}{\partial\xi_i}$$

Если справедливо разложение $A_1=A_{11}(\mathbf{U})+A_{12}(x)$, то имеем

$$a(\alpha_i,\tau)=a_1\alpha_i+a(\tau_1). \qquad (1.7)$$

$$a_1=-\lambda_i^{-2}\mathbf{l}_iA_{11}(\mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i,\ a(\tau_1)=-\lambda_i^{-2}\mathbf{l}_iA_{12}(\tau_1\varepsilon^{-1})\mathbf{r}_i$$

Уравнение переноса первого порядка (1.6) для определенной i-й волны позволяет учесть одновременно эффекты нелинейности и неоднородности для одной определенной волны. Тип уравнений (1.5), (1.6) зависит от наличия высших производных. В простейшем случае наличия только эффектов нелинейности и неоднородности они являются гиперболическими, имея вид



Фиг. 1

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial\tau_1}+(a_1\alpha_i+a(\tau_1))\frac{\partial\alpha_i}{\partial\xi_i}+f(\alpha_i)=0 \qquad (1.8)$$

Основной результат такого подхода заключается в том, что уравнения переноса (1.5) способны описать связанные волны. Из структуры соотношения (1.7) вытекает, что связанность обусловлена как нелинейными эффектами (члены типа $a_1\alpha_j\partial\alpha_k/\partial\xi_k$), так и неоднородностью среды (члены типа $a(\tau_n)\cdot\partial\alpha_k/\partial\xi_k$), которая возникает и в линейной постановке задач. Учет предположения, что нелинейные эффекты и эффекты, обусловленные неоднородностью, одного и того же порядка, позволяет провести сравнительный анализ указанных эффектов. Далее в рамках данной статьи будет изучена именно эта проблема.

Рассмотрим коротко основные выводы на базе общих уравнений переноса. Так как характеристическое направление в случае (1.7) определяется соотношением $d\xi_i/d\tau_1=a_1\alpha_1+a(\tau_1)$ то вполне ясно, что поведение характеристик (наклоны) по сравнению со случаем линейной однородной среды ($d\xi_i/d\tau_1=0$) зависит от вклада обоих эффектов. При выполнении условия $|a_1\alpha_i|>|a(\tau_1)|$ доминирует нелинейность, и наклоны характеристик качественно соответствуют случаю в чисто нелинейной среде.

При выполнении условия $|a_1\alpha_i|<|a(\tau_1)|$ доминирует эффект неоднородности, и наклоны характеристик качественно соответствуют случаю в чисто неоднородной среде. Условие $a(\tau_1)=-a_1\alpha_i$ может выполняться лишь в определенной точке ξ°, τ° и асимптотически справедливо в окрестности этой точки. Это условие покажет справедливость линейной однородной модели, т. е. характеристики в этом случае параллельны оси τ_1. Необходимо подчеркнуть, что возникновение разрыва зависит качественно только от нелинейности среды. Эффекты неоднородности, однако, могут изменить время возникновения разрыва, но пространственная координата при этом не **изменяется.**

На фиг. 1 представлена схема характеристик уравнения (1.8) на плоскости ξ, τ_1. Пунктирной линией обозначены характеристики в случае линейной неоднородной среды, сплошные линии соответствуют случаю нелинейной (кривые *1*), неоднородной (кривые *2*) и нелинейной неоднородной (кривые *3*) сред. Схема соответствует случаю $|a_1\alpha_i|>|a(\tau_1)|$. Отметим, что качественное поведение характеристик может быть различным в пределах одного импульса, так как наклоны характеристик зависят от амплитуды.

Если в уравнении переноса учитываются диссипативные эффекты, то возникновение ударного профиля управляется теми же правилами, что и возникновение ударной волны [6]. Например, в случае модели Кельвина–Фойгта имеем в уравнении (1.1) $r=s=1$ и $a_{22}=-\lambda_i^2\mathbf{l}_i B_{011}\mathbf{r}_i$. Из этого следует, что при возрастании скорости λ_i в ходе развития процесса диссипативные эффекты уменьшаются, а при уменьшении скорости λ_i – увеличиваются.

2. Конкретные модели. *1. Одномерная сплошная среда.* Исходной принимаем модель нелинейной вязкоупругой среды

$$[T_{11}(1+U_{1,1})]_{,1}-\rho U_1^{\cdot\cdot}=0$$

$$T_{11}=T_{11}^E+T_{11}^D, \qquad T_{11}^D=(\eta_1+{}^4/_3\eta_2)\dot{U}_{1,1}$$

$$T_{11}^E=(\lambda+2\mu)U_{1,1}+[{}^1/_2\lambda+\mu+3(\nu_1+\nu_2+\nu_3)]U_{1,1}^2$$

где T_{11} — компонент тензора напряжения; U_1 — перемещение; λ, μ — параметры Лямэ; ν_i, $i=1, 2, 3$ — модули упругости третьего порядка; η_1, η_2 — коэффициенты вязкости, ρ — плотность в недеформированном состоянии. Здесь и далее запятая означает дифференцирование по пространственной координате, точка — по времени.

Предполагаем, что параметры Лямэ и плотность являются функциями от пространственной координаты, остальные показатели среды постоянны. Без потери общности считаем, что эти зависимости — медленно изменяющиеся функции, так что справедливо

$$\lambda+2\mu=(\lambda_0+2\mu_0)(1+\varepsilon f_1(x)), \quad \rho=\rho_0(1+\varepsilon h_1(x))$$

где нулевой индекс обозначает значение указанного параметра в определенной точке, например при $x=0$, а ε — малый параметр.

Из этих соотношений вытекает

$$c^2=c_0^2(1+\varepsilon g_1(x)), \quad g_1(x)=f_1(x)-h_1(x)$$

Предполагаем, что $f_1(x)$, $h_1(x)$ являются гладкими функциями; они удовлетворяют условиям $f_1(0)=h_1(0)=0$ и обладают производными требуемого порядка. Окончательная система получит тогда форму (1.1), в которой

$$A=\begin{vmatrix} 0 & -c_0^2[1+3(1+m_0)u_2+\varepsilon g_1(x)] \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B_{11}=\begin{vmatrix} 0 & -n_0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$K=\begin{vmatrix} -c_0^2u_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{U}=\begin{vmatrix} U_1^{\cdot} \\ U_{1,1} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{F}=\begin{vmatrix} 1+\varepsilon f_1(x) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$m_0=2(\nu_1+\nu_2+\nu_3)(\lambda_0+2\mu_0)^{-1}, \quad n_0=(\eta_1+{}^4/_3\eta_2)\rho_0^{-1}$$

Так как в этом случае неоднородность проявляется слабо, можно использовать преобразование (1.4), и уравнение переноса первого порядка для продольной волны без учета связанности записывается в виде (индексы у переменных опущены)

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\tau}+\left[-\frac{1}{2}c_0^{-1}g_1(x)+\frac{3}{2}(\varepsilon c_0)^{-1}(1+m_0)\alpha\right]\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}-$$

$$-\frac{1}{2}n_0(\varepsilon c_0)^{-1}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\xi^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x}\alpha=0$$

Используя безразмерные переменные $\beta=\alpha\alpha_0^{-1}$, $\sigma=a_1\alpha_0\tau\tau_c^{-1}$, $\zeta=\xi\tau_c^{-1}$ $a_1={}^3/_2|1+m_0|(\varepsilon c_0)^{-1}$, получим более компактную запись уравнения переноса

$$\frac{\partial\beta}{\partial\sigma}+\operatorname{sign}(1+m_0)\beta\frac{\partial\beta}{\partial\zeta}-\Theta(\sigma)\frac{\partial\beta}{\partial\zeta}+\Lambda\beta=\Gamma^{-1}\frac{\partial^2\beta}{\partial\zeta^2} \qquad (2.1)$$

$$\Gamma=3|1+m_0|\alpha_0\tau_c n_0^{-1},\qquad \Lambda=\frac{\varepsilon\tau_c c_0}{3|1+m_0|\alpha_0}\frac{\partial f_1}{\partial x}$$

$$\Theta(\sigma)=\frac{\varepsilon c_0}{3|1+m_0|\alpha_0}g_1\left(\frac{2\tau_c c_0\sigma}{3|1+m_0|\alpha_0}\right)$$

Здесь α_0 — максимальная амплитуда, τ_c — характерная длина импульса в единицах длины.

Отметим, что гидродинамическая модель в неоднородной среде при тех же предпосылках ведет к уравнению переноса (где γ — адиабата)

$$\frac{\partial\beta}{\partial\sigma}-\beta\frac{\partial\beta}{\partial\zeta}-\Theta(\sigma)\frac{\partial\beta}{\partial\zeta}=\Gamma^{-1}\frac{\partial^2\beta}{\partial\zeta^2}$$

$$\Gamma=(\gamma+1)\alpha_0\tau_c n_0^{-1},\qquad \Theta(\sigma)=\frac{2\varepsilon c_0}{(\gamma+1)\alpha_0}g_1\left(\frac{\tau_c c_0\sigma}{(\gamma+1)\alpha_0}\right)$$

Структура уравнений переноса и их коэффициентов позволяет сразу получить некоторые сведения о волновом процессе. Прежде всего отметим, что параметр Γ, характеризующий относительный вклад нелинейных и диссипативных эффектов, называется акустическим числом Рейнольдса, а параметры $\theta(\sigma)$, Λ характеризуют влияние неоднородности. При этом $\theta(\sigma)$ характеризует сдвиг действительного фронта волн относительно фронта в однородной среде, а Λ – изменение амплитуды, аналогичное эффекту сферического или цилиндрического расхождения (схождения). Необходимо подчеркнуть, что существование члена $\Lambda\beta$ в уравнении переноса – основное различие между гидродинамической моделью и моделью твердой среды.

Аналогично анализу п. 1 можно заключить, что если модули упругости увеличиваются (уменьшаются) в направлении распространения волны сжатия, то качественные изменения наклонов характеристик, обусловленные неоднородностью и нелинейностью, имеют одинаковый (противоположный) характер. Характер параметра Λ говорит о том, что влияние неоднородности больше для импульсов с меньшей частотой и меньшей амплитудой.

Пусть для конкретности имеем $g_1(x)=kx$, $x=\text{const}$. Тогда $\Theta(\sigma)=\Theta_1\varepsilon k\sigma$, $\Theta_1={}^2/_9c_0{}^2\tau_c(1+m_0)^{-2}\alpha_0^{-2}$. Анализ коэффициента Θ_1 приводит к выводу, что изменение амплитуды влияет на значение Θ_1 больше, чем изменение частоты импульсов. Координата τ°, определяющая точку равновесия между эффектами нелинейности и неоднородности по формуле $\tau^\circ=3|1+m_0|\alpha_0(c_0k)^{-1}$, зависит только от амплитуды импульса и не зависит от частоты.

2. Круглый стержень с переменным поперечным сечением. Уравнение движения в этом случае можно принимать в традиционном виде

$$[ST_{33}(1+U_{3,3})]_{,3}-\rho_0 S\ddot{U}_3=0$$

где $S=S(x_3)$ — поперечное сечение и ось x_3 совпадает с продольной осью стержня. Учитывая поправку Рэлея относительно поперечной инерции, вязкость и нелинейность, имеем

$$T_{33}=E_0U_{3,3}+{}^3/_2E_0(1+m_0)U_{3,3}^2+\eta\dot{U}_{3,3}+{}^1/_2\rho_0\nu^2R^2\ddot{U}_{3,3}$$

где E_0 — модуль упругости второго порядка, m_0 — соотношение модулей упругости третьего и второго порядков, η — коэффициент вязкости, ν — число Пуассона, R — радиус стержня.

Пусть $S=S_0(1+\varepsilon f(x_3))^m$, где m — действительное число, S_0 — поперечное сечение при определенном x_3, например при $x_3=0$, $f(x_3)$ — гладкая функция, $f(0)=0$.

Уравнение переноса первого порядка в безразмерных переменных получит вид

$$\frac{\partial\beta}{\partial\sigma}+\operatorname{sign}(1+m_0)\beta\frac{\partial\beta}{\partial\zeta}-\Omega^{-2}\frac{\partial^3\beta}{\partial\zeta^3}+\Lambda\beta=\Gamma^{-1}\frac{\partial^2\beta}{\partial\zeta^2} \tag{2.2}$$

$$\Gamma=3|1+m_0|\tau_c\alpha_0 n_0^{-1}\left(1-l_0^2\varepsilon c_0 n_0^{-1}m\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^{-1}$$

$$\Omega^2=3|1+m_0|\tau_c\alpha_0 l_0^{-2}c_0^{-1},\ l_0^2={}^1/_2\nu^2R_0^2$$

$$\Lambda={}^1/_3c_0m\alpha_0^{-1}|1+m_0|^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_3},\qquad n_0=\eta\rho_0^{-1}$$

Здесь l_0 — масштабный параметр, Ω — параметр дисперсии. Уравнение (2.2) — один модифицированный вариант уравнения Бюргерса — Кортевега — де Вриза, учитывающий, кроме диссипации и дисперсии, и эффекты, обусловленные изменением поперечного сечения стержня. Из линеаризованного варианта основного уравнения вытекает дисперсионное соотношение для гармонической волны частотой ω:

$$\omega^2\left(1+i\varepsilon l_0^2m\frac{\partial f}{\partial x_3}k+l_0^2k^2\right)=c_0^2k^2\left(1-i\varepsilon m\frac{\partial f}{\partial x_3}k^{-1}-in_0c_0^{-2}\omega\right)$$

где k — волновое число. Кроме дисперсии геометрического характера из-за поправки Рэлея (член $l_0^2k^2$) здесь оказывает влияние изменение поперечного сечения в качестве мнимой дисперсии.

Возникновение ударного профиля по нелинейной модели не зависит от формы поперечного сечения стержня. Изменения в амплитуде, однако, существенные, и качественный характер этих изменений зависит от увеличения или уменьшения поперечного сечения в направлении распространения волны.

3. Однородная среда с начальной деформацией. Пусть в неоднородной бездиссипативной среде существует начальное напряжение T_{11}^0, которое соответствует деформации $U_{1,1}^0$. Уравнение движения приобретает тогда вид [7]:

$$[T_{11}(1+\overset{\circ}{U}_{1,1}+U_{1,1})+T_{11}{}^\circ U_{1,1}]_{,1}-\rho_0\ddot{U}_1=0$$

Уравнение переноса первого порядка, следуя изложенной выше процедуре, записывается в безразмерных переменных в виде

$$\frac{\partial\beta}{\partial\sigma}+\operatorname{sign}(1+m_0)\beta\frac{\partial\beta}{\partial\zeta}-\Theta(\sigma)\frac{\partial\beta}{\partial\zeta}+\Lambda\beta=0 \tag{2.3}$$

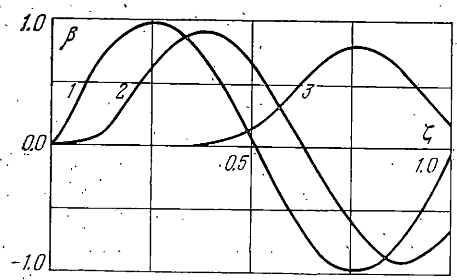
$$\Theta(\sigma)=c_0\alpha_0^{-1}\overset{\circ}{U}_{1,1},\qquad \Lambda=c_0\alpha_0^{-1}\overset{\circ}{U}_{1,11}$$

Так как характеристическое направление уравнения (2.3) определяется соотношением $d\zeta/d\sigma=\operatorname{sign}(1+m_0)\beta-\Theta(\sigma)$, то уравнение (2.3) гиперболическое и справедливы общие закономерности неоднородного процесса, изложенные в п. 1. С физической точки зрения $\Theta(\sigma)$ представляет собой соотношение начальной деформации к максимальной погонной деформации. Из структуры этого параметра вытекает, что влияние начальной деформации более существенно для волн с меньшей амплитудой.

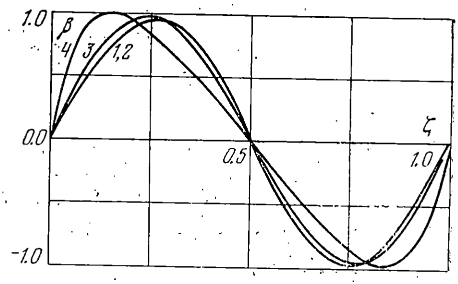
Изменение амплитуды импульса в предварительно деформированной среде учитывается членом $\Lambda\beta$ в уравнении (2.3). При увеличении частоты коэффициент Λ уменьшается, при $U_{1,1}^0=\mathrm{const}$ получим $\Lambda=0$.

3. Численные результаты. Для иллюстрации представим здесь некоторые результаты численного интегрирования уравнения переноса (2.1) методом конечных разностей второго порядка точности. Во всех примерах показатели среды изменились по линейному закону.

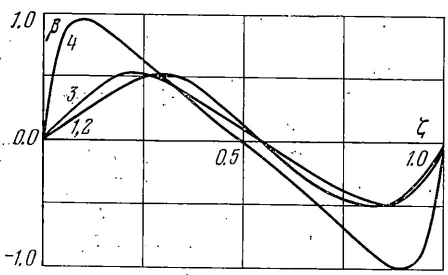
Расчеты проведены для алюминия: $c_0=6.3\cdot10^5$ см с$^{-1}$, $n_0=7.0\cdot10^3$ см^{2}с$^{-1}$, $m_0=9.2$, $g_1(x)=f_1(x)=\varepsilon kx$, $\varepsilon k=\pm10^{-4}$ см$^{-1}$. Начальное условие в безразмерных переменных



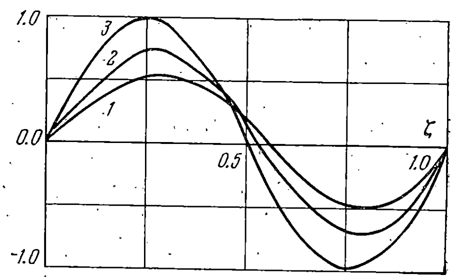
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

было принято в виде синусоидального импульса

$$\beta|_{\sigma=0}=\sin 2\pi\zeta[H(\zeta)-H(\zeta+1)].$$

За основу сопоставления результатов, если не указано отдельно, принято $x=115$ см. Начальная амплитуда и частота указаны далее отдельно для каждого примера. Сдвиг импульса в среде с уменьшением модуля упругости относительно фронта линейной волны в однородной среде ($\zeta=0$) показан на фиг. 2 для волны частотой 10^4 гц и амплитудой $\alpha_0=5.625$ см с$^{-1}$ (кривая *1* соответствует $x=1$ см – практически начало процесса; кривая *2* – $x=500$ см; кривая *3* – $x=1000$ см). Так как амплитуда импульса мала, то влияние нелинейности незаметно. При больших амплитудах влияние нелинейности станет существенным.

На фиг. 3 представлены графики для частоты 10^4 гц (кривая *1* – $\alpha_0=5.625$ см с$^{-1}$; кривая *2* – $\alpha_0=5.625\cdot10$ см с$^{-1}$, кривая *3* – $\alpha_0=5.625\cdot10^2$ см с$^{-1}$; кривая *4* – $\alpha_0=5.625\cdot10^3$ см с$^{-1}$).

На фиг. 4 представлены графики для частоты 10^5 гц (обозначения см. на фиг. 3). Кривая *4* на фиг. 4 соответствует импульсу, для основной части которого выполняется условие $|a_1\beta|>|a(\tau)|$, поэтому поведение импульса резко отличается от других импульсов той же частоты, но меньшей амплитудой.

На фиг. 5 показаны профили импульсов с амплитудой $\alpha_0=5.625\cdot10$ см с$^{-1}$ (кривая *1* – 10^5 гц, кривая *2* – $7\cdot10^4$ гц, кривая *3* – 10^4 гц). Диссипация является существенной для высших частот.

Поступила 11 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.
2. *Asano N.* Reductive perturbation method for non-linear wave propagation in inhomogeneous media. III. J. Phys. Soc. Japan, 1970, vol. 29, No. 1, p. 220–224.
3. *Asano N.* Wave propagation in non-uniform media. Suppl. Progr. Theor. Phys., 1974, No. 55, p. 52–79.
4. *Пелиновский Е. Н., Петухов Ю. В., Соустова И. А., Фридман В. Е.* Распространение и дифракция звуковых импульсов в неоднородном океане. Матер. симпоз. «Нелинейные волны деформации», ч. 2. Таллин, АН Эст. ССР, 1978.
5. *Энгельбрехт Ю. К.* О теории нелинейных волновых процессов в диссипативной среде. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 2.
6. *Bland D. R.* On shock structure in a solid. J. Inst. Maths. and Appl., 1965, vol. 1, No. 1, p. 56–75.
7. *Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуща О. И.* Введение в акустоупругость. Киев, «Наукова думка», 1977.