МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1979

УДК 534

ОБ АМОРТИЗАЦИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЧАСТЕЙ МЕХАНИЗМОВ

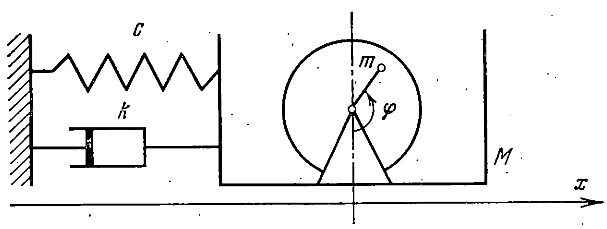
Л. Д. АКУЛЕНКО, Н. Н. БОЛОТНИК

(Москва)

Исследуется движение механической системы, состоящей из несбалансированного ротора, расположенного в корпусе, который связан с неподвижным основанием посредством линейного вязкоупругого амортизатора. Строится асимптотическое (квазистационарное) приближение к решению уравнения колебаний корпуса при малых угловых ускорениях вращения ротора. Исследуется влияние параметров амортизатора (коэффициентов демпфирования и жесткости) на характеристики движения корпуса.

Решается задача об оптимальном релейном управлении жесткостью амортизатора, обеспечивающем минимум максимума амплитуды колебаний корпуса во время раскрутки ротора. Вопросы динамики колебательных систем, содержащих неуравновешенный ротор, ранее изучались в [1–6] и др. Вопросы реализации скачкообразного управляемого изменения параметров колебательной системы при помощи электромеханических устройств рассматривались в [7].

1. Рассматривается механическая система, состоящая из несбалансированного ротора, вращающегося вокруг оси, жестко связанной с корпусом. Механическими моделями ротора и корпуса являются абсолютно твердые



Фиг. 1

тела. Корпус посредством вязкоупругого амортизатора с линейной характеристикой связан с неподвижным основанием (фиг. 1). Обозначим через M массу корпуса; m — массу ротора; l — расстояние от оси вращения до центра инерции ротора; $k>0$, $c>0$ — коэффициенты демпфирования и жесткости амортизатора соответственно; x — отклонение корпуса от положения равновесия; φ — угол поворота ротора вокруг оси вращения.

Изменение координаты x рассматриваемой системы описывается дифференциальным уравнением

$$(m+M)\ddot{x}+k\dot{x}+cx=ml(\dot{\varphi}^2\sin\varphi-\ddot{\varphi}\cos\varphi) \qquad (1.1)$$

Точка в позиции штриха обозначает производную по времени t.

Описанная система моделирует подвижные узлы многих машин и механизмов, широко распространенных в быту и промышленности (например центрифуг, холодильников, станков и др.).

Ниже приводится исследование движения системы (1.1) и рассматривается способ релейного управления жесткостью амортизатора, позволяющий уменьшить максимальное значение амплитуды колебаний корпуса во время раскрутки ротора.

Перейдем в уравнении (1.1) к безразмерным переменным

$$t'=\omega_0 t, \quad x'=\frac{m+M}{ml}x, \quad k'=\frac{k}{(m+M)\omega_0}, \quad c'=\frac{c}{(m+M)\omega_0^2}$$

Здесь ω_0 — некоторая характерная величина размерности частоты, например угловая скорость установившегося вращения ротора. В новых переменных уравнение (1.1) переписывается в виде (штрихи для удобства записи опущены)

$$x^{\cdot\cdot}+kx^{\cdot}+cx=\varphi^{\cdot 2}\sin\varphi-\varphi^{\cdot\cdot}\cos\varphi \tag{1.2}$$

Предполагается, что изменение переменной φ во времени описывается дифференциальным уравнением с начальными условиями

$$\varphi^{\cdot\cdot}=\varepsilon f(t), \quad \varphi(t_0)=\varphi_0, \quad \varphi^{\cdot}(t_0)=\varphi_0^{\cdot} \tag{1.3}$$

Функция $f(t)$ задана и предполагается дифференцируемой и ограниченной вместе со своей производной на всем интервале $t\in[t_0, \infty)$. Через ε обозначен малый числовой параметр, показывающий, что время, за которое существенно изменяется угловая скорость вращения ротора, много больше некоторого характерного интервала времени, например периода установившихся вращений. Такая ситуация типична для машин, работающих в режиме с высокими угловыми скоростями, если ротор обладает большим моментом инерции.

2. Так как уравнение (1.3) интегрируется независимо, то общее решение уравнения (1.2) можно представить в виде

$$x(t)=C_1G(t-t_0)+C_2G^{\cdot}(t-t_0)+y(t) \tag{2.1}$$

Здесь $G(t)$ — решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.2), с начальными условиями $G(0)=0$, $G^{\cdot}(0)=1$ (функция Грина); C_1, C_2 — постоянные, значения которых определяются начальными условиями; $y(t)$ — частное решение уравнения (1.2).

Используя малость параметра ε в уравнении (1.3), будем строить приближенное решение уравнения (1.2) для всех $t\in[t_0, \infty)$. Частное решение в квазистационарном приближении имеет вид [6]:

$$y_0(t)=A(t)\sin\varphi(t)+B(t)\cos\varphi(t)$$

$$A(t)=\frac{\omega^2(c-\omega^2)}{(c-\omega^2)^2+k^2\omega^2}, \quad B(t)=-\frac{k\omega^3}{(c-\omega^2)^2+k^2\omega^2} \tag{2.2}$$

$$\omega(t)=\varphi_0^{\cdot}+\varepsilon\int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau, \quad \varphi(t)=\varphi_0+\varphi_0^{\cdot}(t-t_0)+\varepsilon\int_{t_0}^{t}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$$

Оценим погрешность построенного приближенного решения $y_0(t)$ (2.2). Для этого будем искать точное решение $y(t)$ неоднородного уравнения (1.2) в виде: $y(t)=y_0(t)+\eta(t)$, где неизвестная функция $\eta(t)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям ($\eta(t_0)=\eta^{\cdot}(t_0)=0$). Подставляя выражение для искомой функции y в (1.2), находим дифференциальное уравнение для переменной $\eta(t)$:

$$\eta^{\cdot\cdot}+k\eta^{\cdot}+c\eta=\varepsilon\psi(t)+\varepsilon^2\chi(t)$$

$$\psi(t)=-\left\{f(t)\left[1+A(t)+k\frac{\partial B}{\partial\omega}+2\omega(t)\frac{\partial A}{\partial\omega}\right]+f^{\cdot}(t)\frac{\partial B}{\partial\omega}\right\}\cos\varphi(t)+$$

$$+\left\{f(t)\left[B(t)-k\frac{\partial A}{\partial\omega}+2\omega(t)\frac{\partial B}{\partial\omega}\right]-f^{\cdot}(t)\frac{\partial A}{\partial\omega}\right\}\sin\varphi(t)$$

$$\chi(t)=-f^2(t)\left[\frac{\partial^2 A}{\partial\omega^2}\sin\varphi(t)+\frac{\partial^2 B}{\partial\omega^2}\cos\varphi(t)\right] \quad (2.3)$$

Нетрудно убедиться, исследовав выражения для коэффициентов $A(t)$ и $B(t)$, что при сделанных выше предположениях относительно функции $f(t)$ и ее производной $f^{\cdot}(t)$ функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ в (2.3) ограничены

$$\sup_t|\psi(t)|<\infty,\ \sup_t|\chi(t)|<\infty,\ t\in[t_0,\infty)$$

Решение уравнения (2.3) с нулевыми начальными условиями имеет вид

$$\eta(t)=\int_{t_0}^{t}G(t-\tau)[\varepsilon\psi(\tau)+\varepsilon^2\chi(\tau)]d\tau$$

Оценим величину этого выражения. Для определенности рассмотрим случай, когда $k^2-4c<0$ (при $k^2-4c\geqslant0$ оценки проводятся аналогично). В этом случае

$$G(t)=\frac{2}{\sqrt{4c-k^2}}e^{-\frac{1}{2}kt}\sin\sqrt{c-\frac{k^2}{4}}\,t$$

и справедлива следующая оценка для всех $t\geqslant t_0$:

$$|\eta(t)|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4c-k^2}}[\varepsilon\sup_t|\psi(t)|+\varepsilon^2\sup_t|\chi(t)|]\int_{t_0}^{t}\exp\left[-\frac{k}{2}(t-\tau)\right]d\tau=$$

$$=\frac{4}{k\sqrt{4c-k^2}}[\varepsilon\sup_t|\psi(t)|+\varepsilon^2\sup_t|\chi(t)|]\left\{1-\exp\left[-\frac{k}{2}(t-t_0)\right]\right\}$$

$$|\eta(t)|=O(\varepsilon),\quad|\eta^{\cdot}(t)|=O(\varepsilon),\quad t\in[t_0,\infty) \quad (2.4)$$

Таким образом, согласно (2.4), построенное приближенное решение $y_0(t)$ (2.2) отличается от точного частного решения $y(t)$ на величину порядка ε на всем интервале времени $[t_0,\infty)$.

Выражение для y_0 (2.2) удобнее записать в виде

$$y_0(t)=U(c,k,\omega^2(t))\sin[\varphi(t)+\alpha(t)]$$

$$U(c,k,z)=\sqrt{A^2+B^2}=\frac{z}{\sqrt{(c-z)^2+k^2z}},\quad \sin\alpha=\frac{B}{U},\quad \cos\alpha=\frac{A}{U} \quad (2.5)$$

Тогда величина U представляет собой амплитуду квазистационарных колебаний корпуса, вынуждаемых вращением ротора.

3. Пусть в начальный момент времени $t_0=0$ корпус механической системы, описанной в п. 1, находится в положении равновесия и покоится: $x(0)=x^{\cdot}(0)=0$. Предположим еще, что ротор в начальный момент времени также покоится ($\varphi^{\cdot}(0)=0$), а функция $f(t)$ является неотрицательной и такой, что

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon\int_0^t f(\tau)d\tau=\omega_0$$

Здесь ω_0 — заданное положительное число, характеризующее установившееся значение угловой скорости вращения ротора, которое без ограничения общности можно положить равным единице. Это означает, что угловая скорость вращения ротора монотонно возрастает и стремится к некоторому стационарному значению, которое и является номинальным режимом работы механизма. Из (2.2) и (2.4) следует, что при сделанных предположениях функция $y_0(t)$ (2.5) с точностью до величин порядка ε описывает движение корпуса (константы C_1, C_2 в (2.1) следует положить равными нулю).

Основная цель амортизации вращающихся узлов машин и механизмов состоит в уменьшении динамических нагрузок, действующих на основание при номинальном режиме работы. Кроме того, из-за ограниченности габаритов конструкции амплитуда колебаний корпуса как в процессе разгона ротора, так и в стационарном режиме должна быть не слишком велика. Таким образом, основными характеристиками амортизационного устройства являются амплитуда колебаний корпуса и амплитуда динамической нагрузки на основание системы.

Амплитуда колебаний корпуса как функция частоты вращения ротора ω и параметров c и k амортизатора определяется выражением U из (2.5)

$$U(c,\ k,\ z)=z/\sqrt{(c-z)^2+k^2z},\quad z=\omega^2,\quad z\geqslant 0 \tag{3.1}$$

Движение системы в квазистационарном приближении на этапе раскрутки ротора и в стационарном режиме описывается формулами (2.2). Используя их, найдем динамическую нагрузку, т. е. силу, действующую на основание

$$F=k\dot{x}+cx=-\ddot{x}+\dot{\varphi}^2\sin\varphi-\ddot{\varphi}\cos\varphi=(A+1)\omega^2\sin\varphi+\omega^2B\cos\varphi+O(\varepsilon)$$

Из полученного выражения для силы F следует, что амплитуда динамической нагрузки приближенно определяется соотношением, аналогичным (2.5), (3.1)

$$R(c,k,z)=z(c^2+k^2z)^{1/2}[(c-z)^2+k^2z]^{-1/2},\quad z\geqslant 0 \tag{3.2}$$

Исследуем свойства функций U и R (3.1), (3.2). Производная функции U (3.1) по z равна (параметры системы c и k считаем фиксированными)

$$\frac{dU}{dz}=\frac{2c^2+(k^2-2c)z}{2[(z-c)^2+k^2z]^{3/2}}\qquad (c,k>0)$$

Из полученного выражения следует, что если $k^2-2c\geqslant 0$, то $dU/dz>0$ при всех значениях $z\geqslant 0$, и амплитуда монотонно возрастает. Если $k^2-2c<0$, то $dU/dz>0$ при $z<z_*=2c^2/(2c-k^2)$; $dU/dz=0$ при $z=z_*$ и $dU/dz<0$ при $z>z_*$, т. е. в этом случае функция $U(c,k,z)$ имеет максимум в точке z_*, равный

$$U(c,k,z_*)=2ck^{-1}(4c-k^2)^{-1/2}$$

Из (3.1) непосредственно вытекает, что $\lim U(c,k,z)=1$ при $z\to\infty$. Далее, при фиксированных значениях k и z функция U (3.1) возрастает с ростом c на интервале $0<c<z$, имеет максимум при $c=z$ и монотонно убывает до нуля при $c\to\infty$, $c>z$.

Очевидно, что при жестком креплении корпуса к основанию, т. е. при $c\to\infty$ или $k\to\infty$, величина $R(c,k,z)\to z$. Следовательно, применение амортизатора для заданной частоты вращения ротора ω эффективно, если $R(c,k,z)<z$. Простой анализ показывает, что последнее неравенство выполняется при условии $c<{}^1/_2z$. Исследуем зависимость амплитуды динамической нагрузки R (3.2) от величины жесткости амортизатора c. Частная производная функции $R(c, k, z)$ по c равна

$$\frac{\partial R(c,k,z)}{\partial c}=\frac{z^2[(c+k^2)z-c^2]}{[(c-z)^2+k^2z]^{3/2}(c^2+k^2z)^{1/2}}$$

Знак производной, очевидно, определяется знаком выражения в квадратных скобках числителя. Разрешая соответствующее квадратное уравнение относительно параметра c, находим

$$\partial R/\partial c>0 \text{ при } 0<c<c_0={}^1/_2(z+\sqrt{z^2+4k^2z})$$
$$\partial R/\partial c=0 \text{ при } c=c_0,\ \partial R/\partial c<0 \text{ при } c>c_0 \qquad (3.3)$$

Приведенные неравенства означают, что при фиксированных значениях величин k и z динамическая нагрузка сначала возрастает с ростом жесткости c, достигает максимума при $c=c_0$ и затем монотонно убывает с возрастанием параметра c. Из (3.2), (3.3) вытекает, что при значениях $c<{}^1/_2z$, приводящих к уменьшению динамической нагрузки по сравнению с жестким креплением корпуса к основанию, амплитуда динамической нагрузки R (3.2) является монотонно возрастающей функцией жесткости c, поскольку очевидно неравенство $c_0>{}^1/_2z$.

Из установленных выше свойств функций $U(c, k, z)$ и $R(c, k, z)$ вытекает, что для обеспечения наибольшей эффективности амортизатора в стационарном режиме ($z=\omega^2=1$) нужно выбрать возможно меньшее значение коэффициента жесткости $c<{}^1/_2$. При этом обеспечивается также и минимум амплитуды стационарных колебаний корпуса, так как при $c<1$ (следовательно, и при $c<{}^1/_2$) амплитуда колебаний корпуса является монотонно возрастающей функцией параметра c.

Отметим, что во многих практически важных случаях коэффициенты вязкости и жесткости ограничены снизу конечными, не слишком малыми величинами, так как в противном случае время затухания свободных колебаний узлов механизмов или элементов конструкций очень велико, что неприемлемо с точки зрения их функционирования. Таким образом, если определяемые техническими требованиями ограничения на коэффициент жесткости выражаются неравенствами $c\geqslant a$, $a<{}^1/_2$, то для обеспечения наибольшей эффективности амортизатора в стационарном режиме параметр c следует выбрать равным a.

При некоторых соотношениях между параметрами колебательной системы a, k и ω_0 величина отклонения корпуса от положения равновесия во время раскрутки ротора может превышать амплитуду его колебаний в установившемся режиме. Это обстоятельство связано с прохождением частоты вращения ротора через резонанс. Поэтому может оказаться целесообразным некоторое увеличение жесткости амортизатора на начальном этапе раскрутки, несмотря на возможное возрастание динамической нагрузки. Рассмотрим задачу об оптимальном релейном управлении жесткостью амортизатора c с целью уменьшения амплитуды вынужденных колебаний.

Пусть коэффициент жесткости c является переменной величиной вида

$$c(t)=b \text{ при } 0\leqslant t<t_*,\quad c(t)=a \text{ при } t\geqslant t_* \qquad (3.4)$$

Здесь a — постоянное значение коэффициента жесткости $c(t)$ при стационарном режиме, $b>a$ — задаваемое на начальном этапе раскрутки значение жесткости амортизатора, t_* — момент релейного изменения величины c, подлежащий определению из условий оптимизации. Требуется выбрать момент переключения t_*, минимизирующий максимум амплитуды квазистационарных колебаний, т. е. такой, что

$$\sup_t V(t, t_*)=\min_\tau \sup_t V(t, \tau)$$

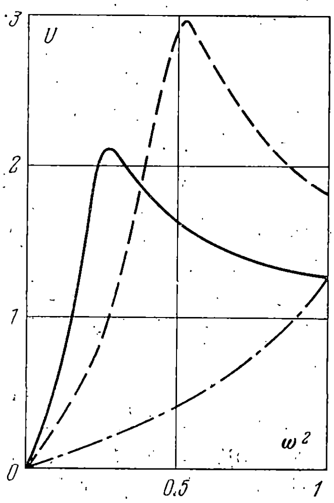
$$V(t,\tau)=\begin{cases} U(b,k,\omega^2(t)), & t<\tau \\ U(a,k,\omega^2(t)), & t\geqslant\tau \end{cases}$$

Физический смысл и обоснование указанной постановки задачи оптимизации в колебательном режиме движения корпуса хорошо поясняются фиг. 2, на которой представлены амплитудно-частотные характеристики системы, соответствующие различным значениям коэффициента жесткости c.

Сделанное в начале п. 3 предположение о монотонном возрастании угловой скорости вращения ротора $\omega(t)$ позволяет сформулировать поставленную задачу в следующей эквивалентной форме. Требуется найти величину $\omega_* \in [0, 1]$, такую, чтобы

$$\max_{\omega\in[0,1]} V_0(\omega, \omega_*) = \min_{\xi\in[0,1]} \max_{\omega\in[0,1]} V_0(\omega, \xi)$$

$$V_0(\omega, \xi) = \begin{cases} U(b, k, \omega^2), & \omega\in[0, \xi) \\ U(a, k, \omega^2), & \omega\in[\xi, 1] \end{cases}$$



Фиг. 2

Отметим, что в момент скачкообразного изменения жесткости амортизатора (3.4) возникнут свободные колебания, и функция $y_0(t)$ из (2.2), вообще говоря, не описывает с точностью до величины порядка ε движение системы (1.2), (1.3) в течение времени, пока эти колебания не затухнут. Далее, как отмечалось, предполагается, что коэффициенты демпфирования и жесткости таковы, что время затухания свободных колебаний, возникших вследствие переключения жесткости, мало по сравнению с интервалом времени, в течение которого существенно изменится частота (и амплитуда) квазистационарных колебаний. В проводимом исследовании медленного переходного процесса рассматриваются только квазистационарные колебания.

Простой анализ выражения функции U (3.1) показывает, что если $a<b$, то справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &U(a, k, z)>U(b, k, z) \quad \text{при } 0<z<{}^1\!/_2(a+b) \\ &U(a, k, z)=U(b, k, z) \quad \text{при } z={}^1\!/_2(a+b) \\ &U(a, k, z)<U(b, k, z) \quad \text{при } z>{}^1\!/_2(a+b) \end{aligned} \qquad (3.5)$$

для любых значений коэффициентов демпфирования и жесткости. Это означает, что при малых частотах меньшую амплитуду колебаний обеспечивает амортизатор с большей жесткостью, а при высоких частотах лучшие показатели дает более мягкий амортизатор. Из неравенств (3.5) и изложенных выше свойств функции $U(c, k, z)$ вытекает, что искомая частота ω_*, при достижении которой следует изменить коэффициент жесткости в соответствии с (3.4), равна

$$\omega_* = \begin{cases} \sqrt{{}^1\!/_2(a+b)}, & {}^1\!/_2(a+b)<1 \\ 1, & {}^1\!/_2(a+b)\geq 1 \end{cases}$$

При этом условии в каждый момент времени реализуется меньшее из двух возможных значений амплитуды колебаний. Искомый момент времени t_* переключения определяется как корень уравнения относительно $t>0$:

$$\omega(t) = \varepsilon \int_0^t f(\tau)\, d\tau = \omega_*$$

В силу сделанных выше предположений относительно свойств функции $f(t)$ уравнение имеет единственное решение при $\omega_*<1$. Оно не имеет решения при $\omega_*=1$, что отвечает соотношению $a+b\geqslant 2$, если значение угловой скорости $\omega=1$ не достигается за конечное время. В этом случае формально можно считать $t_*=\infty$, а практически переключение жесткости амортизатора следует производить, когда угловая скорость станет достаточно близкой к стационарному значению.

Определим, в каких случаях применение амортизатора с релейно управляемым коэффициентом жесткости (3.4) приводит к уменьшению максимального значения амплитуды колебаний корпуса. Для этой цели исследуем разность

$$S(a,b)=\max_{\omega\in[0,1]} V_0(\omega,0)-\max_{\omega\in[0,1]} V_0(\omega,\omega_*),\quad \omega_*\in[0,1]$$

характеризующую указанное уменьшение максимальной амплитуды колебаний корпуса во время раскрутки ротора. Очевидно, что $S(a,\ b)\equiv 0$, если функция $U(a,\ k,\ z)$ не имеет внутреннего максимума для $z\in[0,\ 1]$, поскольку в этом случае

$$\max_{\omega\in[0,1]} V_0(\omega,0)=U(a,k,1)$$

а максимальное значение амплитуды колебаний корпуса не может быть меньше амплитуды стационарных колебаний.

Найдем, при каких соотношениях между параметрами a и k амортизатора существует внутренний максимум. В силу установленных выше свойств функции $U(c,\ k,\ z)$ внутренний максимум существует, если $k^2-2a<0$, и достигается в точке $z_*=2a^2(2a-k^2)^{-1}$. Очевидно, что $z_*<1$ лишь при выполнении условия $2a^2-2a+k^2<0$. Дальнейшее исследование показывает, что это неравенство эквивалентно следующим:

$$k<1/\sqrt{2},\quad {}^1/_2(1-\sqrt{1-2k^2})<a<{}^1/_2(1+\sqrt{1-2k^2}).$$

Из определения функции S следует, что $S(a,\ b)\equiv 0$, если выполняется условие ${}^1/_2(a+b)\leqslant z_*$, которое эквивалентно следующему: $b\leqslant(2a^2+ak^2)\times\times(2a-k^2)^{-1}$. Последнее означает, что при возрастании частоты ω до значения ω_*, соответствующего изменению жесткости согласно (3.4), внутренний максимум функции $U(a,\ k,\ z)$ $(z=\omega^2)$ не достигается.

Итак, амортизатор с релейно-управляемой жесткостью $c(t)$ (3.4) целесообразно применять, если параметры системы удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered}{}^1/_2(1-\sqrt{1-2k^2})<a<{}^1/_2(1+\sqrt{1-2k^2}),\quad k<1/\sqrt{2}\\ k^2-2a<0,\quad b>(2a^2+ak^2)(2a-k^2)^{-1}\end{gathered}\tag{3.6}$$

В этом случае уменьшение максимальной амплитуды колебаний корпуса S определяется соотношениями

$$\begin{gathered}S(a,\ b)\equiv U(a,\ k,\ z_*)-U(a,\ k,\ \omega_*^2)\\ S=\frac{2a}{k\sqrt{4a-k^2}}-\frac{a+b}{\sqrt{(a-b)^2+2k^2(a+b)}},\quad \text{если}\quad \frac{a+b}{2}<1\\ S=\frac{2a}{k\sqrt{4a-k^2}}-\frac{1}{\sqrt{(a-1)^2+k^2}},\quad \text{если}\quad \frac{a+b}{2}\geqslant 1\end{gathered}\tag{3.7}$$

Исследуем теперь зависимость функции $S(a,\ b)$ от параметра b при фиксированных значениях a и k. Дифференцирование по b на интервале

$(2z_*-a, 2-a)$ приводит к выражению

$$\partial S/\partial b = [b(2a-k^2)-a(k^2+2a)][(a-b)^2+2k^2(a+b)]^{-3/2}$$

В силу последнего из неравенств (3.6) производная $\partial S/\partial b>0$, и выигрыш S (3.7) монотонно возрастает с ростом b, достигая максимума при $\omega_*^2={}^1/_2(a+b)=1$, т. е. при $b=2-a$, а переключение коэффициента жесткости на меньшее значение нужно производить, когда угловая скорость вращения ротора становится близкой к скорости установившегося движения.

Вернемся вновь к фиг. 2, на которой изображены амплитудно-частотные характеристики системы, соответствующие различным значениям жесткости: $c=0.25$ (сплошная линия), $c=0.5$ (штриховая линия), $c=1.75$ (штрихпунктирная линия); коэффициент демпфирования равен $k=0.25$. Представленные на фиг. 2 кривые наглядно иллюстрируют полученные результаты.

Постановка задачи, рассмотренной в статье, возникла в результате обсуждений вопросов амортизации вращающихся узлов механизмов с сотрудниками Центрального института математики и механики АН ГДР: Г. Шмидтом, Б. Хайманном, Х. Безингером и Р. Икердтом, которых авторы искренне благодарят.

Поступила 25 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baker J. G.* Mathematical-machine determination of the vibration of accelerated unbalanced rotor. J. Appl. Mech., 1939, vol. 6, No. 4.
2. *Кононенко В. О.* Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М., «Наука», 1964.
3. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М., «Наука», 1967.
4. *Matsuura Katsumasa.* A study of vibration and velocity characteristics of an accelerated unbalanced rotor. Bull. JSME, 1975, vol. 18, No. 125.
5. *Matsuura Katsumasa.* A method for estimating the condition that a rotor can pass through resonance. Bull. JSME, 1977, vol. 20, No. 145.
6. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М., «Наука», 1964.
7. *Фролов К. В.* Уменьшение амплитуды колебаний резонансных систем путем управляемого изменения параметров. Машиноведение, 1965, № 3.