

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ДИНАМИКЕ ТРЕЩИНЫ В УПРУГОМ ТЕЛЕ

В. А. САРАЙКИН, Л. И. СЛЕПЯН

(Новосибирск, Ленинград)

Рассматривается решение нестационарной смешанной задачи для полуплоскости, когда точка раздела граничных условий движется с переменной скоростью. Факторизация операторов (точнее их изображений), используемая в методе Винера — Хонфа, трактуется как разбиение фундаментального решения на еще более «элементарные» составляющие, которые описываются обобщенными функциями. Объединение носителей этих функций может составлять лишь часть носителя фундаментального решения, что позволяет построить решение указанной смешанной задачи. Конкретно рассматриваются задачи о динамике полубесконечной трещины на основе линейной теории упругости и для некоторой приближенной модели, а также аналогичные автомоделные задачи для ограниченной трещины.

Общее решение нестационарной задачи о напряжениях на продолжении плоской трещины, движущейся с переменной скоростью, найдено в [1, 2]. В этих работах установлено, что свертка напряжений на продолжении полубесконечной трещины с некоторыми функциями, возникающими при факторизации, отлична от нуля лишь на продолжении трещины, а свертка перемещений берегов трещины с соответствующими функциями — лишь на берегах трещины. Это позволило решить рассматриваемую смешанную задачу с неравномерно движущейся точкой раздела граничных условий путем сведения ее к решенной ранее задаче для антиплоской деформации [3].

В общем случае решение для полубесконечной трещины выражается пятикратным интегралом. В [1, 3] указана процедура построения решения и для конечной трещины, соответствующая учету воли, распространяющихся от одного края трещины к другому и обратно, и реализуемая в том случае, когда начальная длина трещины отлична от нуля.

Отмеченные выше свойства сверток имеют место и в более общем случае, чем это указано в [1], что позволяет выписать решение для полубесконечной трещины [4, 5], минуя этап сведения плоской задачи к антиплоской (и затем — к уравнению Абеля). При этом напряжения на продолжении трещины и перемещения берегов трещины выражаются четырехкратными интегралами, а асимптотика напряжений у края трещины (интенсивность напряжений) — двукратным интегралом, в то время, как в [1] — трехкратным. Ниже решение плоской задачи разбирается подробнее, чем это сделано в [1, 4, 5]. Приводятся результаты вычисления вспомогательных функций, входящих в решение, но не связанных с характером нагрузки, действующей на берега трещины, и законом ее распространения.

Общее решение остается слишком громоздким для численной реализации, поэтому в [4], а затем в [6] предлагалась приближенная модель, дающая близкое к точному решение задачи Лемба для границы полуплоскости и существенно более простое решение задачи о динамике трещины. Ниже на конкретных примерах сравниваются решения, следующие из «точной» и приближенной моделей. Аналогичные сравнения проводятся и для автомоделных задач, в которых начальная длина трещины равна нулю.

1. Постановка задачи и общее решение. Рассмотрим задачу для полуплоскости, на границе которой заданы функции σ и w :

$$\begin{aligned}\sigma(t, x) &= \sigma_-(t, x) & \text{при } x < l(t) \\ w(t, x) &= w_+(t, x) & \text{при } x > l(t)\end{aligned}$$

где t — время, x — координата вдоль границы полуплоскости, $l(t)$ — некоторая функция — положение точки раздела граничных условий. Значения

функций $\sigma = \sigma_+(t, x)$ при $x > l(t)$ и $w = w_-(t, x)$ при $x < l(t)$ неизвестны. Пусть изображения функций $\sigma(t, x)$, $w(t, x)$ (обозначим их $\sigma^{LF}(s, q)$, $w^{LF}(s, q)$) связаны соотношением

$$w^{LF}(s, q) = S^{LF}(s, q) \sigma^{LF}(s, q) \quad (1.1)$$

Здесь s, q — параметры преобразований: Лапласа по t и Фурье по x ; оригинал $S(t, x)$, соответствующий S^{LF} , равен $w(t, x)$ при $\sigma(t, x) = \delta(t) \delta(x)$ (δ — функция Дирака). Если, например, σ — нормальное напряжение, а w — нормальное перемещение на границе полуплоскости, то $S(t, x)$ — решение задачи Лемба для сосредоточенного импульса. Полагая, что функция $S(t, x)$ известна.

Уравнение (1.1) непосредственно решить нельзя, так как $w^{LF} = w_+^{LF} + w_-^{LF}$, $\sigma^{LF} = \sigma_+^{LF} + \sigma_-^{LF}$ в выражениях для w^{LF} и σ^{LF} , а слагаемые w_-^{LF} и σ_+^{LF} неизвестны.

Представим $S^{LF} = S_+^{LF} S_-^{LF}$ и перепишем (1.1) в виде

$$P_-^{LF} w_-^{LF} + P_-^{LF} w_+^{LF} = S_+^{LF} \sigma_+^{LF} + S_+^{LF} \sigma_-^{LF}, \quad P_{\pm}^{LF} = 1/S_{\pm}^{LF} \quad (1.2)$$

Предположим, что функция S^{LF} такова, что указанная выше факторизация приводит к функциям S_{\pm}^{LF} , P_{\pm}^{LF} , оригиналы которых удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} P_+(t, x) = S_+(t, x) = 0 & \quad \text{при } x < v_+ t \\ P_-(t, x) = S_-(t, x) = 0 & \quad \text{при } x > v_- t \\ v_- < l'(t) = dl/dt < v_+ \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тогда неизвестные функции $w_-(t, x)$, $\sigma_+(t, x)$ определяются так:

$$\begin{aligned} w_- = S_-^{**} [(S_+^{**} \sigma_- - P_-^{**} w_+) H(l - x + 0)] + S_-^{**} C \\ \sigma_+ = -P_+^{**} [(S_+^{**} \sigma_- - P_-^{**} w_+) H(x - l + 0)] + P_+^{**} C \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь символ $(**)$ означает свертку по переменным t и x , H — функция Хевисайда, C — некоторая обобщенная функция, носитель которой сосредоточен на линии $x = l(t)$:

$$C = \sum_{m=0}^n f_m(x) \delta^{(m)}[x - l(t)]$$

Слагаемые $S_-^{**} C$, $P_+^{**} C$ в (1.4) — решения однородной задачи, т. е. решения уравнения (1.2) при $w_+ = \sigma_- = 0$. Произвол, вносимый указанными слагаемыми, как обычно в смешанных задачах, устраняется привлечением дополнительных условий, например условия ограниченности энергии.

Формулы (1.4) получены следующим образом. Произведению изображений $P_-^{LF} w_-^{LF}$ соответствует свертка оригиналов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t+0} P_-(\tau, \xi) w_-(t - \tau, x - \xi) H(v_- \tau - \xi + 0) H[l(t - \tau) - x + \xi + 0] d\tau d\xi \quad (1.5)$$

где множители (функции Хевисайда) введены, чтобы подчеркнуть наличие предельных значений для носителей P_- (1.3) и w_- ($w_-(t, x) = 0$ при $x > l(t)$).

Свертка (1.5) отлична от нуля для тех областей на плоскости x, t , где аргументы функций Хевисайда положительны: $\xi \leq v_- \tau$, $\xi \geq x - l(t - \tau)$. От

сюда для $x > l(t)$ находим

$$v_{-}\tau > l(t) - l(t-\tau) \geq l'_{\min}\tau$$

Вместе с тем, по условию (1.3) $l' > v_{-}$. Противоречие свидетельствует о том, что $P_{-} ** w_{-} = 0$ при $x > l(t)$. Аналогично доказывается, что $S_{+} ** \sigma_{+} = 0$ при $x < l(t)$. Отсюда и следует, что (1.2) удовлетворяются соотношениями

$$\begin{aligned} P_{-} ** w_{-} &= (S_{+} ** \sigma_{-} - P_{-} ** w_{+}) H(l-x+0) \\ S_{+} ** \sigma_{+} &= (S_{+} ** \sigma_{-} - P_{-} ** w_{+}) H(x-l+0) \end{aligned}$$

Вновь применив преобразования Лапласа и Фурье, поделив после этого первое равенство на P_{-}^{LF} , второе — на S_{+}^{LF} и перейдя затем к оригиналам, получаем первые слагаемые в равенствах (1.4). Прибавляя решения однородной задачи, приходим к указанному общему решению (1.4). При этом условия: $w_{-} = 0$ при $x > l$, $\sigma_{+} = 0$ при $x < l$ одновременно выполняются лишь в том случае, когда носитель C сосредоточен на линии $x = l(t)$. Установим теперь связь между свойствами LF -изображений (S_{\pm}^{LF}) и условиями (1.3) для оригиналов.

2. Функции с носителями на лучах в плоскости x, t . Рассмотрим LF -изображение $f^{LF}(s, q)$ — аналитическую функцию s и q медленного (степенного) роста с особыми точками

$$q_h = is/v + b_h, \quad s_h = -iqv + ib_h v \quad (2.1)$$

$$\text{Im } v = 0 \quad (h=1, \dots, n), \quad v \neq 0$$

причем других особых точек на плоскости q и s нет. В формуле обращения

$$f(t, x) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f^{LF}(s, q) \exp(st - iqx) ds dq$$

положим $s = -iqc_0 + p$, $vc_0 > 0$. Тогда

$$f(t, x) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f^{LF}(p - iqc_0, q) \exp[pt - iq(x + c_0 t)] dp dq \quad (2.2)$$

При этом особые точки на плоскости q смещаются

$$q_h = (b_h + ip/v) / (1 - c/v) \quad (2.3)$$

Полагая $\text{Re } p$ достаточно большой, имеем ($vc_0 > 0$):

$$\text{Im } q_h > 0 \quad (c_0 < v), \quad \text{Im } q_h < 0 \quad (c_0 > v) \quad (2.4)$$

Деформируем путь интегрирования в формуле обращения для преобразования Фурье в форме (2.2) в верхнюю полуплоскость для $x + c_0 t < 0$ и в нижнюю — для $x + c_0 t > 0$. На основании (2.4) получим

$$f(t, x) = 0 \quad \text{при } x + c_0 t < 0, \quad c_0 > v \quad (2.5)$$

$$f(t, x) = 0 \quad \text{при } x + c_0 t > 0, \quad c_0 < v$$

Отсюда, так как значение c_0 можно взять любым ($vc_0 > 0$, $c_0 \neq v$), имеем

$$f(t, x) = 0 \quad \text{при } x < -vt \text{ и } x > -vt \quad (2.6)$$

и, следовательно, носитель $f(t, x)$ сосредоточен на луче $x = -vt$.
Пусть теперь

$$f^{LF}(s, q) = \prod_{m=1}^M f_m^{LF}(s, q) \quad (2.7)$$

где каждая из функций f_m^{LF} имеет особые точки вида (2.1) на плоскостях q и s :

$$q_{mh} = is / v_m + b_{mh}, \quad s_{mh} = -iqv_m + ib_{mh}v_m \quad (2.8)$$

Тогда, используя формулу обращения (2.2) и рассуждая так же, как и выше, найдем, что носитель $f(t, x)$ представляет собой объединение носителей $f_m(t, x)$ и областей между ними

$$f(t, x) = 0 \quad \text{при } x < -v_{\min}t \text{ и } x > -v_{\max}t \quad (2.9)$$

где v_{\min} и v_{\max} — минимальная и максимальная из скоростей v_m .

Таким образом, если функция $S^{LF}(s, q)$ в (1.1) имеет особые точки вида (2.8) (не имеет других) и факторизация проводится так, что особые точки $S_+^{LF}(s, q)$ соответствуют скоростям $v_m < v_+$, а особые точки $S_-^{LF}(s, q)$ — скоростям $v_m > v_-$, то решение (1.4) справедливо при $v_- < l'(t) < v_+$.

3. Плоская задача о трещине. Рассмотрим линейно-упругое изотропное тело с плоской полубесконечной трещиной ($x < l(t)$, $y = 0$), к берегам которой при $t \geq 0$ приложены нормальные напряжения $\sigma_-(t, x)$ (одинаковые для верхнего и нижнего берегов). Начальные условия нулевые. Вследствие симметрии на продолжении трещины ($x > l(t)$, $y = 0$) смещение w_+ вдоль оси y и касательное напряжение равны нулю. Задача об определении напряжения σ_+ на продолжении трещины и нормального перемещения ее берегов (w_-) сводится к рассмотренной в п. 1, где, как известно (см., например, [1]):

$$S^{LF}(s, q) = b^2 s^2 \sqrt{a^2 s^2 + q^2} / [\mu R(s, q)] \quad (3.1)$$

$$R(s, q) = 4q^2 \sqrt{a^2 s^2 + q^2} \sqrt{b^2 s^2 + q^2} - (b^2 s^2 + 2q^2)^2$$

Здесь a , b — величины, обратные скоростям волн расширения и сдвига, μ — модуль сдвига. Аналитическая функция $S^{LF}(s, q)$ имеет следующие особые точки: $q = \pm ias$, $q = \pm ibs$ (точки ветвления) и $q = \pm ics$ (простые полюса; c — величина, обратная скорости волны Релея, $0 < a < b < c$). Особые точки на плоскости s соответствуют указанным.

Таким образом, особые точки $S^{LF}(s, q)$ — типа (2.1) и, следовательно, носитель $S(t, x)$ — отрезок $-t/a \leq x \leq t/a$. Стандартным путем (см., например, [1]) можно провести факторизацию, т. е. представить $S^{LF} = S_+^{LF} S_-^{LF}$, причем, если S_+^{LF} будет иметь особые точки в нижней полуплоскости q , а S_-^{LF} — в верхней, то решение (1.4) будет справедливо при $|l'(t)| < 1/c$.

Для того чтобы использовать решение (1.4) для $1/c < l'(t) < 1/b$, следует провести факторизацию по-другому. А именно, необходимо, чтобы S_+^{LF} имела особые точки $q = -ias$, $q = -ibs$, а S_-^{LF} — остальные. Наконец, для скорости трещины, удовлетворяющей неравенству $1/b < l'(t) < 1/a$, в результате факторизации S_+^{LF} должна иметь единственную особую точку $q = -ias$ (S_-^{LF} — остальные).

Рассмотрим первый случай, полагая $0 \leq l'(t) < 1/c$. Тогда можно записать

$$S_{+}^{LF} = \frac{\sqrt{as-iq}}{cs-iq} D_{+}, \quad S_{-}^{LF} = -\frac{b^2 \sqrt{as+iq}}{2\mu(b^2-a^2)(cs+iq)} D_{-}$$

$$D_{\pm} \left(\frac{iq}{s} \right) = \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(\alpha) d\alpha}{\alpha \mp iq/s} \right) \quad (3.2)$$

$$\varphi(\alpha) = \arctg [4\alpha^2 \sqrt{b^2 - \alpha^2} \sqrt{\alpha^2 - a^2} (b^2 - 2\alpha^2)^{-2}]$$

Чтобы облегчить дальнейшие вычисления, представим $D_{\pm}(iq/s)$ в несколько иной форме. Функции $D_{\pm}(iq/s)$ являются аналитическими на всей комплексной плоскости iq/s за исключением точек, принадлежащих разрезам $[\pm a, \pm b]$. Если C_{\pm} — замкнутые линии, охватывающие по отдельности разрезы, то значения аналитических во внешней области функций определяются их граничными значениями по формуле Коши для неограниченных областей

$$D_{\pm} \left(\frac{iq}{s} \right) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\pm}} \frac{D_{\pm}(\xi) d\xi}{\xi - iq/s}$$

$$D_{\pm}^{-1} \left(\frac{iq}{s} \right) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\pm}} \frac{D_{\pm}^{-1}(\xi) d\xi}{\xi - iq/s}$$

Контуры C_{\pm} обходятся по часовой стрелке.

Деформацией контуров на вещественную ось новые выражения для функций приводятся к следующему виду:

$$D_{\pm} \left(\frac{iq}{s} \right) = 1 + \int_a^b \frac{F_1(u) du}{u \mp iq/s}, \quad D_{\pm}^{-1} \left(\frac{iq}{s} \right) = 1 + \int_a^b \frac{F_2(u) du}{u \mp iq/s}$$

$$F_1(u) = \gamma(u) \exp[\kappa(u)], \quad F_2(u) = -\gamma(u) \exp[-\kappa(u)]$$

$$\gamma(u) = \frac{4}{\pi} u^2 \sqrt{b^2 - u^2} \sqrt{u^2 - a^2} [(b^2 - 2u^2)^4 + 16u^4 (b^2 - u^2)(u^2 - a^2)]^{-1/2} \quad (3.3)$$

$$\kappa(u) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \varphi(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha - u}$$

Аналитические представления [8] для изображений (3.2) определяются формулами обращения однородного LF -преобразования (см. [9], § 18):

$$f(t, z) = -\frac{1}{2\pi iz} f^{LF} \left(1, -\frac{it}{z} \right) * g^*(t)$$

$$f(t, x) = \lim_{\nu \rightarrow 0} [f(t, x + i\nu) - f(t, x - i\nu)] \quad (3.4)$$

$$\{f^{LF}(s, s\alpha) = g^L(s) f^{LF}(1, \alpha)\}$$

Здесь символ * означает свертку по переменной t , аналитические представления обозначены теми же буквами, но вместо переменной x для функции пишем $z = x + iy$ — для ее аналитического представления.

С помощью выражений (3.4) находим аналитические представления

$$S_+(t, z) = - \left\{ \left[\left(a - \frac{t}{z} \right)^{1/2} \left(c - \frac{t}{z} \right)^{-1} D_+ \left(\frac{t}{z} \right) \right] * t_+^{-1/2} \right\} / \left[2\pi i z \Gamma \left(-\frac{1}{2} \right) \right]$$

$$P_+(t, z) = - \left\{ \left[\left(a - \frac{t}{z} \right)^{-1/2} \left(c - \frac{t}{z} \right) D_+^{-1} \left(\frac{t}{z} \right) \right] * t_+^{-5/2} \right\} / \left[2\pi i z \Gamma \left(-\frac{3}{2} \right) \right]$$

а затем и функции S_+, P_+ :

$$S_+(t, x) = - \frac{\sqrt{t/x-a}}{\pi(cx-t)} D_+ \left(\frac{t}{x} \right) H(x) H \left(\frac{t}{x} - a \right) * \frac{t_+^{-1/2}}{\Gamma(-1/2)}$$

$$P_+(t, x) = \frac{cx-t}{\pi\sqrt{t-ax}} x_+^{-1/2} D_+^{-1} \left(\frac{t}{x} \right) H(x) H \left(\frac{t}{x} - a \right) * \frac{t_+^{-5/2}}{\Gamma(-3/2)}$$

где t_+^λ, x_+^λ — обобщенные функции [8].

Отсюда, после несложных преобразований (интегрирования по частям и дифференцирования по параметру под знаком интеграла) получаем

$$\begin{aligned} S_+(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[1 - B \sqrt{\frac{c-a}{c-t/x}} H \left(c - \frac{t}{x} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{t/x}^b \frac{F_1(u)}{(c-u)} \sqrt{\frac{u-a}{u-t/x}} du \right] H \left(\frac{t}{x} - a \right) \right\} \\ P_+(t, x) &= \frac{x_+^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (c-a) A \delta \left(\frac{t}{x} - a \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{t/x} \frac{d}{du} \left(\frac{(c-u) F_2(u)}{\sqrt{u-a}} \right) \frac{du}{\sqrt{u-t/x}} \right] H \left(\frac{t}{x} - a \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(c \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \left[A \delta(t-ax) + \int_a^b F_3(h) \delta(t-hx) dh \right] \frac{H(x)}{\sqrt{x}} \right\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Постоянные A, B и функция F_3 определены следующим образом:

$$A = 1 + \int_a^b F_2(u) \frac{du}{u-a}, \quad B = 1 - \int_a^b F_1(u) \frac{du}{c-u} \tag{3.6}$$

$$F_3(h) = \int_h^b \frac{d}{du} \left[\frac{F_2(u)}{\sqrt{u-a}} \right] \frac{du}{\sqrt{u-h}}$$

Функции S_- , P_- получаются из (3.5) заменой x на $-x$ и умножением на постоянную (см. (3.2)).

Определим напряжения на продолжении трещины при постоянной сосредоточенной силе, действующей на берега трещины

$$\sigma_-^\circ(t, \tau, x, \xi) = -\delta(x-\xi)H(t-\tau), \quad \xi < l(\tau) \quad (3.7)$$

Подставив в (1.4) выражение (3.5) и учитывая, что по условию задачи $w_+ = 0$ и что вследствие ограниченности энергии $C = 0$, получаем

$$\sigma_+^\circ = \frac{1}{\pi\sqrt{x}} \left[A\delta(t-ax) + \int_a^x F_3(h) \delta(t-hx) dh \right] H(x) ** \Psi(t, \tau, x, \xi)$$

$$\Psi = \left\{ (1-cl')\delta(x-l) \left[1-B\sqrt{\frac{c-a}{c-T}} H(c-T) - \int_T^b \frac{F_1(u)}{(c-u)} \sqrt{\frac{u-a}{u-T}} du \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{1}{2}(x-\xi)^{-1/2} + \int_T^b \frac{d}{du} (F_1(u)\sqrt{u-a}) \frac{du}{\sqrt{u-T}} \right] \frac{H(x-l)}{(x-\xi)} \right\} H(T-a)$$

$$l=l(t), \quad T=(t-\tau)/(x-\xi)$$

Заметим, что в первой из свертываемых функций слагаемые однотипны, поэтому, для того чтобы проинтегрировать полученное для напряжения выражение, достаточно вычислить только свертку с $x^{-1/2}\delta(t-hx)H(x)$. Полагая $h=a$, найдем свертку для первого слагаемого. Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательный результат

$$\sigma_+^\circ(t, \tau, x, \xi) = \frac{1}{\pi} \left[AN^\circ(t, \tau, x, \xi, a) + \int_a^b F_3(h) N^\circ(t, \tau, x, \xi, h) dh \right] H(T-a)$$

$$N^\circ(t, \tau, x, \xi, h) = \frac{(1-cl')N_1H(L-a)}{(1-hl')\sqrt{x-l}\sqrt{l-\xi}} - \frac{N_2H(L-a)}{x-\xi} - \frac{N_3H(a-L)}{x-\xi}$$

$$N_1 = \Phi(L, c) - B\sqrt{(c-a)/(c-L)} H(c-L)$$

$$N_2 = \sqrt{(x-l)/(l-\xi)} \Phi(L, T) + \pi F_1(T) \sqrt{(T-a)/(T-h)} H(b-L) \quad (3.8)$$

$$N_3 = \sqrt{(T-a)/(h-T)} \Phi(a, T)$$

$$\Phi(p_1, p_2) = 1 - \int_{p_1}^b \frac{F_1(u)}{(p_2-u)} \sqrt{\frac{u-a}{u-p_1}} du H(b-p_1)$$

$$T=(t-\tau)/(x-\xi), \quad L=(t_0-\tau)/(l-\xi), \quad l=l(t_0)$$

Значение t_0 определяется уравнением

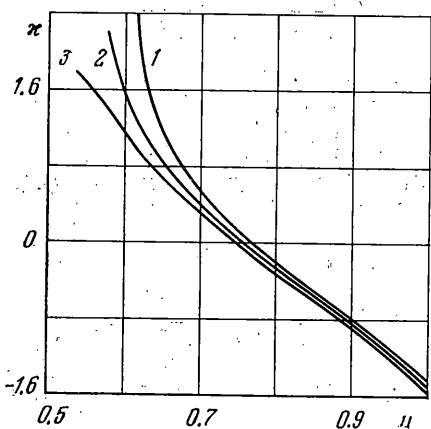
$$t-t_0 = h[x-l(t_0)] \quad (3.9)$$

Отметим, что поведение напряжения у края трещины определяется первым слагаемым функции N° .

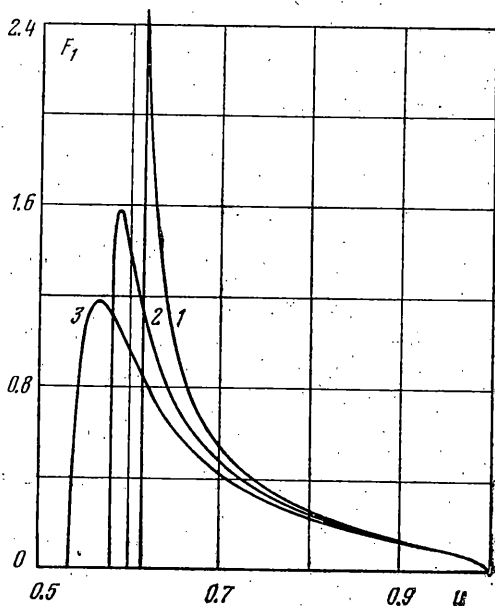
При произвольной нагрузке $\sigma_-(t, x)$ напряжение на продолжении полубесконечной трещины получается из решения (3.8) суперпозицией

$$\sigma_+(t, x) = - \int_{-\infty}^{t_0} \int_{-0}^{t_0} \frac{\partial \sigma_-(\tau, \xi)}{\partial \tau} \sigma_+^\circ(t, \tau, x, \xi) d\tau d\xi \quad (3.10)$$

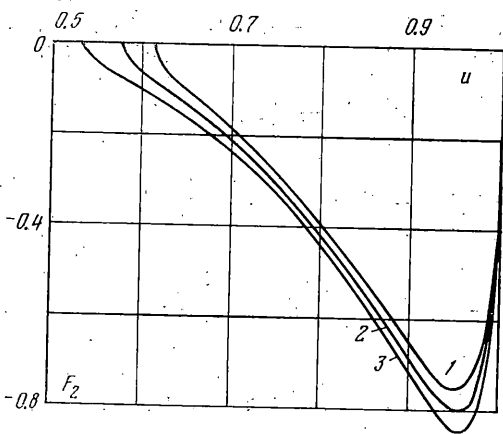
Функции $F_i(u)$ в решении (3.8) не связаны с законом движения трещины и краевыми условиями, поэтому они могут быть вычислены заранее, независимо от рассматриваемой задачи. Свертка (3.10) определяет, таким



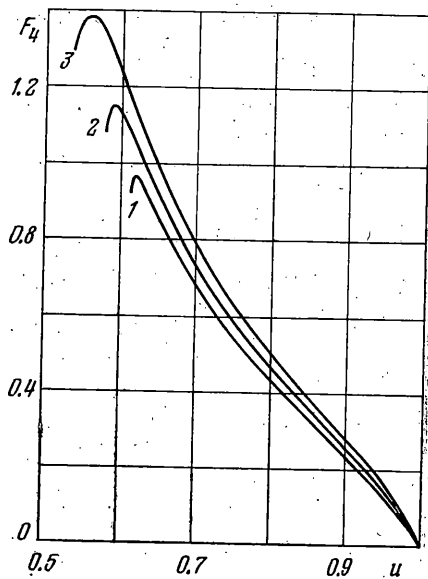
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

образом, решение задачи в самом общем случае четырехкратным интегралом.

На фиг. 1—3 показаны графики функций $\kappa(u)$, $F_1(u)$, $F_2(u)$ ($a \leq u \leq b$). Кривым 1—3 на каждой фигуре соответствуют значения коэффициента Пуассона 0.2, 0.25, 0.3. За единицу измерения на оси абсцисс принята ско-

рость волны сдвига ($b=1$). Функцию F_3 , как и F_1, F_2 , можно найти через κ .

4. Интенсивность напряжений. Рассмотрим поведение решения (1.4) в окрестности точки смены граничных условий при $C=0$. Функции S_{\pm}, P_{\pm} определены в (3.5). Учитывая, что носители функций $P_+(t, x)$ и $S_-(t, x)$ расположены в областях $t/c \leq x \leq t/a$ и $-t/a \leq x \leq -t/b$, имеем следующие выражения для отыскания асимптотик функций σ_+ и w_- :

$$\begin{aligned} \sigma_+ &= \left(c \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-0}^{t+0} P_+(\tau, \xi) f(t-\tau, x-\xi) H\left(\frac{\tau}{a} - \xi\right) H\left(\xi - \frac{\tau}{c}\right) \times \\ &\quad \times H[x - \xi - l(t-\tau)] d\tau d\xi, \quad x \rightarrow l(t) + 0 \\ w_- &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-0}^{t+0} S_-(\tau, \xi) f(t-\tau, x-\xi) H\left(\frac{\tau}{a} + \xi\right) H\left(-\xi - \frac{\tau}{b}\right) \times \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\times H[l(t-\tau) - x + \xi] d\tau d\xi, \quad x \rightarrow l(t) - 0$$

$$P_+ = \left(c \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) P_+^{\circ}, \quad S_- = \frac{\partial}{\partial t} S_-^{\circ}, \quad f(t, x) = S_+^{**} \sigma_- - P_-^{**} w_+$$

Из ограничений на области интегрирования $x - \xi - l(t-\tau) > 0$ для σ_+ и $l(t-\tau) - x + \xi > 0$ для w_- , получаем цепочки неравенств

$$0 \leftarrow x - l(t) \geq \xi - l(t) + l(t-\tau) \geq \xi - l_{\max}^*(t) \tau \geq (1/c - l_{\max}^*(t)) \tau \geq 0$$

$$0 \geq -(1/b + l_{\min}^*(t)) \tau \geq \xi - l_{\min}^*(t) \tau \geq \xi - l(t) + l(t-\tau) \geq -(l(t) - x) \rightarrow -0$$

показывающие, что τ при стремлении x к точке перемены граничных условий справа или слева становится сколь угодно малой величиной. Имея это в виду, заменим $l(t-\tau)$ в (4.1) разложением в окрестности точки $\tau=0$. В результате получаем, что при вычислении асимптотик функций σ_+ и w_- интегрирование на плоскости τ, ξ ведется соответственно по областям d_+ и d_- :

$$\begin{aligned} \tau/c \leq \xi \leq \tau/a, \quad \xi < x - l(t) + l'(t) \tau - o(\tau^2) \\ x \rightarrow l(t) + 0, \quad \tau \rightarrow +0 \\ -\tau/a \leq \xi \leq -\tau/b, \quad \xi > -(l(t) - x) + l'(t) \tau - o(\tau^2) \\ x \rightarrow l(t) - 0, \quad \tau \rightarrow +0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

которые в пределе стягиваются в точку $\tau = \xi = 0$.

Учитывая это, функцию $f(t-\tau, x-\xi)$ выносим за знак интеграла. Получаем следующие асимптотические равенства:

$$\begin{aligned} \sigma_+ \sim \left(c \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) f(t, l(t)) \iint_{d_+} P_+^{\circ}(\tau, \xi) d\tau d\xi, \quad x \rightarrow l(t) + 0 \\ w_- \sim \frac{\partial}{\partial t} f(t, l(t)) \iint_{d_-} S_-^{\circ}(\tau, \xi) d\tau d\xi, \quad x \rightarrow l(t) - 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Попутно заметим, что проведенные здесь асимптотические преобразования легко обобщаются на случай, когда функции S_{\pm}, P_{\pm} удовлетворяют лишь ограничениям (1.3), т. е. имеют полубесконечные носители.

Перейдем к задаче о трещине, полагая в (4.3) $w_+ = 0$. Найдем асимптотику напряжения у края трещины. Учитывая, что

$$\begin{aligned} \iint_{a_+} P_+^\circ(\tau, \xi) d\tau d\xi &= \frac{2\sqrt{x-l}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{A}{\sqrt{1-al'}} + \int_a^b F_3(h) \frac{dh}{\sqrt{1-hl'}} \right) = \\ &= \frac{2\sqrt{x-l}}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-al'}} \left(1-l' \int_a^b F_2(u) \frac{du}{1-ul'} \right), \quad l=l(t), \quad l'=l'(t) \end{aligned}$$

и раскрывая свертки в $f(t, l(t))$, определяем коэффициент интенсивности напряжений при произвольной нагрузке для трещины, движущейся с переменной скоростью

$$K_I = \lim_{x \rightarrow l(t)+0} \sqrt{2\pi(x-l)} \sigma_+ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-cl'}{\sqrt{1-al'}} k(l') (-J_1 + J_2 + J_3) \quad (4.4)$$

$$J_1 = \int_{l-t/a}^l \sigma_-(t-a(l-\xi), \xi) \frac{d\xi}{\sqrt{l-\xi}}$$

$$J_2 = B\sqrt{c-a} \int_{t/c}^{t/a} (cu-t)^{-1/2} \int_{-0}^{\lambda} \sigma_-' \left(\tau, l + \frac{\tau}{c} - u \right) d\tau du$$

$$J_3 = \int_a^b F_4(u) \int_{-0}^{t+0} \sigma_-' \left(t-\tau, l - \frac{\tau}{u} \right) \sqrt{\tau} d\tau du$$

$$F_4(u) = u^{-1/2} \int_u^b \frac{F_1(\omega)}{(c-\omega)} \sqrt{\frac{\omega-a}{\omega-u}} d\omega$$

$$k(l') = 1-l' \int_a^b F_2(u) \frac{du}{1-ul'}, \quad \lambda = \frac{t-au}{1-a/c}, \quad l=l(t)$$

$$\sigma_-'(\tau, g(\tau)) = \partial \sigma_-(\tau, \xi) / \partial \tau \quad \text{при} \quad \xi = g(\tau)$$

При вычислении коэффициента интенсивности в (3.5) была выделена функция $F_4(u)$, не зависящая от условий задачи и закона движения трещины

$$\int_p^b \frac{F_1(u)}{(c-u)} \sqrt{\frac{u-a}{u-p}} du = \int_a^b u^{-1/2} F_4(u) \delta(p-u) du, \quad p = \frac{t-\tau}{l-\xi}$$

В результате, если задана нагрузка на берегах трещины, коэффициент интенсивности (4.4) определяется двукратным интегралом. Функция $F_4(u)$ вычисляется независимо (см. фиг. 4). Кривые 1-3 на фигуре соответствуют значениям коэффициента Пуассона $\nu = 0.2, 0.25, 0.3$.

5. Приближенная модель. В [4] предложена приближенная модель динамики упругой трещины. Упрощения в решении достигнуты за счет за-

мены оператора S^{LF} в (3.1) более простым

$$S^{LF}(s, q) = S_*^{LF}(s, q) = -\eta \frac{\sqrt{a^2 s^2 + q^2}}{c^2 s^2 + q^2}, \quad \eta = \frac{b^2}{2\mu(b^2 - a^2)} \quad (5.1)$$

что эквивалентно замене $D_{\pm}(iq/s)$ единицей. В операторе S_*^{LF} сохранены некоторые особые точки S^{LF} — полюса $q = \pm ias$, точки ветвления $q = \pm ics$, а также асимптотика при $|q| \rightarrow \infty$. Благодаря этому, после факторизации получаются функции типа (1.3).

В п. 1 было отмечено, что оригинал, соответствующий S^{LF} , — это перемещение точек поверхности полупространства при сосредоточенном импульсном воздействии. Обращая S^{LF} , находим известное решение плоской задачи Лемба (см., например, [9], § 33):

$$S(t, x) = \frac{b^2 X^2 (2 - b^2 X^2)^2 \sqrt{1 - a^2 X^2}}{\pi \mu t [(2 - b^2 X^2)^4 + 16(1 - a^2 X^2)(1 - b^2 X^2)]}, \quad bX \geq 1 \quad (5.2)$$

$$S(t, x) = -\frac{b^2 X^2 \sqrt{1 - a^2 X^2}}{\pi \mu t R(iX, 1)}, \quad X = \frac{x}{t}, \quad 0 \leq bX < 1$$

Функция $R(iX, 1)$ определена в (3.1).

Приближенный оператор (5.1) аппроксимирует перемещение поверхности полупространства следующим образом:

$$S_*(t, x) = -\frac{\eta \sqrt{1 - (ax/t)^2}}{t[1 - (cx/t)^2]} H\left(1 - a \frac{|x|}{t}\right) \quad (5.3)$$

Точное и приближенное решения при $x/t=0$ совпадают. Как и в точном решении, перемещение $S_*(t, x)$ имеет особенность на фронте волны Релея.

В [6] была изменена аппроксимация перемещения в задаче Лемба для $|x| < t/c$ за счет изменения скорости распространения возмущений в приближенной модели. Вместо (5.1) в задаче о трещине рассмотрен оператор

$$S_*^{LF}(s, q) = -\eta \frac{\sqrt{a_*^2 s^2 + q^2}}{c^2 s^2 + q^2}, \quad \eta = \frac{b^2}{2\mu(b^2 - a^2)} \quad (5.4)$$

Перемещение $S^*(t, x)$, определяемое по формуле (5.3) при $a = a_*$, отлично от нуля в интервале $|x| < t/a_*$. Оно по-прежнему совпадает с $S(t, x)$, когда $x/t=0$. Чтобы приблизить перемещение $S^*(t, x)$ за фронтом волны Релея ($|x| < t/c$) к точному, в [6] значение a_* определено из равенства

$$\lim_{|x| \rightarrow t/c} [S(t, x) - S^*(t, x)] = 0 \quad (5.5)$$

Отсюда параметр a_* в приближенной модели (5.4) равен

$$a_* = a_1 = \left\{ c^2 - \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)(2 - b^2/c^2)^4}{[4(a^2 + b^2 - 2a^2 b^2/c^2) - b^2(2 - b^2/c^2)^2]^2} \right\}^{1/2} \quad (5.6)$$

В рамках модели (5.4) параметр a_* можно найти из других соображений. Условие (5.5), как показали расчеты, аппроксимирует решение задачи Лемба в интервале $t/c < |x| \leq t/a$ с погрешностью, которая связана не только с величиной перемещения, но и с длиной интервала. Так, с ростом коэффициента Пуассона до 0.5 длина интервала $[t/c, t/a]$ неограниченно растет ($a \rightarrow 0$), а в приближенной модели a_* по условию (5.5) практически не меняется. Можно предположить, что для аппроксимации реше-

ния в задачах о трещине более важно совпадение перемещений $S(t, x)$ и $S^*(t, x)$ в среднем. Поэтому при сравнениях в приближенной модели наряду с a_* из (5.5) будем применять значения a_* , определяемые условием

$$\int_0^{1/a} S(1, \xi) d\xi - \int_0^{1/a_*} S^*(1, \xi) d\xi = 0 \quad (5.7)$$

Зависимость корней уравнений (5.5) ($a_* = a_1$) и (5.7) ($a_* = a_2$) от коэффициента Пуассона ν для случая плоской деформации приведена ниже

$\nu =$	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4
$a/b =$	0.6667	0.6124	0.5774	0.5345	0.4083
$a_1/b =$	0.9452	0.9479	0.9486	0.9487	0.9470
$a_2/b =$	0.9287	0.9224	0.9107	0.8879	0.7665

Решение задачи для полубесконечной трещины по приближенной модели (напряжение) находится из (1.4), где следует заменить S_+ и P_+ оригиналами функций, полученных после факторизации S^{*LF} :

$$S_+^*(t, x) = (\pi x)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[1 - \sqrt{\frac{c-a}{c-t/x}} H\left(c - \frac{t}{x}\right) \right] H\left(\frac{t}{x} - a\right) \right\}$$

$$P_+^*(t, x) = \left(c \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) [(\pi x)^{-1/2} \delta(t - a_* x) H(x)]$$

По условию задачи в (1.4) полагается также $w_+ = 0, C = 0$.

При произвольной нагрузке, действующей на берега трещины, напряжение на ее продолжении в приближенной модели получается двукратным интегрированием [4, 5]:

$$\sigma_+^*(t, x) = -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1-cl^*}{\sqrt{x-l(1-a_*l^*)}} \left[\int_{l_1}^l \sigma_-(t-a_*(l-\xi), \xi) \frac{d\xi}{\sqrt{l-\xi}} - \right. \right. \quad (5.8)$$

$$\left. \left. - \sqrt{c-a_*} \int_{t/c}^{t/a_*} (cu-t_*)^{-1/2} \int_{-0}^{u_1} \sigma_-' \left(\tau, l + \frac{\tau}{c} - u \right) d\tau du \right] - \right.$$

$$\left. - \sqrt{x-l} \int_{l_1}^l \sigma_-(t-a_*(l-\xi), \xi) \frac{d\xi}{(x-\xi)\sqrt{l-\xi}} \right\}, \quad l_1 = l - \frac{t_*}{a_*}$$

$$l = l(t_*), \quad t - t_* = a_* [x - l(t_*)], \quad u_1 = \frac{t_* - a_* u}{1 - a_*/c}$$

$$\sigma_-'(\tau, g(\tau)) = \partial \sigma_-(\tau, \xi) / \partial \tau \quad \text{при} \quad \xi = g(\tau)$$

У края трещины напряжение растет пропорционально $(x-l(t))^{-1/2}$. Коэффициент интенсивности приближенного решения имеет вид

$$K_I^* = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-cl^*}{\sqrt{1-a_*l^*}} \left[\int_{l-t/a_*}^l \sigma_-(t-a_*(l-\xi), \xi) \frac{d\xi}{\sqrt{l-\xi}} - \right. \quad (5.9)$$

$$\left. - \sqrt{c-a_*} \int_{t/c}^{t/a_*} (cu-t)^{-1/2} \int_{-0}^{u_2} \sigma_-' \left(\tau, l + \frac{\tau}{c} - u \right) d\tau du \right], \quad u_2 = \frac{t - a_* u}{1 - a_*/c}$$

Сравним значения K_I и K_I^* для некоторых нагрузок.

Пусть $\sigma_-(t, x) = -\delta(x - \xi)H(t - \tau)$. Коэффициенты интенсивности (4.4) и (5.9) для постоянной сосредоточенной силы выражаются следующим образом:

$$K_I = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k(l') \frac{(1-cl')g(t)}{\sqrt{1-al'}\sqrt{l-\xi}} H\left(\frac{t-\tau}{l-\xi} - a\right)$$

$$K_I^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(1-cl')g^*(t)}{\sqrt{1-a_*l'}\sqrt{l-\xi}} H\left(\frac{t-\tau}{l-\xi} - a_*\right) \quad (5.10)$$

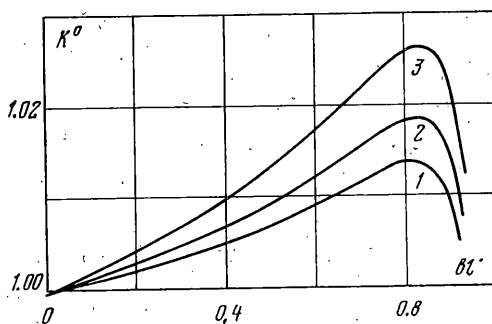
$$g(t) = 1 - B \sqrt{\frac{c-a_*}{c-L}} H(c-L) - \int_L^b \frac{F_1(u)}{(c-u)} \sqrt{\frac{u-a}{u-L}} du H(b-L)$$

$$g^*(t) = 1 - \sqrt{\frac{c-a_*}{c-L}} H(c-L), \quad L = \frac{t-\tau}{l-\xi}, \quad l=l(t)$$

Оценим погрешность приближенного решения у края трещины после прихода в вершину трещины волны Релея. Начиная с этого момента времени, сжатие у края сменяется растяжением: $g(t) = g^*(t) = 1$. На фиг. 5, 6 показано отношение коэффициента интенсивности приближенного решения к точному значению в функции от l' ($0 \leq l' \leq 1/c$):

$$K^0 = K_I^*/K_I = k^{-1}(l') \sqrt{(1-al')/(1-a_*l')} \quad (5.11)$$

Кривые 1-3 соответствуют значениям коэффициента Пуассона 0,2, 0,25, 0,3. Графики на фиг. 5 построены при $a_* = a_1$ (условие (5.5)), а на фиг. 6 те же кривые вычислены для сравнения при $a_* = a_2$ (условие (5.7)). Скорость волны сдвига при расчетах была принята за единицу измерения.



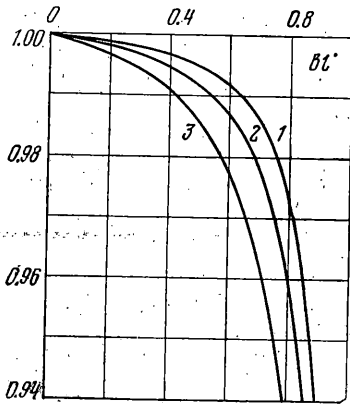
Фиг. 5

Отметим, что в первом случае приближенный коэффициент интенсивности несколько завышает, а во втором — занижает истинные значения коэффициента интенсивности. При движении трещины со скоростью $l' < 0.8/c$ относительная погрешность в обоих случаях примерно одна и та же. С дальнейшим ростом скорости движения трещины приближенное решение при $a_* = a_2$ имеет у края трещины большую погрешность, чем решение с параметром, равным a_1 . Следует, однако, учесть, что при $l' \rightarrow 1/c$ коэффициент интенсивности стремится к нулю, поэтому отличия здесь не столь существенны, как при малых l' .

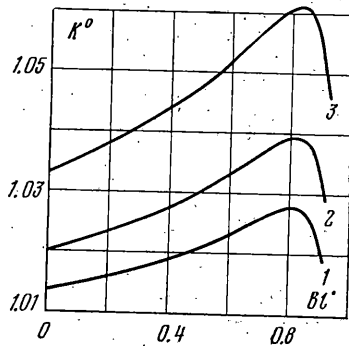
Имеет смысл сравнить аппроксимацию точного решения и при отрицательных значениях коэффициента интенсивности. Для более сложных нагрузок решение задачи определяется сверткой (3.10) и, естественно, вклад отрицательной составляющей в коэффициент интенсивности при интегрировании важен. Формулы (5.10) в точном решении определяют сжатие за фронтом волны расширения, а в приближенном — сжатие возникает несколько позже; там максимальная скорость $1/a_*$ меньше скоро-

сти волны расширения $1/a$. В момент прихода в вершину трещины волны Релея сжимающие напряжения в точном и приближенном решении одновременно обращаются в бесконечность.

Ввиду того, что коэффициенты интенсивности (5.10) в этом промежутке имеют довольно сложный вид, точно оценить, насколько существенна погрешность в приближенном решении, затруднительно. Некоторые косвенные выводы о вкладе сжимающих напряжений в решение можно сделать, рассмотрев решение для равномерно распределенной нагрузки $\sigma_-(t, x) = -H[l(t) - x]H(t)$.



Фиг. 6



Фиг. 7

При постоянном давлении на берегах трещины коэффициенты интенсивности точного и приближенного решений представляются зависимостями

$$K_I = 2 \sqrt{\frac{2at}{\pi c^2}} D k(l') \frac{1-cl'}{\sqrt{1-al'}} \quad (5.12)$$

$$K_I^* = 2 \sqrt{\frac{2a_*t}{\pi c^2}} \frac{1-cl'}{\sqrt{1-al'}}, \quad D = 1 + \int_a^b F_1(u) \frac{du}{u}$$

Отсюда видно, что отношение K_I^*/K_I отличается от аналогичного выражения (5.11) лишь постоянным множителем

$$K^0 = \frac{K_I^*}{K_I} = \sqrt{\frac{a_*}{a}} D^{-1} k^{-1}(l') \sqrt{\frac{1-al'}{1-a_*l'}} \quad (5.13)$$

На фиг. 7 показано изменение величины (5.13) как функции l' ($0 \leq l' \leq 1/c$) для $\nu=0.2, 0.25, 0.3$ (кривые 1-3), $a_* = a_1$. Для значений $a_* = a_2$ относительная погрешность коэффициента интенсивности та же, что при постоянной сосредоточенной силе (фиг. 6). Расчеты в этом случае показали, что при таком выборе параметра множитель $(a_2/a)^{1/2} D^{-1} = 1.000$ для $\nu=0.2, 0.25, 0.3$. Отсюда можно сделать вывод, что условие (5.7) позволяет более точно, чем (5.5), аппроксимировать в среднем напряжение у края трещины в (5.10). Неверный учет сжатия при $a_* = a_1$ приводит при интегрировании к росту погрешности, наблюдаемому на фиг. 7.

6. Автомодельная задача. Автомодельные задачи о трещине, расширяющейся с постоянной скоростью, решаются на основе метода функционально-инвариантных решений (см. [10] и приведенную там литературу). При этом используются решения уравнений теории упругости, определен-

ные и вне плоскости трещины. Однако для приближенной модели, рассмотренной в п. 5, состояние вне указанной плоскости не определено, известна лишь связь (1.1) между напряжением и перемещением в плоскости трещины. В связи с этим воспользуемся другим методом решения задачи, основанным на связи (1.4).

Рассмотрим, как и выше, функции $\sigma(t, x)$, $w(t, x)$, связанные соотношением (1.1), где $S^{LF}(s, q)$ — некоторая функция, удовлетворяющая равенствам

$$S^{LF}(s, \alpha) = S^{LF}(1, \alpha)/s \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} (t/z)S^{LF}(1, -it/z) &= S_0(z/t) \rightarrow \text{const}/z & (|z| \rightarrow \infty, z = x + iy) \\ S_0((x+i0)/t) &= -S_0((x-i0)/t) & (-t/c < x < t/c) \end{aligned}$$

причем $S_0(z/t)$ ограничена и отлична от нуля в некоторой полосе, включающей отрезок вещественной оси $(-t/c + \varepsilon, t/c - \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$.

Пусть $\sigma(t, x)$ имеет вид

$$\sigma(t, x) = D_n(t) * Q(x/t) \quad (6.2)$$

Обобщенная функция $D_n(t)$ ($n=0, \pm 1, \dots$) определена так:

$$D_0(t) = \delta(t), \quad D_n(t) = 0 \quad (t < 0), \quad D_{n-m}(t) = d^m D_n(t) / dt^m$$

При этом свертка с $D_n(t)$ означает n -кратное дифференцирование по t ($n < 0$) или n -кратное интегрирование ($n \geq 0$) (при $n=0$ — тождественное преобразование). Заметим, что $D_n(t) * D_m(t) = D_{n+m}(t)$.

Из (6.2) следует, что LF -изображение функции $\sigma(t, x)$ имеет вид

$$\sigma^{LF}(s, q) = s^{-n-2} Q_0(s/q)$$

Отсюда и из (1.1), (6.1) получаем

$$w^{LF}(s, q) = s^{-n-3} S^{LF}(1, q/s) Q_0(s/q) \quad (6.3)$$

и поэтому $w(t, x)$ имеет вид

$$w(t, x) = D_{n+1}(t) * P(x/t) \quad (6.4)$$

Используя формулу (3.4), находим связь между аналитическими представлениями для w и σ (обозначаем их теми же буквами, но вместо переменной x — для w и σ — пишем $z = x + iy$ — для их аналитических представлений):

$$\begin{aligned} w(t, z) &= -\frac{1}{2\pi iz} D_{n+2}(t) * \left[S^{LF}\left(1, -\frac{it}{z}\right) Q_0\left(\frac{iz}{t}\right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2\pi iz} Q_0\left(\frac{iz}{t}\right) = D_{-n-1}(t) * \sigma(t, z) \end{aligned}$$

и, следовательно

$$w(t, z) = D_{n+2}(t) * \left\{ \frac{z}{t} S_0\left(\frac{z}{t}\right) [D_{-n-1}(t) * \sigma(t, z)] \right\} \quad (6.5)$$

$$\sigma(t, z) = D_{n+1}(t) * \frac{t D_{-n-2}(t) * w(t, z)}{z S_0(z/t)}$$

Полагаем, что функции $\sigma(t, x)$, $w(t, x)$ таковы, что для них существуют представления Коши [8], которые и даются формулой (3.4), так что рассматриваемые аналитические представления — представления Коши. В связи с этим

$$\sigma(t, z) = O(1/z), \quad w(t, z) = O(1/z) \quad (|z| \rightarrow \infty) \quad (6.6)$$

Пусть заданы функции

$$\begin{aligned} \sigma(t, x) &= \sigma_-(t, x) \quad (-v_1 t < x < v_2 t), \quad 0 < v_{1,2} < 1/e \\ w(t, x) &= w_+(t, x) \quad (x < -v_1 t, v_2 t < x) \end{aligned} \quad (6.7)$$

и требуется найти σ , w на всей оси. Заметим, что при сформулированных условиях (6.5) — (6.7) решение задачи не единственно, так как существуют нетривиальные решения однородной задачи (при $\sigma_- = w_+ = 0$). Например, для $n = -1$

$$\begin{aligned} w(t, z) &= w_0(z/t) = i [(z/t + v_1)(z/t - v_2)]^{-1/2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} \\ &\begin{cases} i [(x/t + v_1)(x/t - v_2)]^{-1/2} \operatorname{sign}(x) & (x < -v_1 t, v_2 t < x) \\ \pm [(x/t + v_1)(v_2 - x/t)]^{-1/2} & (-v_1 t < x < v_2 t, y = \pm 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Действительно при этом

$$w_0(z/t) = \lim_{y \rightarrow 0} \{w_0[(x+iy)/t] - w_0[(x-iy)/t]\} = 0 \quad (x < -v_1 t, v_2 t < x)$$

и так как при $-v_1 t < x < v_2 t$:

$$w_0((x+i0)/t) = -w_0((x-i0)/t)$$

то в соответствии с (6.1), (6.5), (6.7) имеем $\sigma(t, x+i0) = \sigma(t, x-i0)$ ($-v_1 t < x < v_2 t$) и, следовательно, $\sigma_-(t, x) = 0$.

В связи с этим введем дополнительное условие

$$w = w_- = 0 \{[(x/t + v_1)(x/t - v_2)]^{1/2}\} \quad (x \rightarrow -v_1 t + 0, x \rightarrow v_2 t - 0) \quad (6.8)$$

которое для случая задачи о трещине означает ограниченность потока энергии, стекающей в края трещины при ее движении.

В соотношении (6.5) введем функцию Ω [14], гл. VI):

$$\begin{aligned} \Omega(t, z) &= \frac{D_{-n-2}(t) * w(t, z)}{z w_0(z/t)} = \frac{S_0(z/t)}{t w_0(z/t)} [D_{-n-1}(t) * \sigma(t, z)] \\ \Omega(t, z) &= D_{-2}(t) * M(z/t) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Скачок Ω на действительной оси ($\Omega(t, x+i0) - \Omega(t, x-i0)$) при $x < -v_1 t$ и при $x > v_2 t$ известен; так как функция $[z w_0(z/t)]^{-1}$ в указанных областях непрерывна, он равен

$$[D_{-n-2}(t) * w(t, x)] / [x w_0(x/t)] = [D_{-n-2}(t) * w_+(t, x)] / [x w_0(x/t)]$$

Скачок Ω на интервале $-v_1 t < x < v_2 t$ равен

$$\frac{S_0((x+i0)/t)}{t w_0((x+i0)/t)} [D_{-n-1}(t) * \sigma(t, x)]$$

так как на этом интервале непрерывно отношение $S_0(z/t)/w_0(z/t)$. Свертка $D_{-n-1}(t) * \sigma(t, x)$ известна для $n \geq -1$ (при этом свертка означает дифференцирование, не меняющее носителя функции):

$$D_{-n-1}(t) * \sigma(t, x) = D_{-n-1}(t) * \sigma_-(t, x) \quad (-v_1 t \leq x < v_2 t, n \geq -1) \quad (6.10)$$

Именно этими значениями $n \geq -1$ и ограничимся. Остается учесть скачки Ω в точках $x = -v_1 t$, $x = v_2 t$, существенные для дальнейшего лишь как сингулярные обобщенные функции. Так как носители их сосредоточены

в точках, они представляются линейной формой из производных δ -функции

$$\sum_{m=0}^k A_m t^{m-1} \delta^{(m)}(x+v_1 t) + B_m t^{m-1} \delta^{(m)}(x-v_2 t)$$

Из выражений для S_0 и w_0 видно, что $\Omega(t, z) = O(1/z)$ ($|z| \rightarrow \infty$), и, следовательно, $\Omega(t, z)$ — представление Коши для функции скачка $\Omega(t, x)$. Таким образом, $\Omega(t, z)$ определяется интегралом типа Коши, и искомое решение выражается формулами

$$w(t, x) = \lim_{y \rightarrow 0} [w(t, x+iy) - w(t, x-iy)]$$

$$\sigma(t, x) = \lim_{y \rightarrow 0} [\sigma(t, x+iy) - \sigma(t, x-iy)]$$

$$w(t, z) = D_{n+2}(t) * [t^{-1} W(z/t)]$$

$$W\left(\frac{z}{t}\right) = \frac{z w_0(z/t)}{2\pi i} \left[\int_{-\alpha_1 t}^{\alpha_2 t} \frac{S_0((\xi+i0)/t) [D_{-n-1}(t) * \sigma_-(t, \xi)]}{w_0((\xi+i0)/t) (\xi-z)} d\xi + \right. \\ \left. + t \int_{\gamma} \frac{D_{-n-2}(t) * w_+(t, \xi)}{\xi w_0(\xi/t) (\xi-z)} d\xi + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^k m! t^m \left(\frac{A_m}{(z+v_1 t)^{m+1}} + \frac{B_m}{(z-v_2 t)^{m+1}} \right) \right] \quad (6.11)$$

$$\sigma(t, z) = D_{n+1}(t) * \frac{t D_{-n-1}(t) * w(t, z)}{z S_0(z/t)} = D_{n+1}(t) * \frac{W(z/t)}{z S_0(z/t)}$$

Здесь γ — промежуток интегрирования ($\xi < -v_1 t$, $\xi > v_2 t$); сумма по m — аналитическое представление указанной выше линейной формы из производных δ -функции. Из условия (6.8) следует $k=n$.

Видно, что при $n > -1$ функции w , σ определены формулами (6.11) с точностью до слагаемых с $2(n+1)$ произвольными постоянными. Последние определяются условием (6.7) относительно $\sigma(t, x)$ ($-v_1 t < x < v_2 t$). Из (6.11) следует, что в указанном интервале при $x > 0$:

$$\sigma(t, x) = \sigma_-(t, x) = \sigma_-(t, x) + \frac{1}{n!} \int_0^{x/v_2+0} (t-\tau)^n \Phi_1\left(\frac{x}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau} = \quad (6.12)$$

$$= \sigma_-(t, x) + \frac{x^n}{n!} \int_0^{1/v_2+0} \left(\frac{t}{x} - \tau\right)^n \Phi_1\left(\frac{1}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau}$$

где $\Phi_1(x/t)$ — скачок функции $W\left(\frac{z}{t}\right) / \left[\frac{z}{t} S_0\left(\frac{z}{t}\right)\right]$ при $x \geq v_2 t$. Второе слагаемое в (6.12) должно быть равно нулю и, следовательно

$$\int_0^{1/v_2+0} \tau^{m-1} \Phi_1\left(\frac{1}{\tau}\right) d\tau = 0 \quad (m=0, 1, \dots, n) \quad (6.13)$$

Система линейных уравнений (6.13) определяет постоянные A_m . Точно так же получается система уравнений относительно B_m :

$$\int_0^{1/v_1+0} \tau^{m-1} \Phi_2 \left(\frac{1}{\tau} \right) d\tau = 0 \quad (m=0,1,\dots,n) \quad (6.14)$$

где $\Phi_2(-x/t)$ — скачок функции $W \left(\frac{z}{t} \right) / \left[\frac{z}{t} S_0 \left(\frac{z}{t} \right) \right]$ при $x \leq -v_1 t$.

В рассматриваемой задаче о трещине $w_+ = 0$ функция $S^{LF}(s, q)$ определяется равенствами (3.1). Ограничимся для краткости симметричным случаем: $v_1 = v_2 = v$, $\sigma_-(t, -x) = \sigma_-(t, x)$, $A_m = B_m$. При этом, как следует из (6.11) при $x \rightarrow vt + C$, коэффициент интенсивности напряжений выражается следующим образом ($n = -1, 0, \dots$):

$$K_I = \frac{2d}{\sqrt{\pi v t} X(v)} \left(-\frac{t}{v} \right)^{n+1} \quad (6.15)$$

$$d = -v \int_0^v \frac{X(u) Q(u) du}{\sqrt{v^2 - u^2}} \quad (n=-1), \quad d = i A_n \quad (n=0,1,\dots)$$

$$X(u) = -i S_0^*(u+i0) = b^2 u^2 \sqrt{1 - a^2 u^2} / [\mu R(iu, 1)]$$

$$Q(x/t) = t \sigma_-(t, x) \quad (n=-1)$$

Решение по приближенной модели (5.4) получается заменой $S_0(z/t)$ в (6.11) на функцию $S_0^*(z/t)$ и соответственно $X(u)$ в (6.15) на $X^*(u)$:

$$S_0^* \left(\frac{z}{t} \right) = \frac{t}{z} S^* \left(1, -\frac{it}{z} \right), \quad X^*(u) = \eta \frac{\sqrt{1 - a_*^2 u^2}}{1 - c^2 u^2}$$

Сравним коэффициенты интенсивности точного и приближенного решений в некоторых частных случаях.

Пусть к берегам трещины приложена постоянная сосредоточенная сила [12]: $\sigma_-(t, x) = -\delta(x) H(t)$ ($n = -1$). Тогда, как следует из (6.15), коэффициенты интенсивности представляются зависимостями

$$K_I = \frac{X(0)}{X(v)} (\pi v t)^{-1/2}, \quad K_I^* = \frac{\eta}{X^*(v)} (\pi v t)^{-1/2}$$

На фиг. 8, 9 показано изменение относительной погрешности $K^* = K_I^*/K_I$ при увеличении скорости трещины v от нуля до скорости волн Релея. Кривые 1—3 на графиках получены для значений коэффициента Пуассона 0.2, 0.25, 0.3. Параметр a_* в приближенной модели полагался равным a_1 при расчете кривых фиг. 8 и $a_* = a_2$ для кривых на фиг. 9. Все скорости отнесены при расчетах к скорости волны сдвига.

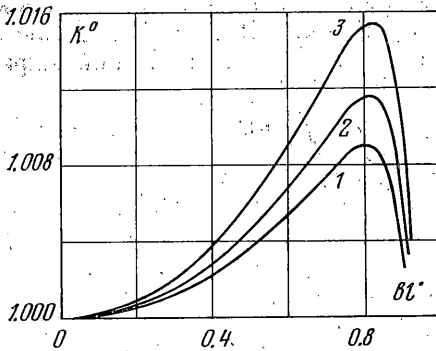
Если на берега трещины действует постоянная равномерно распределенная на некотором участке нагрузка $\sigma_-(t, x) = -H(v_0 t - |x|)$, $v_0 \leq v$ ($n = 0$), то аналитические представления напряжений в точном и приближенном решениях определяются интегралами

$$\sigma(t, z) = \frac{z}{\pi i} \int_0^t \frac{w_0(z/\tau)}{\tau S_0(z/\tau)} \left[\frac{A_0}{z^2/\tau^2 - v^2} + \frac{C}{z^2/\tau^2 - v_0^2} \right] d\tau$$

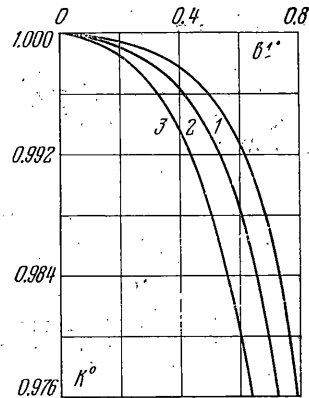
$$\sigma^*(t, z) = \frac{z}{\pi i} \int_0^t \frac{w_0(z/\tau)}{\tau S_0^*(z/\tau)} \left[\frac{A_0^*}{z^2/\tau^2 - v^2} + \frac{C^*}{z^2/\tau^2 - v_0^2} \right] d\tau$$

$$C = v_0 \sqrt{v^2 - v_0^2} S_0(v_0 + i0); \quad C^* = v_0 \sqrt{v^2 - v_0^2} S_0^*(v_0 + i0)$$

Для нагрузки, равномерно распределенной на берегах трещины ($v_0 = v$), постоянные A_0 и A_0^* находятся из условия (6.13) через полные



Фиг. 8



Фиг. 9

эллиптические интегралы первого и второго рода

$$A_0 = \pi i \frac{b^2 v^4 q_1^2}{2\mu D(v)}, \quad A_0^* = \pi i \frac{\eta v^2 q_*^2}{2D^*(v)}$$

$$D(v) = (4a^2 v^3 q_2^2 + b^4 v^4) \mathbf{K}(q_1) - 4b^2 v^2 q_1^2 \mathbf{K}(q_2) -$$

$$- (4q_1^2 + 4q_2^2 + b^4 v^4) \mathbf{E}(q_1) + 8q_1^2 \mathbf{E}(q_2)$$

$$D^*(v) = q_3^2 \mathbf{E}(q_*) + v^2 (c^2 - a_*^2) \mathbf{K}(q_*)$$

$$q_1^2 = 1 - a^2 v^2, \quad q_2^2 = 1 - b^2 v^2$$

$$q_3^2 = 1 - c^2 v^2, \quad q_*^2 = 1 - a_*^2 v^2$$

Отсюда и из (6.15) получаем, что при равномерном нагружении берегов трещины интенсивность напряжения у края трещины описывается выражениями [13]:

$$K_I = \frac{b^2 v^2 q_1^2}{\mu X(v) D(v)} (\pi v t)^{1/2}, \quad K_I^* = \frac{\eta q_*^2}{X^*(v) D^*(v)} (\pi v t)^{1/2}$$

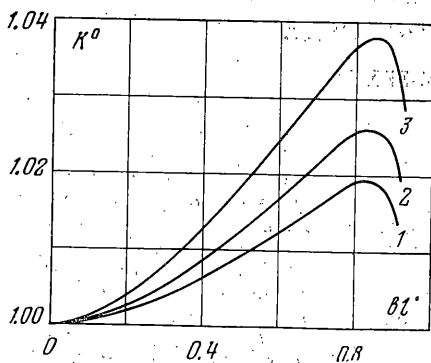
$$D(v) \sim 2(b^2 - a^2)v^2 + o(v^2) \quad (v \rightarrow 0)$$

Отношение коэффициента интенсивности приближенного решения к точному значению

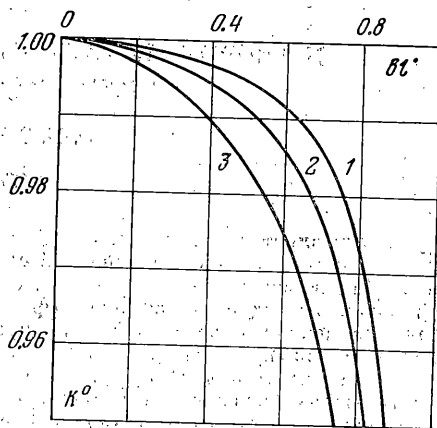
$$K^0 = \frac{K_I^*}{K_I} = \frac{q_*^2 X(v) D(v)}{2v^2 (b^2 - a^2) q_1^2 X^*(v) D^*(v)}$$

показано на фиг. 10 ($a_* = a_1$) и фиг. 11 ($a_* = a_2$). На оси абсцисс отложена скорость движения трещины, отнесенная к скорости волны сдвига. Кривые 1-3 на графиках соответствуют значениям коэффициента Пуассона 0.2, 0.25, 0.3.

Из сравнений, выполненных в работе, следует, что приближенная модель динамики трещины приемлема для описания напряженного состояния у края трещины. В широком диапазоне изменения скорости движения трещины ($V < 0.8/c$) относительная погрешность аппроксимации точного решения невелика, меньше 7%. Лишь при развитии трещины со скоростью, приближающейся к скорости волны Релея, погрешность во втором варианте приближенного решения ($a_1 = a_2$) быстро возрастает, достигая при $V = 1/c$ в самом неблагоприятном случае 16%. Расчеты также показали, что погрешность зависит от упругих характеристик среды, а именно, она растет с



Фиг. 10



Фиг. 11

увеличением коэффициента Пуассона. Примеры вычислений интенсивности напряжений в автомодельных задачах указывают на возможность применения приближенной модели и в задачах для трещины ограниченной длины.

Поступила 22 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Костров Б. В. Распространение трещин с переменной скоростью. ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
2. Костров Б. В. Динамическое распространение трещин с переменной скоростью. *Mechanica zniszczenia. Teoria i zastosowania*. Warszawa, Wydawn. Polskiej Acad. Nauk., 1976.
3. Костров Б. В. Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
4. Слепян Л. И. Приближенная модель динамики трещины. В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 19–20. Новосибирск, 1974.
5. Слепян Л. И., Троянкина Л. В. Теория трещин. Основные представления и результаты. Л., «Судостроение», 1976.
6. Rose L. R. F. An approximate (Winer – Hopf) kernel for dynamic crack problems in linear elasticity and viscoelasticity. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, 1976, vol. 349, No. 1659.
7. Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
8. Бреммерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М., «Мир», 1968.
9. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. Л., «Судостроение», 1972.
10. Шер Е. Н. Динамика растущего с постоянной скоростью прямолинейного изолированного разреза в условиях антиплоской деформации. ПМТФ, 1977, № 4.
11. Мухомелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
12. Афанасьев Е. Ф., Черепанов Г. П. Автомодельная задача динамической теории упругости для щели с точечным источником. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 6.
13. Bröberg K. V. The propagation of a brittle crack. *Arkiv Fys.*, 1960, vol. 18, No. 2.