

О РАЗДЕЛЕНИИ ДВИЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВУНОГОЙ ХОДЬБЫ

Ю. В. БОЛОТИН

(Москва)

Задача управления двуногим шагающим аппаратом (ДША) ставится следующим образом: сформировать управляющие моменты двигателей как функции измерений так, чтобы обеспечить устойчивое движение по произвольной траектории из заданного семейства (например, обеспечить периодическую ходьбу со скоростью v и длиной шага l по поверхности уклона α для любых v , l и α). Сложность динамики аппарата [1] обуславливает необходимость применения приближенных методов. В [2] предложен эффективный полуобратный метод, основанный на введении априорных условий на движение системы и позволяющий сузить класс возможных движений и сильно упростить задачу. В данной работе предлагается прямой приближенный алгоритм управления двуногой ходьбой. Его асимптотическим приближением служит решение, полученное полуобратным методом.

Построен алгоритм стабилизации плоской двуногой ходьбы и бега при движении по наклонной поверхности.

1. Разделение движений. Пусть движение аппарата в рассматриваемой опорной фазе описывается уравнениями

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = a(x, v) + B(x)Q \quad (1.1)$$

Здесь $x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n$ — фазовые координаты аппарата, Q_1, \dots, Q_k — управляющие моменты двигателей. Кинематические ограничения на такие параметры движения, как длина шага, высота подъема переносимой ноги и т. п., можно обеспечить, потребовав, чтобы траектория удовлетворяла векторному соотношению [1]:

$$F(x, u, v) = 0 \quad (1.2)$$

где $u = (u_1, \dots, u_m)$ — управляющий параметр. Тогда на рассматриваемой опорной фазе исходная задача управления переходит в задачу управления вырожденной системой

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = a(x, v) + B(x)Q, \quad F(x, u, v) = 0 \quad (1.3)$$

в фазовом пространстве размерности $2n - k$. Чтобы это определение было корректным, предположим, что выполнено следующее условие регулярности сервосвязи (1.2): для любых x, u, v определитель матрицы $\partial[F(x, u, v)B(x)]/\partial v$ отличен от нуля.

Полуобратному методу [1] отвечает задание неявно определенных уравнениями (1.3) управляющих моментов $Q(t)$ явными функциями времени. Применение полуобратного метода в задаче двуногой ходьбы осложнено наличием скачков скоростей при ударе переносимой ноги о поверхность, приводящих к нарушению сервосвязи (1.2). При построении программного движения можно ограничиться случаем безударной постановки ноги [2], но в процессе стабилизации удары неизбежны. Более того, демпфирующее влияние удара ноги о поверхность может быть использовано при обеспечении устойчивости движения. Возникает задача построения

алгоритма управления системой (1.1), реализующего сервосвязь при наличии ударных возмущений.

Введем жесткое по отклонениям $y = F(x, u, v)$ от сервосвязи управление

$$Q = -\mu^{-1}L(x, u)y \quad (1.4)$$

где $\mu^{-1} \gg 1$ — коэффициент жесткости, $L(x, u)$ — матрица. Пусть выбор матрицы $L(x, u)$ обеспечивает равномерную асимптотическую устойчивость по y быстрых движений [3]:

$$x = \text{const}, \quad u = \text{const}, \quad v' = -\mu^{-1}B(x)L(x, u)y \quad (1.5)$$

Тогда при достаточно малых μ возможно следующее приближенное¹ описание движения аппарата с сингулярно-возмущающим управлением (1.4): на каждой фиксированной опорной фазе траектория аппарата совпадает с решением соответствующей вырожденной системы; при движении в окрестности момента $t = t_0$ удара переносимой ноги о поверхность происходит последовательное перераспределение скоростей при ударе: $v(t_0 - 0) \rightarrow v(t_0)$ и под действием импульсного управления: $v(t_0) \Rightarrow v(t_0 + 0)$. Начальным значением скорости для вырожденной задачи на новой опорной фазе служит предельное значение $v(t_0 + 0)$. Здесь возможны два существенно различных случая. Если в период действия импульсного управления опорная фаза меняется (например от двуопорной к одноопорной), то $v(t_0 + 0)$ зависит от выбора матрицы $L(x, u)$. Если импульсное управление действует в фиксированной опорной фазе (1.1), то $v(t_0 + 0)$ и интенсивность управления Q^0 однозначно определены соотношениями

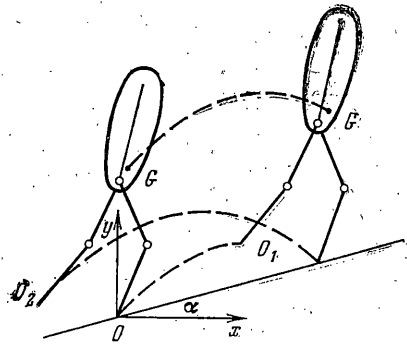
$$\begin{aligned} F(x(t_0), u(t_0), v(t_0 + 0)) &= 0 \\ v(t_0 + 0) &= v(t_0) + B(x(t_0))Q^0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ниже предполагается выполненным случай (1.6).

Таким образом, при достаточно малых μ и при подходящем выборе $L(x, u)$ движение аппарата при жестком управлении (1.4) с точностью $O(\mu^\nu)$ описывается дифференциально-разностными уравнениями (1.3), (1.6) размерности $2n - k$ с управляющим параметром $u(t)$. Поскольку условия стабилизации быстрых движений не зависят от конкретной реализации $u(t)$, задачи (1.3), (1.5) и (1.6) можно решать независимо.

2. Алгоритм стабилизации двуногой ходьбы и бега. Пусть плоский аппарат [1] движется по поверхности уклона α ; удар о поверхность идеально неупругий, условие непроскальзывания описывается законом Кулона с коэффициентом трения θ . Для простоты предположим, что все переменные движения доступны измерению. Пусть G — центр масс системы, O — текущая точка опоры, O_1, O_2 — соответственно конец опорной и переносимой ноги (нога считается опорной с момента ее постановки в точке O до момента постановки другой ноги).

Пусть ось Ox направлена по горизонтали в направлении движения, ось Oy вертикальна (фиг. 1), $r = OG = (x, y)$, $r_i = O_iG = (x_i, y_i)$, $x' = v$, $y' = w$.



Фиг. 1

¹ Можно показать, что точность приближения оценивается величиной $O(\mu^\nu)$, где $0 < \nu < 1/2$ — постоянный параметр.

$x_j = v_j$, $y_j = w_j$ ($j=1, 2$), φ — угол наклона корпуса, m — масса аппарата, K и K_G — моменты количества движения относительно точек O и G соответственно. На каждой опорной фазе введем сервосвязь

$$\begin{aligned} w_1 &= \kappa_1 v_1, & w_2 &= \kappa_2 v_2, & v_2 &= u_3 v_1 \\ [K_G + m u_4 \Phi(v)](1 - \chi) + [v_1 - \Phi(v)]\chi &= 0 \\ \kappa_j &= u_j + \sigma_j x_j \quad (j=1, 2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\Phi(v) = v \text{ при } v < v_* = \sqrt{-g/\sigma_1}, \quad \Phi(v) = v_*^2/v \text{ при } v \geq v_*$$

Здесь $\chi=0$, если опорная нога касается поверхности, и $\chi=1$ в противном случае; g — ускорение силы тяжести; $\sigma_1, \sigma_2, u_1, u_2, u_3, u_4$ — параметры.

Первые три соотношения (2.1) обеспечивают перемещение центра масс аппарата и конца его переносимой ноги по выпуклым вверх траекториям. Последнее соотношение обеспечивает ограниченность колебаний корпуса.

Разобьем параметры системы управления на два класса. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \lambda, l_*, x_*, y_*, h_*$ — постоянные, определяющие структуру походки (их роль определена ниже), u_1, u_2, u_3, u_4 — управляющие параметры, меняемые дискретно в начале каждого шага. Пусть $x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0, \varphi^0$ — значения координат $x_1, y_1, x_2, y_2, \varphi$ в начале шага. Определим значения управляющих параметров формулами

$$\begin{aligned} l &= l_* + x_* - x_1^0, & u_1 &= (x_* - x_2^0)/l, & u_4 &= \lambda \varphi^0 \\ u_2 &= (y_* + l_* \operatorname{tg} \alpha - y_1^0)/l - \sigma_1 (x_1^0 + \frac{1}{2}l) - \chi h_* / l \\ u_3 &= (y_* - y_2^0)/(u_1 l) - \sigma_2 (x_2^0 + \frac{1}{2}u_1 l) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Закон управления (2.2) получен из решения следующей краевой задачи для вырожденной системы: обеспечить в конце шага значения $x_1 = x_* + l_*$, $y_1 = y_* + l_* \operatorname{tg} \alpha$, $x_2 = x_*$, $y_2 = y_*$. Специальный выбор соотношений (2.1), (2.2) дает относительно простую структуру вырожденной системы, что позволяет провести ее полное аналитическое исследование. Ниже показано, что в достаточно широкой области изменения параметров алгоритм обеспечивает устойчивые походки.

Управляющий алгоритм (2.1), (2.2) следует дополнить выбором матрицы L и параметра μ для стабилизации быстрых движений. Эта задача здесь не рассматривается (сходная процедура проделана в [4]): отметим лишь следующие необходимые для ее разрешимости ограничения на параметры вырожденной системы.

1. В точках нарушения условия регулярности сервосвязи уравнения быстрых движений имеют нулевой корень; их стабилизация невозможна. Это условие разбивает множество реализуемых конфигураций на непересекающиеся области. В частном случае малоинерционных ног сервосвязь вырождается тогда и только тогда, когда одна из ног выпрямлена. Поэтому возможны два типа симметричных походок — «коленками вперед» (человеческая) и «коленками назад» (птичья).

2. Скачок скоростей, реализуемый жестким управлением в момент t_0 смены опорной ноги не может быть произвольным: из условия непроскальзывания необходимо выполнение условия

$$\begin{aligned} \theta \{w(t_0+0) - w(t_0-0) - [v(t_0+0) - v(t_0-0)] \operatorname{tg} \alpha\} > \\ > |v(t_0+0) - v(t_0-0) + [w(t_0+0) - w(t_0-0)] \operatorname{tg} \alpha| \end{aligned}$$

Аналогично на участке одноопорного движения без проскальзывания

$$\theta(w^* + g - v^* \operatorname{tg} \alpha) > |v^* + (w^* + g) \operatorname{tg} \alpha|$$

Приняв, что на каждой опорной фазе сервосвязь (2.1), (2.2) выполнена, получим отсюда условия непроскальзывания для вырожденной си-

стемы

$$y_1 - \kappa_1 x_1 - |\lambda \varphi| > 0, \quad \sigma_1 < 0$$

$$\theta(y - x \operatorname{tg} \alpha - |\lambda \varphi|) > |x + y \operatorname{tg} \alpha| + |\lambda \varphi \operatorname{tg} \alpha| \quad (2.3)$$

3. Уравнения вырожденной системы. Предположим, что в процессе движения выполнены неравенства (2.3). Если L , μ выбраны правильно, в силу приближения (1.6) вслед за ударом ноги о поверхность возникает импульсное управление, реализующее сервосвязь (2.1). Пусть в некоторый момент времени t_0 опорная нога касается поверхности, переносимая нога находится над поверхностью и в окрестности момента t_0 выполнена сервосвязь (2.1). Следующие утверждения проверяются из (2.1)–(2.3) прямыми вычислениями: условие контакта опорной ноги без проскальзывания эквивалентно любому из условий $v(t_0) < v_*$, $\chi(t_0) = 0$; если $v(t_0) < v_*$, то при малых $t - t_0 \geq 0$ аппарат движется в одноопорной фазе; если $v(t_0) \geq v_*$, происходит отрыв опорной ноги без проскальзывания, и при малых $t - t_0 > 0$ аппарат движется в фазе полета. Считая x_1 независимой переменной, запишем уравнения вырожденной системы при $t \geq t_0$ в виде

$$x_1' = 1, \quad x_2' = u_3, \quad y_1' = \kappa_1, \quad y_2' = u_3 \kappa_2, \quad K_G = -\lambda m \varphi^0 v_1, \quad (3.1)$$

$$K' = -mgx_1/v_1, \quad v = v_1, \quad (v(t_0+0) < v_*)$$

$$v' = 0, \quad v_1' = 0, \quad w' = -g/v_1, \quad (v(t_0+0) \geq v_*) \quad (3.2)$$

Пусть $\sigma_2 > 0$, т. е. конец переносимой ноги движется по выпуклой вверх траектории. Тогда при начальных условиях, удовлетворяющих (2.3), опорная фаза кончается касанием переносимой ноги поверхности. На новой опорной фазе управление задается формулами (2.2) с новыми начальными условиями. Построив соответствующее (3.1), (3.2) точечное преобразование, нетрудно показать, что при достаточно большой начальной скорости v опорная фаза будет кончаться в момент $x_1 = x_* + l_*$; при этом $x_2 = x_*$, $y_2 = y_*$:

$$y_1 = \begin{cases} y_* + l_* \operatorname{tg} \alpha & (v(t_0+0) < v_*) \\ y_* + l_* \operatorname{tg} \alpha - h_* & (v(t_0+0) \geq v_*) \end{cases}$$

Эти значения устанавливаются на первом шаге в случае ходьбы и асимптотически, при стремлении числа шагов к бесконечности, в случае бега.

Выбор параметра $h_* > 0$ обеспечивает при беге удар о поверхность переносимой ногой; высота конца опорной ноги над поверхностью в этот момент равна h_* (фиг. 1). Ниже для простоты считаем $0 < h_* \ll y_*$, l_* . Тогда y_1 , x_2 , y_2 — периодические функции x_1 . Поскольку K_G — линейная функция x_1 , y_1 , x_2 , y_2 , φ , то уравнение $K_G = -\lambda m \varphi^0 v_1$ не зависит от скоростей и является уравнением первого порядка по φ , периодическим по независимой переменной x_1 . При каждом конкретном выборе инерционных и линейных параметров аппарата существует параметр λ , обеспечивающий существование и устойчивость его периодического решения. В частности, в случае безынерционных ног условие $0 < \lambda < 2I/ml_*$ гарантирует устойчивость решения $\varphi \equiv 0$; для антропоморфного аппарата можно взять, например, $\lambda = I/ml_*$. Здесь I — центральный момент инерции корпуса.

4. Возможные типы походок. Зафиксируем выбранный параметр λ ; тогда алгоритм (2.1), (2.2) реализует, независимо от текущего значения скорости, устойчивое периодическое изменение x_1 , y_1 , x_2 , y_2 , φ , причем в момент смены опорной ноги эти переменные имеют значения соответственно $x_* + l_*$, $y_* + l_* \operatorname{tg} \alpha$, x_* , y_* , φ_* . Для доказательства устойчивости движения аппарата остается проверить существование и устойчивость стацио-

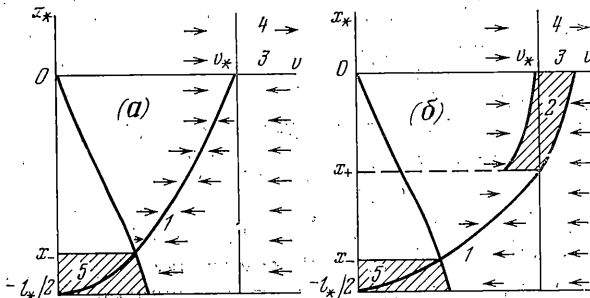
нарного значения продольной скорости. Пусть v_i — значение v в начале i -го шага. Связь v_{i+1} и v_i существенно зависит от того, ходьба или бег реализуется.

Если $v_i \geq v_*$, то v_{i+1} удовлетворяет уравнению

$$v_{i+1} [(\operatorname{tg} \alpha - \sigma_1 l_*/2) x_* - y_* - \lambda \Phi_* \Phi(v_{i+1})/v_{i+1}] = \\ = v_i [(\operatorname{tg} \alpha + \sigma_1 l_*/2) x_* - y_* - \lambda \Phi_* v_*^2/v_i^2]$$

Из (2.3) следует, что левая часть — монотонная функция v_{i+1} , поэтому v_{i+1} — однозначная функция v_i , $v_{i+1} > v_i$ при $\sigma_1 l_* x_* > 0$. Для реализуемости сервосвязи необходимо $\sigma_1 < 0$, поэтому v_i неограниченно возрастает с ростом i при $x_* > 0$, не меняется при $x_* = 0$ и убывает к нулю при $x_* < 0$.

При $v_i < v_*$ возможны два случая. Назовем ходьбу одноопорной, если при ударе переносимой ноги о поверхность происходит отрыв опорной ноги



Фиг. 2

с ненулевой скоростью. В противном случае ходьбу будем называть двухопорной. Условие одноопорности не зависит от скорости v_i . Если реализуется одноопорная ходьба, то из (3.2)

$$v_*^2 - v_{i+1}^2 = (v_*^2 - v_i^2) \frac{D^2}{(D + 1/2 \sigma_1 l_*^2)^2} + v_*^2 \left(1 - \frac{D^2}{C^2} \right) \quad (4.1)$$

$$C = (\operatorname{tg} \alpha - 1/2 \sigma_1 l_*) x_* - y_* - \lambda \Phi_*, \quad D = (\operatorname{tg} \alpha + 1/2 \sigma_1 l_*) x_* - y_* - \lambda \Phi_*$$

Преобразование (4.1) имеет устойчивую неподвижную точку v_∞ тогда и только тогда, когда $\sigma_1 < 0$. При этом

$$v_*^2 - v_\infty^2 = v_*^2 \left(1 - \frac{D^2}{C^2} \right) \frac{(D + 1/2 \sigma_1 l_*^2)^2}{(2D + 1/2 \sigma_1 l_*^2) \sigma_1 l_*^2}$$

Отсюда $v_\infty = 0$ при $x_* = -l_*/2$ и $v_\infty = v_*$ при $x_* = 0$. При $-l_*/2 < x_* < 0$ имеем $0 < v_\infty < v_*$.

Если реализуется двухопорная ходьба, то

$$v_*^2 - v_{i+1}^2 = (v_*^2 - v_i^2) \frac{(D - \beta)^2}{(D + 1/2 \sigma_1 l_*^2)^2} + v_*^2 \left[1 - \frac{(D - \beta)^2}{C^2} \right]$$

где β — положительная функция фазовых координат, а также, возможно, упругих характеристик опорной поверхности и звеньев аппарата. Если $\beta < -\sigma_1 l_*/2$, то определено предельное значение скорости v_∞ , большее чем соответствующее значение в случае одноопорной походки; при $\beta > -\sigma_1 l_*/2$ скорость ходьбы неограниченно возрастает.

Отметим, что при ходьбе шаг вперед (длиной l_*) реализуется, когда начальная скорость удовлетворяет неравенству $C v_i^2 > -x_*^2 (1 + \sigma_1 x_*^2 / 4C)$.

В противном случае энергии аппарата недостаточно, чтобы преодолеть потенциальный барьер в точке $x_1=0$; аппарат возвращается в исходное положение, сделав шаг нулевой длины.

Объединяя оба случая, получим следующее утверждение (фиг. 2). При фиксированных α , l_* , y_* , λ , σ_1 , σ_2 существуют $-l_*/2 < x_- \leq x_+ \leq 0$, $v_0 \geq v_*$, такие, что в зависимости от значения x_* алгоритм (2.1), (2.2) реализует один из следующих режимов: 1) устойчивая ходьба с диапазоном скоростей $0 < v_\infty < v_*$ при $x_- < x_* < x_+$; 2) «ходьба вприпрыжку» (чередование шагов и прыжков) со средней скоростью $v_* \leq v_m \leq v_0$ при $x_+ < x_* < 0$ (при этом относительная длительность фазы полета монотонно возрастает с увеличением x_*); 3) стационарный бег с произвольной скоростью, большей чем v_* , при $x_*=0$; 4) ускоряющийся бег при $x_* > 0$; 5) «топтанье на месте» с нулевой средней скоростью при $x_* < x_-$.

Случаю одноопорной походки отвечает $x_+=0$ (фиг. 2, а), случаю двухопорной походки — $x_- < x_+ < 0$ (фиг. 2, б). Меняя x_* в окрестности нуля, можно получить бег с произвольной заданной скоростью.

Построенный алгоритм является алгоритмом свободной стабилизации в том смысле, что устойчивость ходьбы устанавливается независимо от предельного значения продольной скорости, которое может меняться при изменении характеристик опорной поверхности (вязкость, податливость и т. п.). В обеспечении устойчивости продольного движения решающее значение имеет демпфирующее влияние удара ноги о поверхность. Полученная структура походок имеет ряд антропоморфных черт: наличие для каждой конфигурации естественной скорости движения; наклон вперед и переход к ходьбе вприпрыжку и далее к бегу с увеличением скорости; импульсный характер управления в начале опорной фазы.

Поступила 13 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В., Чудинов П. С. Параметрическая оптимизация в задаче двуногой ходьбы. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4.
2. Белецкий В. В. Динамика двуногой ходьбы. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, 4.
3. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. М., «Наука», 1973.
4. Болотин Ю. В., Новожилков И. В. Управление походкой двуногого шагающего аппарата. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 3.