

ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ ПРИ ТРЕНИИ
В УСЛОВИЯХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ
И ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ ИСТОЧНИКА ЭНЕРГИИ

А. А. АЛИФОВ, К. В. ФРОЛОВ

(Москва)

Данная работа является продолжением [1, 2]. Изучаются колебания механической системы при отрицательных значениях относительной скорости, исследуются нестационарные переходы системы от одного динамического состояния в другое. Приводятся результаты моделирования исходных нелинейных уравнений на аналоговой вычислительной машине (АВМ).

1. Уравнения движения автопараметрической системы с одной степенью свободы записываются в виде

$$x_1'' + \omega_1^2 x_1 = \frac{\varepsilon}{m_1} \left[-b_1 x_1 \cos \varphi - k_1 x_1 \dot{\varphi} - \vartheta_1 \frac{x_1 \dot{\varphi}}{|x_1 \dot{\varphi}|} + T(U_1) \right] \quad (1.1)$$

$$\varphi'' = \varepsilon I^{-1} [M(\varphi) - rT(U_1)]$$

причем обозначения соответствуют принятым в [1].

Систему (1.1) будем исследовать при условиях $V > 0$; $U_1 = V - x_1 \dot{\varphi} < 0$.

Поскольку наиболее активные колебательные процессы развиваются при резонансе, то рассмотрим область основного параметрического резонанса (субгармоническое захватывание второго порядка), где расстройка частот определяется соотношением $\omega_1^{-1/2} \varphi = \varepsilon \Delta_1$.

Уравнения (1.1) заменой переменных $x_1 = A \cos \psi$, $x_1 \dot{\varphi} = -A \omega_1 \sin \psi$, $\varphi = \theta$, $\psi = 1/2 \varphi + \xi$ приводим к стандартной форме и выполняем операцию усреднения. Усреднение функции $T(U_1)$ выполняем по способу, изложенному в [3].

Система усредненных уравнений записывается так:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\varepsilon r}{I} \left[M\left(\frac{u}{r}\right) - rT(u) - \frac{3}{2} r \alpha_3 q u A_1^2 - \frac{r q}{\pi} (3\pi - 2\psi_2) \right]$$

$$\frac{dA_1}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2m_1} \left[-\frac{b_1 A_1}{2\omega_1} \sin 2\xi + \frac{4\vartheta_1}{\pi} + (3\alpha_3 q u^2 - \alpha_1 q + k) A_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4} \alpha_3 q A_1^3 + \frac{8q}{A_1} (A_1^2 - u^2)^{1/2} \right]$$

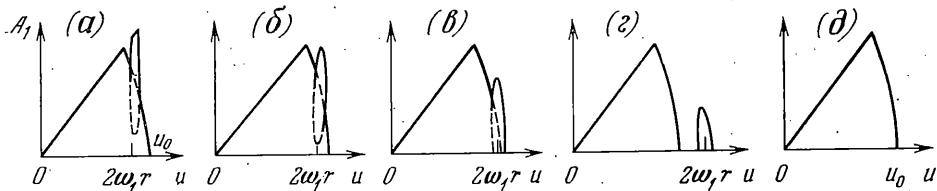
$$\frac{d\xi}{dt} = \omega_1 - \frac{u}{2r} + \frac{\varepsilon b_1}{4\omega_1 m_1} \cos 2\xi \quad (1.2)$$

$$u = \Omega r, \quad A_1 = a \omega_1, \quad \psi_2 = 2\pi - \arcsin u A_1^{-1}$$

Из системы (1.2) получаем (см. п. 2) приближенное выражение амплитуды колебаний в установившемся режиме $A_1 \approx u$.

Анализ результатов [1] и данной работы показывает, что резонансная кривая в зависимости от радиуса r (при $\omega_1 = \text{const}$) может располагаться по-разному относительно кривой $A_1 = f(u)$, соответствующей автоколебаниям¹. Поэтому функция $A_1 = f(u)$ во всем диапазоне скоростей может принимать множество разнообразных форм. Некоторые примеры представлены на фиг. 1 ($\phi_1 = 0$). Пунктирными линиями показаны нереализуемые участки резонансной кривой.

Из анализа усредненных уравнений следует, что при $|\omega_1 - 1/2ur^{-1}| < b_1(4\omega_1 m_1)^{-1}$ в системе возникает резонансный режим, при $|\omega_1 - 1/2ur^{-1}| > b_1(4\omega_1 m_1)^{-1}$ — квазипериодический режим (режим комбинационных колебаний); поэтому кривые на фиг. 1 в пределах областей, окружающих резонансную область, окажутся амплитудно-модулированными. Огибающую амплитуды можно определить численным интегрированием системы



Фиг. 1

усредненных уравнений, полученных выше и в [1]. Когда расстройка $|\omega_1 - 1/2\varphi|$ достаточно велика, в системе устанавливаются автоколебания, амплитуда которых приблизительно равна амплитуде стационарных колебаний в нерезонансном случае, а частота — «собственной» частоте системы.

Следует отметить [1, 2], что с увеличением глубины модуляции b_1 расширяются зоны резонансов $\omega_1 - 1/2\varphi = \varepsilon\Delta_1$ и $\omega_1 - \varphi = \varepsilon\Delta_2$. Естественно, что по этой причине с увеличением глубины модуляции b_1 будут расширяться зоны квазипериодических режимов. Таким образом, при достаточно больших значениях b_1 возможно слияние зон квазипериодических режимов, вырождающихся из периодических режимов, с частотами $\varphi/2$ и φ .

Запишем (см. п. 2) геометрический критерий устойчивости

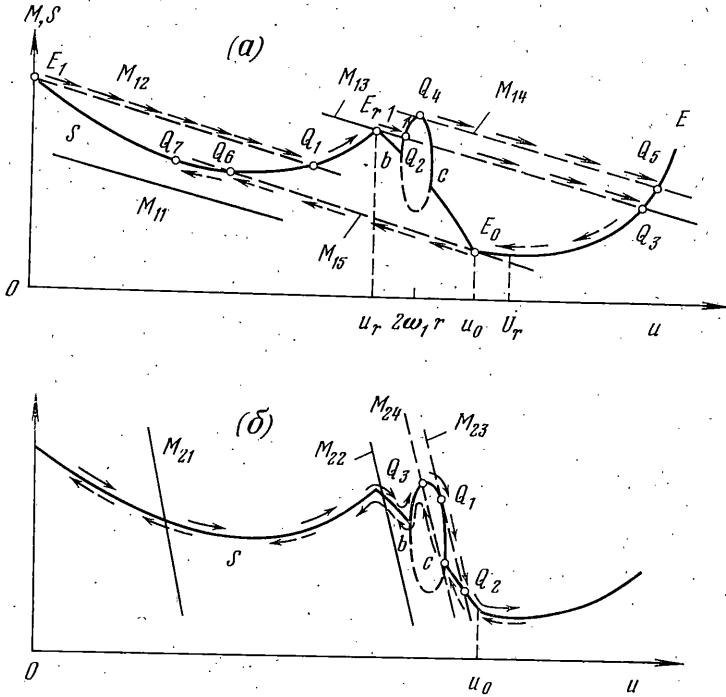
$$\frac{d}{du} \left[M \left(\frac{u}{r} \right) - S(u) \right] < 0, \quad S(u) \approx rT(u) + \frac{3}{2} r\alpha_3 qu^3 \quad (1.3)$$

Проанализируем протекание нестационарных переходов в автопараметрической системе. Для объяснения этого явления обратимся к фиг. 2, на которой график нагрузки $S(u)$ построен на основании (1.3) и результатов [1, 2]. График функции $S(u)$ соответствует зависимости $A_1 = f(u)$, представленной на фиг. 1, б.

Пусть положение характеристики M_{11} является начальным. Так как момент, развиваемый двигателем, меньше момента $S(u)$ сил сопротивления, то двигатель не может преодолеть сопротивление, пока характеристика не займет положение M_{12} . При этой характеристике система совершит (в направлении стрелок) нестационарный переход в новое стационарное состояние, характеризуемое точкой Q_1 . Если точка Q_1 близка к резонансной зоне, то в системе возникнут квазипериодические колебания. Следует отметить, что для построения графика функции $S(u)$ в областях квазипериодических режимов использовано ее среднее значение за квазипериод. Это вполне достаточно для качественной иллюстрации явления нестационарных переходов во всем диапазоне скоростей.

¹ Зависимость на фиг. 1, д соответствует автоколебаниям ($b_1 = 0$).

При перемещении характеристики вправо в системе последовательно совершаются срывы колебаний: сначала из точки E_r в точку Q_2 , затем из точки Q_4 в точку Q_5 . Заметим, что так как система с характеристикой M_{13} в точке Q_2 находится на границе устойчивости, то из-за действия случайных возмущений она может прямо перейти в точку Q_3 . Поскольку точка Q_5 (а также точка Q_3) соответствует восходящему участку функции $T(U_1)$, то в этой точке установится стационарный безвибрационный процесс. При обратном перемещении характеристики из окрестности точки



Фиг. 2

E_0 система совершит нестационарный переход в точку Q_6 , где установятся устойчивые колебания.

При крутых характеристиках источника энергии $M(u/r)$ нестационарные переходы будут протекать так, как показано на фиг. 2, б.

Таким образом, при пологих характеристиках и квазистационарном увеличении скорости могут реализоваться резонансные колебания, соответствующие малому участку типа Q_2Q_4 ; при уменьшении скорости резонансные режимы не реализуются. При достаточно крутых характеристиках и прямом прохождении (увеличении скорости) реализуется участок типа bQ_1 , а при обратном прохождении — участок типа Q_3b .

В зависимости от параметров системы в целом указанные явления могут протекать разнообразно, что следует из разнообразности амплитудно-частотных (скоростных) характеристик и, следовательно, характеристик $S(u)$.

2. Рассматривая уравнения движения системы с n степенями свободы, приведенных в [1], и действуя согласно п. 1, получим для области захватывания $\omega_s^{-1}/2\varphi = \varepsilon\Delta_s$ следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} &= \frac{\varepsilon r}{I} \left[M\left(\frac{u_s}{r}\right) - rT(u_s) - \frac{3}{2} r\alpha_3 q u_s \mu_{n_s}^2 A_{1s}^2 - \frac{r q}{\pi} (3\pi - 2\psi_s)^{(2)} \right] \\ \frac{dA_{1s}}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2M_s} \left[-\frac{E_s A_{1s}}{2\omega_s} \sin 2\xi_s + \bar{L}_s + D_s A_{1s} + \right. \\ &\quad \left. + q \mu_{n_s}^2 A_{1s} \left(3\alpha_3 u_s^2 - \alpha_1 + \frac{3}{4} \alpha_3 \mu_{n_s}^2 A_{1s}^2 \right) + \frac{8q}{A_{1s}} (A_{1s}^2 \mu_{n_s}^2 - u_s^2)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \omega_s - \frac{u_s}{2r} + \frac{\epsilon E_s}{4\omega_s M_s} \cos 2\xi_s, \quad \psi_s^{(2)} = 2\pi - \arcsin \frac{u_s}{\mu_{ns} A_{1s}} \quad (2.1)$$

где остальные обозначения соответствуют принятым в [1].

Из (2.1) для стационарных режимов движения имеем уравнение

$$\kappa^2 A_{1s}^8 - 2\Phi_s \kappa A_{1s}^6 + 2L_s \kappa A_{1s}^5 + \Phi_s^2 A_{1s}^4 - 2L_s \Phi_s A_{1s}^3 + (L_s^2 - 64q^2 \mu_{ns}^2) A_{1s}^2 + 64q^2 u_s^2 = 0 \quad (2.2)$$

$$\kappa = {}^3/\sqrt[4]{\alpha_3 q \mu_{ns}^4}, \quad \Phi_s = {}^3/\sqrt[4]{\alpha_3 q \mu_{ns}^4} H_s(\mu)$$

$$H_s(u_s) = 4\mu_{ns}^{-2} \{u_{0s}^2 - u_s^2 \pm E_s (6\alpha_3 q \omega_s \mu_{ns}^2)^{-1} [1 - 4\omega_s^2 M_s^2 E_s^{-2} r^{-2} (u_s - 2\omega_s r)^2]^{1/2}\}$$

Уравнение (2.2) имеет высокий порядок и не позволяет получить представления о виде зависимости амплитуды от скорости. Для упрощения уравнения (2.2) принимаем $\alpha_3 = L_s = 0$ и находим

$$A_{1s}^2 = 2(\mu_{ns}^2 \zeta_s)^{-1} (1 \pm \sqrt{1 - \zeta_s u_s^2}), \quad \zeta_s = \Phi_s^2 (16q^2 \mu_{ns}^4)^{-1} \quad (2.3)$$

Решение со знаком плюс перед корнем не имеет практического значения, а решение со знаком минус после двукратного разложения подкоренного выражения в ряд ($u_s^2 \zeta_s \ll 1$) и удержания определенного числа членов ряда дает

$$A_{1s} \approx u_s \mu_{ns}^{-1} (1 + {}^1/\sqrt[8]{\zeta_s} u_s^2) \quad (2.4)$$

или более приближенно

$$A_{1s} \approx u_s \mu_{ns}^{-1} \quad (2.5)$$

Из полученного приближенного выражения следует, что при $U_n < 0$ амплитуда колебаний линейно зависит от скорости источника возбуждения. Однако формула (2.4) показывает, что с увеличением глубины модуляций b_i , т. е. E_s , степень нарушения приближенного равенства (2.5) возрастает. Следовательно, имеется некоторое граничное значение суммарных глубин модуляций E_{sr} . При $E_s \leq E_{sr}$ амплитуда автопараметрических колебаний находится в линейной зависимости от скорости источника возбуждения, а при $E_s > E_{sr}$ — нелинейной.

Следует отметить, что можно определить условия, позволяющие устранить автопараметрические колебания во всем диапазоне скоростей. С этой целью был проведен анализ амплитудного уравнения (2.5), которое приведено в п. 2 работы [1]. Анализ показывает, что экстремальные значения функций $H_s(u_s)$ и два совпавших корня этого уравнения имеют место при значениях скорости, определяемых соответственно из уравнений

$$u_s^4 - \gamma_{3s} u_s^3 + \gamma_{2s} u_s^2 - \gamma_{1s} u_s + \gamma_{0s} = 0 \quad (2.6)$$

$$u_s^4 - \rho_{2s} u_s^2 - \rho_{1s} u_s + \rho_{0s} = 0 \quad (2.7)$$

$$\gamma_{0s} = \omega_s^2 r^2 M_s^2 \gamma^{-2}, \quad \gamma_{1s} = \omega_s r M_s^2 \gamma^{-2}, \quad \gamma_{2s} = 4\omega_s r, \quad \gamma = 3\alpha_3 q \mu_{ns}^2$$

$$\gamma_{2s} = M_s^2 (2\gamma)^{-2} [1 - \gamma^2 r^2 (\omega_s^2 M_s^2)^{-1} (E_s^2 - 16\omega_s^4 M_s^2)]$$

$$\rho_{0s} = {}^1/\sqrt[4]{16\mu_{ns}^4} [\rho_s^2 + r^2 h_s^2 (16\omega_s^4 M_s^2 - E_s^2)], \quad \rho_{1s} = r M_s^2 h_s^2 \mu_{ns}^4 \omega_s^3$$

$$\rho_{2s} = {}^1/\sqrt[4]{4\mu_{ns}^2} (2\rho_s + \omega_s^2 M_s^2 h_s^2 \mu_{ns}^2), \quad \rho_s = \eta_s - 4u_{0s}^2 \mu_{ns}^{-2}, \quad h_s = 2(\gamma \omega_s \mu_{ns}^2)^{-1}$$

$$\eta_s = 3(B_s^2/4)^{1/2}$$

Суммарное значение коэффициентов трения демпферов сухого трения, при котором возможно единственное решение уравнения (2.5) [1], определяется из выражения

$$L_{s*} = 4\alpha_3 q \mu_{ns} \eta_{0s} (\eta_{0s}/3)^{1/2}, \quad \eta_{0s} = u_{0s}^2 - u_{sm}^2 \pm (\rho_{1s} u_{sm} - \kappa_{1s} u_{sm}^2 - \kappa_{2s})^{1/2} \quad (2.8)$$

$$\kappa_{1s} = {}^1/\sqrt[4]{\omega_s^2 M_s^2 h_s^2 \mu_{ns}^4}, \quad \kappa_{2s} = {}^1/\sqrt[4]{16r^2 h_s^2 \mu_{ns}^4 (16M_s^2 \omega_s^4 - E_s^2)}$$

Если в формуле (2.8) принять $u_s = 2\omega_s r > u_{0s} = 0$ ($u_{0s} = 0$ при $D_{s*} = \alpha_1 q \mu_{ns}^2$), то получим требуемые выше условия (так как вершина резонансной кривой смещена влево [1], то при $u_s = 2\omega_s r$ амплитуда меньше, чем A_{1s} , но разность их имеет довольно высокий порядок малости относительно ε). Здесь D_{s*} является предельным суммарным значением коэффициентов демпфирования линейных демпферов.

Условия устойчивости стационарных автопараметрических колебаний при $U_n < 0$ следующие:

$$\begin{aligned}
 & N_s - F_{1s} - \frac{IF_{3s}}{4M_s A_{1s} r} - \frac{IF_{2s} E_s}{2M_s \omega_s r} - \frac{2rq}{\pi (A_{1s}^2 \mu_{ns}^2 - u_s^2)^{1/2}} < 0 \\
 & \frac{E_s F_{2s} F_{3s}}{8M_s^2 A_{1s} \omega_s} \left(N_s - F_{1s} - \frac{2rq}{\pi (A_{1s}^2 \mu_{ns}^2 - u_s^2)^{1/2}} \right) - \frac{r E_s F_{2s} F_{4s}}{2\omega_s M_s^2} - \\
 & - \frac{A_{1s}}{2r} \left(\frac{2rq u_s}{\pi A_{1s} (A_{1s}^2 \mu_{ns}^2 - u_s^2)^{1/2}} - 3\alpha_3 q u_s \mu_{ns}^2 A_{1s} \right) (u_s - 2\omega_s r) < 0 \tag{2.9} \\
 & \left[N_s - F_{1s} - \frac{IF_{3s}}{4M_s A_{1s} r} - \frac{IE_s F_{2s}}{2M_s \omega_s r} - \frac{2rq}{\pi (A_{1s}^2 \mu_{ns}^2 - u_s^2)^{1/2}} \right] \times \\
 & \times \left[\frac{r(\omega_s F_{3s} + 2E_s A_{1s} F_{2s})}{4IM_s \omega_s A_{1s}} \left(N_s - F_{1s} - \frac{2rq}{\pi (A_{1s}^2 \mu_{ns}^2 - u_s^2)^{1/2}} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{E_s F_{2s} F_{3s}}{8\omega_s A_{1s} M_s^2} - \frac{r^2 F_{4s}}{IM_s} \right] - \frac{r E_s F_{2s} F_{4s}}{2\omega_s M_s^2} + \\
 & + \frac{E_s F_{2s} F_{3s}}{8\omega_s A_{1s} M_s^2} \left(N_s - F_{1s} - \frac{2rq}{\pi (A_{1s}^2 \mu_{ns}^2 - u_s^2)^{1/2}} \right) - \\
 & - \frac{A_{1s}}{2r} \left(\frac{2q u_s}{\pi A_{1s} (A_{1s}^2 \mu_{ns}^2 - u_s^2)^{1/2}} - 3\alpha_3 q u_s \mu_{ns}^2 A_{1s} \right) (u_s - 2\omega_s r) > 0 \\
 & N_s = \frac{d}{du_s} M \left(\frac{u_s}{r} \right), \quad F_{1s} = rq \left(3\alpha_3 u_s^2 - \alpha_1 + \frac{3}{2} \alpha_3 \mu_{ns}^2 A_{1s}^2 \right) \\
 & F_{2s} = \pm [1 - 4\omega_s^2 M_s^2 r^2 E_s^{-2} (u_s - 2\omega_s r)^2]^{1/2}, \quad F_{3s} = 3\alpha_3 q \mu_{ns}^4 A_{1s}^3 - 2L_s - \\
 & - 16q A_{1s}^{-1} (A_{1s}^2 \mu_{ns}^2 - u_s^2)^{1/2} + 16q u_s^2 A_{1s}^{-1} (A_{1s}^2 \mu_{ns}^2 - u_s^2)^{-1/2} \\
 & F_{4s} = \frac{6(1+2\pi)\alpha_3 q^2 u_s^2 \mu_{ns}^2}{\pi (A_{1s}^2 \mu_{ns}^2 - u_s^2)^{1/2}} - (3\alpha_3 q u_s A_{1s} \mu_{ns}^2)^2 - \frac{8q^2 u_s^2}{\pi A_{1s}^2 (A_{1s}^2 \mu_{ns}^2 - u_s^2)}
 \end{aligned}$$

Эквивалентный второму неравенству (2.9) критерий можно с учетом (2.5) записать так:

$$\frac{d}{du_s} \left[M \left(\frac{u_s}{r} \right) - S(u_s) \right] < 0, \quad S(u_s) \approx rT(u_s) + \frac{3}{2} r\alpha_3 q u_s^3 \tag{2.10}$$

3. Одним из эффективных методов исследования нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих динамическое взаимодействие колебательной системы и источника энергии, является решение (моделирование) этих уравнений на АВМ.

Пусть динамическое взаимодействие колебательной системы с n степенями свободы и источника энергии описывается уравнениями

$$\sum_{s=1}^n (m_{rs}x_s'' + k_{rs}x_s' + c_{rs}x_s) = F_r(\varphi, \varphi', \varphi'', x_1, x_1', x_1'', \dots, x_n, x_n', x_n'') \quad (3.1)$$

$$I\varphi'' = L(\varphi') - H_0(\varphi') + F(\varphi, \varphi', x_1, x_1', x_1'', \dots, x_n, x_n', x_n'')$$

($r=1, 2, \dots, n$)

где m_{rs} , K_{rs} , C_{rs} — соответственно параметры масс, демпфирования и жесткости; x_s — обобщенные координаты; φ — угловая координата; I — суммарный момент инерции вращающихся частей масс; $L(\varphi')$ — движущий момент двигателя, определяемый его статической характеристикой; $H_0(\varphi')$ — момент сил сопротивления вращению; $F_r(\dots)$ — функции, в состав которой входят члены, характеризующие воздействие двигателя на колебательную систему; $F(\dots)$ — функция, отражающая ответное воздействие колебательной системы на источник энергии посредством переменных величин x_s , x_s' и x_s'' ($s=1, 2, \dots, n$).

Представим внешнюю характеристику источника энергии в виде

$$L(\varphi') = L_0 + N\varphi' \quad (3.2)$$

где L_0 и N — постоянные, причем N выбирается из области $-\infty < N < 0$.

Исследование на АВМ системы уравнений (3.1) может быть проведено в два этапа.

На первом этапе задачу рассматриваем при идеальной мощности источника энергии и определяем амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) изучаемой системы с целью получения априорной информации.

На втором этапе исследуется полная система уравнений (3.1), т. е. учитывается ограниченность мощности источника энергии. При этом основной интерес представляет выяснение того факта, как влияют на формирование динамических режимов свойства источника энергии. В связи с отмеченным необходимо: непрерывное квазистационарное перемещение характеристики параллельно самой себе; непрерывное квазистационарное вращение характеристики вокруг некоторой точки, соответствующей определенному (выбранному) стационарному режиму.

Непрерывное квазистационарное перемещение характеристики позволяет записывать амплитудно-частотные характеристики (термин АЧХ выбран по аналогии со случаем, когда в (3.1) второе уравнение отсутствует, т. е. мощность источника считается идеальной) и наблюдать некоторые динамические особенности взаимодействия. Выполнение этих требований связано с изменением L_0 ($N = \text{const}$) по закону

$$L_0(\tau) = L_0^0 + k_0\tau \quad (3.3)$$

где L_0^0 — начальное значение L_0 ; τ — время, k_0 — коэффициент пропорциональности (скорость изменения L_0).

Непрерывное квазистационарное вращение характеристики вокруг некоторой точки дает возможность определить границы областей устойчивости в зависимости от свойств источника энергии. Для осуществления этой цели необходимо предварительное приведение второго уравнения (3.1) заменой $\Phi' = \varphi' - \Omega_c$ к виду

$$I\Phi'' = S(\Omega_c) - H_0(\Phi' + \Omega_c) - |N|\Phi' + F(\Phi, \Phi', \dots) \quad (3.4)$$

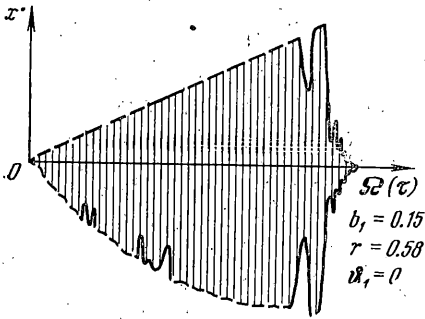
и последующее изменение $|N|$ по закону

$$|N(\tau)| = |N_0| + k_0\tau \quad (3.5)$$

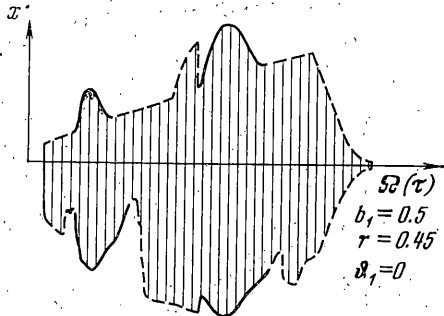
где $|N_0|$ — начальное значение наклона, отличное от нуля.

В уравнении (3.4) функция $S(\Omega_c)$ представляет собой нагрузку на источник, т. е. среднее значение функции $F(\dots)$ при установившемся режиме. Требуемые значения $S(\Omega_c)$ и Ω_c можно определить на основании машинного решения при достаточно большом наклоне $|N| = \text{const}$ ($L_0 = \text{const}$). Это обуславливается тем, что при очень крутых характеристиках источника энергии велика вероятность осуществления необходимого стационарного режима.

Моделировалась система уравнений (1.1) при следующих основных параметрах системы, выбранных в соответствии с теоретическими предпосылками: $\omega_1 = 1 \text{ с}^{-1}$, $m_1 = 1 \text{ кг} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{см}^{-1}$, $b = 0.07 \text{ кг} \cdot \text{см}^{-1}$, $k_1 = 0.02 \text{ кг} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^{-1}$, $r = 0.57$ и 1.14 см , $q = 0.5 \text{ кг}$, $\alpha_1 = 0.84 \text{ с} \cdot \text{см}^{-1}$, $\alpha_3 = 0.18 \text{ с}^3 \cdot \text{см}^{-3}$, $I = 1 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$. Во время опытов варьировались значения b_1 , r , k_1 и ϕ_1 ; соответствующие величины будут приведены в ходе изложения



Фиг. 3



Фиг. 4

(для краткости размерности их не показываются). В неговоренных случаях принимались указанные выше основные параметры. В некоторых случаях, с целью получения более полной информации, глубина модуляции b_1 выбиралась из области, где нарушаются предположения теории. Границы области будут приведены ниже.

В ходе моделирования опытным путем был определен диапазон изменения коэффициента k_0 , который составляет: $k_0 = 3 \cdot 10^{-6} - 3 \cdot 10^{-4}$. В опытах характеристика источника $L(\varphi)$ была взята вместе с $H_0(\varphi)$ в виде линейной функции $M(\varphi) = M_0 + N\varphi$. В соответствии с теоретическими положениями стационарные режимы определялись как точки пересечения графиков $M(u/r)$ и $S(u)$.

Согласно программе опытов, на первом этапе определялись зависимости $x' = f(\Omega)$ при различных значениях b_1 , r , ϕ_1 и при идеальной мощности источника энергии.

На фиг. 3, 4 жирными линиями показан $\text{max}|x'|$ в областях захватываний, пунктирной — огибающая $\text{max}|x'|$ в областях почти-периодических колебаний.

Фиг. 3 является наглядной иллюстрацией применимости приближенного равенства $A_1 \approx u$ при $U_1 < 0$ и при малой глубине модуляции b_1 . На этой же фигуре в области значений u , где выполняется $U_1 < 0$, отчетливо видна зона резонанса на равных частотах (гармоническое захватывание). В верхней полуплоскости имеет место $A_1 \approx u$, как в случае основного параметрического резонанса. Наряду с этими двумя зонами замечается область слабовыраженных ультрагармонических колебаний второго порядка ($\omega \approx 2\Omega$). В окрестностях резонансных зон возникает модуляция амплитуды.

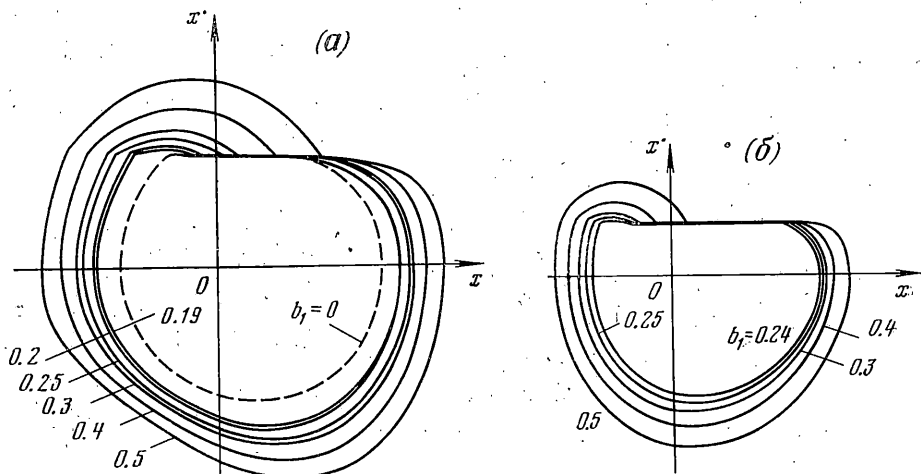
Случай «большой» глубины модуляции b_1 , которая обеспечивает преодоление ограничения, выраженного равенством $A_1 \approx u$ при обоих резонансах, показан на фиг. 4. Разумеется, что теоретические формулы не могут дать хорошую количественную оценку амплитуды, так как величина глубины модуляции выходит за пределы применимости используемого метода аналитического исследования. Граничным значением, разделяющим области «малых» и «больших» глубин модуляций, является в данном случае $b_{1*} = 0.2$.

Результаты моделирования показали, что при $b_1 = 0.25$ ($\phi_1 = 0$, $r = 0.68$) разность между расчетным и машинным значениями амплитуды ($A_m = 0.54$, индекс m здесь и далее означает машинное значение, индекс p — расчетное) при $u = 2\omega$ составляет $\Delta A = 0.06$. Таким образом, при $b_1 = 0.25$, помимо качественной оценки, получается также удовлетворительная количественная оценка амплитуды. При этой же величине b_1 ($\phi_1 = 0$, $r = 0.58$) равенство $A_1 \approx u$ нарушается слабо; в данном случае при максимальной резонансной амплитуде разность амплитуд составляет 0.025 , что достаточно мало по сравнению с величиной $A_m = 1.2$.

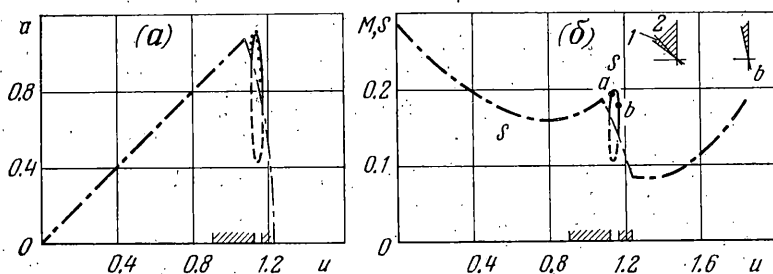
Фазовые портреты системы при различных значениях b_1 и при $r=0.45$ показаны на фиг. 5; первая из них соответствует «чистому» основному параметрическому резонансу ($u=2\omega r$), а вторая — резонансу на равных частотах ($u=\omega r$).

При $\phi_{1*}=0.0293$ отсутствовал основной параметрический резонанс, что находится в согласии с теоретическими результатами [1]. Следует отметить, что при $k_{1*}=0.42$, $\phi_1=0$ автопараметрические колебания отсутствовали во всем диапазоне скоростей, что также соответствует теории.

При неограниченной мощности источника энергии реализовались все стационарные режимы движения с большими амплитудами. Этот же результат следует из



Фиг. 5



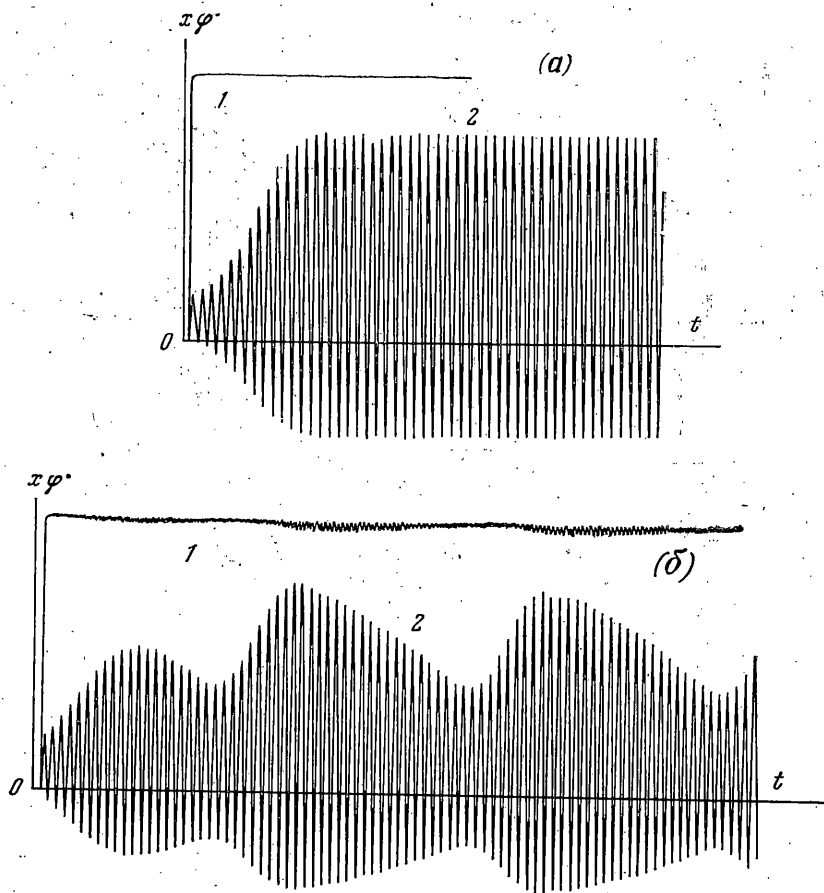
Фиг. 6

анализа критериев устойчивости при бесконечно большой крутизне $|N|$ характеристики источника энергии.

В соответствии с программой опытов далее исследовалась полная система уравнений (1.1). На фиг. 6 показана амплитудно-скоростная характеристика $a=f(u)$, а также зависимость $S(u)$ при $\phi_1=0$ и в случае основного параметрического резонанса. Сплошная линия получена расчетным путем [1], а точки — в результате обработки виброграмм. Штриховыми линиями показана нереализуемая часть резонансной кривой. Штрихпунктирная линия соответствует автоколебаниям.

Следует отметить, что в окрестностях резонансной зоны для определения режимов квазипериодических колебаний (заштрихованные зоны по оси u на фиг. 6, б) оказалось возможным с некоторым приближением использовать график $S(u)$, соответствующий автоколебаниям. В пределах заштрихованных секторов стационарные режимы устойчивы; эти секторы оказались немного уже по сравнению с расчетными, что связано с наличием зон наклонов N , при которых система имеет малый запас устойчивости. При расчетах в пределах таких зон устойчивость определялась третьими или четвертыми значащими цифрами после запятой в критериях устойчивости (например $0.0008 > 0$). Это нашло отражение при воспроизведении этих режимов на машине, поскольку моделирующее устройство подвержено случайным воздействиям и обладает погрешностями и несовершенствами.

Осциллограмма, соответствующая сектору 2 в точке a , представлена на фиг. 7, a . Из фигуры видна едва заметная модуляция $\varphi'(t)$, причиной которой является большая величина $|N|$. В пределах сектора 1 система обладает слабой устойчивостью; поэтому огибающая $x(t)$ носила хаотический характер и меняла свою форму при каждой повторной записи. Осциллограмма на фиг. 7, b иллюстрирует режим квазипериодических колебаний (биений) в правой окрестности резонансной зоны. С приближением к резонансной зоне глубина модуляции амплитуды и период биений увеличивались. Кроме того, глубина модуляций биений увеличивалась с увеличением $|N|$. На фигуре видна модуляция (биения) φ' в соответствии с модуляцией x ;



Фиг. 7

это обусловлено взаимодействием колебательной системы с источником энергии. Модуляция φ' усиливается по мере уменьшения $|N|$.

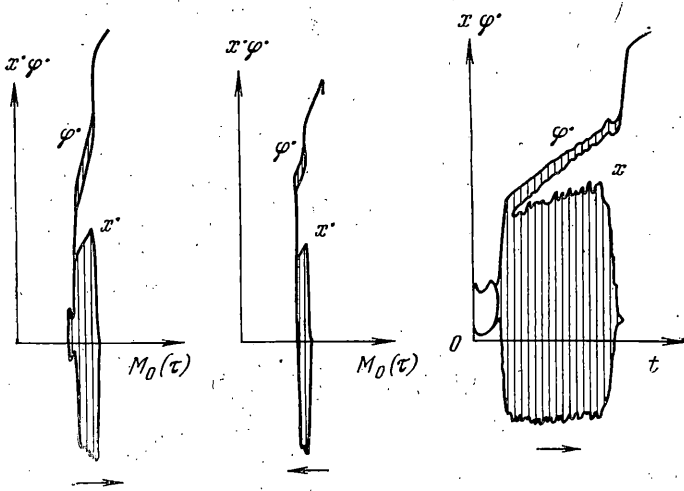
Устойчивые комбинационные колебания в правой окрестности резонансной зоны оказались возможны при $u < u_0$; при $u > u_0$ эти двухчастотные колебания затухали. В левой окрестности резонансной зоны также имели место устойчивые комбинационные колебания. Однако огибающие x отличались по форме от огибающих x , соответствующих правой окрестности резонансной зоны, и носили более сложный характер.

Изучалось также движение системы при $\varphi_1 = 0.012$ (эти результаты не приводятся). Следует отметить, что при $\varphi_1 \neq 0$ и при нулевых начальных условиях устойчивые колебания не возникали при $U_1 > 0$ и возникали при $U_1 < 0$. Колебания возбуждались при задании начального возмущения (условия) по x' . Таким образом, следует вывод: демпфер сухого трения либо полностью исключает автопараметрические колебания, либо исключает их частично, причем так, что лишь специально выбранные начальные возмущения приводят к устойчивым колебаниям (при $U_1 > 0$).

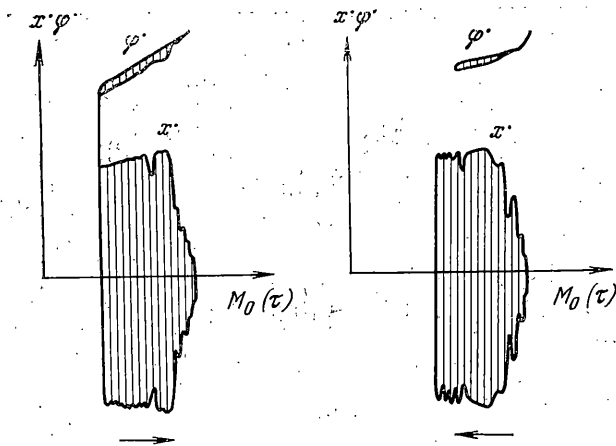
Явление срыва колебаний было изучено при помощи квазистационарного управления скоростью источника возбуждения. На приведенных ниже фигурах наглядно

проиллюстрировано протекание этого явления. Стрелки под рисунками указывают направление прохождения; начало отсчета $M_0(\tau)$ показано произвольно. На фигурах показаны обтекающие указанные зависимостей.

Картинки на фиг. 8 получены при $\phi_1=0$, $|N|=0.263$ и при начальных условиях: $x_0=x_0^*=\phi_0^*=0$, $M_0(0)=0.25$ (фиг. 8, а), $x_0=x_0^*=0$, $\phi_0^*=2.2$, $M_0(0)=0.42$ (фиг. 8, б). При квазистационарном увеличении $M_0(\tau)$ (т. е. ϕ^*) и при достижении граничной скорости происходит срыв колебаний и наблюдается локальное возрастание ϕ^* и убывание x^* до нуля. Ввиду малости наклона система, попав в резонансную зону,



Фиг. 8



Фиг. 9

проходит ее, происходит срыв в точку, далекую от этой зоны и принадлежащую восходящему участку силы $T(U_1)$. Это более наглядно видно из фиг. 8, а, где картина срыва показана во времени. Конечной точкой срыва является режим, характеризуемый скоростью $u_m=1.49$ ($u_p=1.48$). При медленном уменьшении $M_0(\tau)$ (фиг. 8, б) система осуществляет нестационарный переход в новое состояние ($u_m=0.9$). Дальнейшее уменьшение $M_0(\tau)$ приводит к тому, что наблюдается локальное убывание ϕ^* и x^* до нуля.

На фиг. 9, а представлено непрерывное прохождение при $\phi_1=0$ и $|N|=3$. Из фигуры виден едва заметный срыв резонансных колебаний. Срыв колебаний выражен слабо потому, что значения в начале и в конце перехода довольно близки. Фиг. 9, б иллюстрирует обратное прохождение при $\phi_1=0$, $|N|=7$. При прямом прохождении срыв не замечался, а при обратном прохождении — обнаруживается по записи x^* . Из фигуры видна модуляция x^* в левой и правой окрестностях резонансной зоны.

Представленные фигуры являются своеобразными амплитудно-частотными характеристиками для случая, когда источник энергии имеет ограниченную мощность; они достаточно хорошо показывают зависимость реализации колебаний от свойств источника энергии.

Поступила 8 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифов А. А., Фролов К. В. Автопараметрические колебания в системе с сухим трением и ограниченным возбуждением. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 4.
2. Алифов А. А. О параметрическом резонансе в автоколебательной системе, взаимодействующей с источником энергии. В кн.: Виброзащита человека-оператора и колебания в машинах. М., «Наука», 1977.
3. Алифов А. А. Об автоколебаниях в системе с ограниченным возбуждением. Машиноведение, 1979, № 1.