

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАТУХАНИЯ
СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУХМАССОВОЙ СИСТЕМЫ

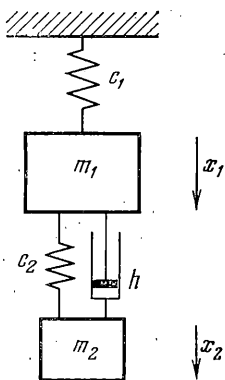
Р. Ф. НАГАЕВ, А. В. СТЕПАНОВ

(Ленинград)

Рассматривается линейная двухмассовая система, свободные колебания которой асимптотически затухают, т. к. между массами установлен вязкий демпфер. Получены точные количественные соотношения для определения оптимальных значений коэффициента вязкости демпфера и жесткости включенной параллельно ему пружины, обеспечивающие максимум минимального коэффициента демпфирования результирующих свободных колебаний.

Ранее, в работе М. И. Вульфсона [1] оптимальные параметры двухмассовой системы определялись из условия поглощения максимальной энергии за время между двумя последовательными отклонениями первой массы.

Рассмотрим двухмассовую линейную систему с двумя степенями свободы (фиг. 1). Требуется подобрать коэффициент жесткости c_2 пружины и коэффициент вязкости h демпфера, помещенными между массами таким образом, чтобы наименьший коэффициент затухания результирующих свободных колебаний системы принимал максимальное значение.



Фиг. 1

Выпишем уравнения движения системы

$$m_1 x_1'' + h(x_1' - x_2') + c_2(x_1 - x_2) + c_1 x_1 = 0 \quad (1)$$

$$m_2 x_2'' + h(x_2' - x_1') + c_2(x_2 - x_1) = 0$$

и характеристическое уравнение в безразмерном виде

$$p(r) = r^4 + z(1+\theta)r^3 + [1+\sigma(1+\theta)]r^2 + zr + \sigma = 0 \quad (2)$$

$$\theta = m_2/m_1, \quad z = h/m_2(m_1/c_1)^{1/2}, \quad \sigma = m_1 c_2/m_2 c_1, \quad r = \lambda(m_1/c_1)^{1/2} \quad (3)$$

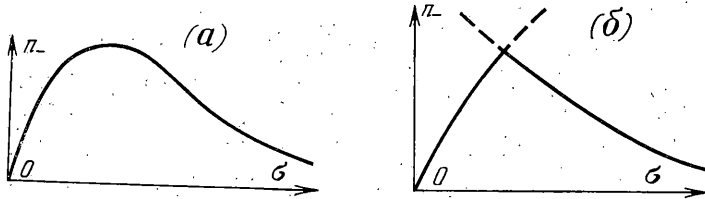
где λ — характеристический показатель. Вещественные части всех четырех корней r_k ($k=1, 2, 3, 4$) уравнения (2) отрицательны. Требуется при фиксированных параметрах m_1 , m_2 и c_1 так подобрать h и c_2 , чтобы минимальный безразмерный коэффициент демпфирования $n_k = -\operatorname{Re} r_k$ принимал максимальное значение. Иными словами, искомое условие оптимальности имеет вид

$$\max_{\sigma, z} \min_{1 \leq k \leq 4} n_k = n_*(\theta) \quad (4)$$

Поставленная задача имеет единственное решение при любых θ . Действительно, при $\sigma \rightarrow \infty$ теряется одна степень свободы, и два характеристических показателя задачи становятся чисто мнимыми: $r_{1,2} = \pm(1+\theta)^{-1/2}i$ ($i = \sqrt{-1}$). С другой стороны, при $\sigma \rightarrow 0$ один из характеристических пока-

зателей обращается в нуль. Поэтому зависимость $n_- = \min_{1 \leq k \leq 4} n_k$ от σ имеет вид, изображенный на фиг. 2.

В случае (фиг. 2, а) один и тот же коэффициент демпфирования обращается в нуль при $\sigma \rightarrow 0$ и $\sigma \rightarrow \infty$, а в случае (фиг. 2, б) — это различные коэффициенты. Соответственно условия максимальности в первом и втором случаях различны. В первом случае максимум является аналитическим ($\partial n / \partial \sigma = 0$). Во втором — неаналитическим и характеризуется тем, что несопряженные характеристические показатели имеют одинаковые



Фиг. 2

вещественные части. Аналогичным образом доказывается наличие $\max n_-$ по z .

Переходя к непосредственному решению задачи, определим

$$n_\sigma(\theta; z) = \max_{\sigma} n_- \tag{5}$$

Гладкий максимум (фиг. 2, а) достигается вещественной частью пары комплексно-сопряженных корней. В противном случае ($r = -n$, $\text{Im } r = 0$), непосредственно дифференцируя (2) по σ при условии $\partial n / \partial \sigma = 0$, приходим к противоречию: $(1+\theta)n^2 + 1 = 0$; поэтому будем исходить из уравнения

$$f(n) = 2n[2n - z(1+\theta)]\xi^2 + z^2(1+\theta)\xi - z^2 - \sigma[4n - z(1+\theta)]^2 = 0 \tag{6}$$

полученного из (2) после подстановки $r = -n + iv$ и исключения v . В уравнении (6) введено обозначение

$$\xi = 1 + \sigma(1+\theta) - 2zn(1+\theta) + 4n^2 \tag{7}$$

Теперь, непосредственно дифференцируя (6) по σ , при $\partial n / \partial \sigma = 0$ получим $\xi = 2/(1+\theta)$. Подставляя это значение в (6) и (7), найдем условие гладкого максимума

$$\sigma = \frac{1}{(1+\theta)^2} \left[\frac{c_2(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \right]^{1/2} = \gamma \frac{c_1}{m_1 + m_2} \tag{8}$$

и отвечающие ему значения коэффициентов демпфирования (5)

$$n_{1,2} = \frac{1+\theta}{4} \left\{ z \pm \left[z^2 - \frac{4\theta}{(1+\theta)^3} \right]^{1/2} \right\} \tag{9}$$

Показательно, что равенство (8) совпадает с условием оптимального гашения вынужденных колебаний массы m_i , полученным в [2]. Отметим также, что это равенство означает, по существу, совпадение частот собственных ($h = z = 0$) колебаний системы, с одной стороны, при $c_1 = 0$, а с другой стороны, при $c_2 = \infty$.

Одновременно с (6) приходим к выражению для квадрата мнимой части характеристического показателя

$$v^2 = (2\xi n - z)[4n - z(1+\theta)]^{-1} - n^2 \tag{10}$$

Вдоль оптимальной кривой (8) вместо (10) получим

$$v_{1,2}^2 = (1+\theta)^{-1} - n_{1,2}^2 \quad (11)$$

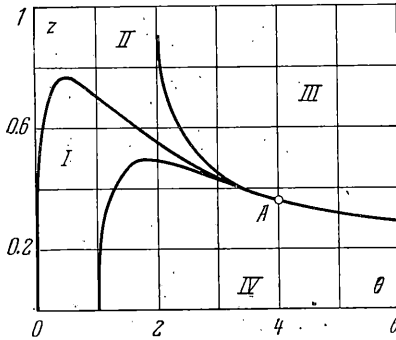
где $n_{1,2}$ вычисляется согласно (9).

Обе величины (9) вещественны и положительны, если

$$z \geq f_1(\theta), \quad f_1 = 2\sqrt{\theta}/(1+\theta)^{3/2} \quad (12)$$

Величина v_1 , отвечающая меньшему корню (9) n_1 , при $\theta < 4$ вещественна всегда, а при $\theta > 4$ — только если выполняется неравенство

$$z > f_2(\theta), \quad f_2 = (4+\theta)/2(1+\theta)^{3/2} \quad (13)$$



Фиг. 3

С другой стороны, величина v_2 , соответствующая корню n_2 , вещественна, только если $\theta < 4$ и $f_1 < z < f_2$. Если эти неравенства одновременно не выполняются, то вдоль кривой (8) существуют два вещественных отрицательных характеристических показателя

$$r = -n_2 \pm [n_2^2 - (1+\theta)^{-1}]^{1/2} \quad (14)$$

Поэтому для оптимальности меньшего корня n_1 требуется, чтобы выполнялось неравенство

$$n_2 - [n_2^2 - (1+\theta)^{-1}]^{1/2} > n_1 \quad (15)$$

Это неравенство при $\theta < 2$ выполняется всегда, а при $\theta > 2$ из него получим

$$z < f_3(\theta), \quad f_3 = (3\theta - 4) [2(\theta - 2)(1+\theta)^3]^{-1/2} \quad (16)$$

Существенно, что $f_2 > f_3$ при $\theta > 4$, $f_2 < f_3$ при $2 < \theta < 4$. Поэтому при $\theta > 4$ гладкого экстремума не существует.

Итак, максимальный коэффициент демпфирования, равный

$$n_\sigma = 1/4(1+\theta) \{z - [z^2 - 4\theta(1+\theta)^{-3}]^{1/2}\} \quad (17)$$

существует вдоль оптимальной кривой (8), если (см. фиг. 3, область 2)

$$f_1 \leq z < \infty, \quad 0 < \theta \leq 2; \quad f_1 \leq z \leq f_3, \quad 2 \leq \theta < 4 \quad (18)$$

Максимальное по z значение достигается в рассматриваемой области при $z = f_1$ и равно

$$n_* = 1/2\sqrt{\theta}(1+\theta)^{-3/2} \quad (19)$$

Если $z = f_1$ и $0 < \theta < 4$, то две пары комплексно-сопряженных показателей имеют одинаковую вещественную часть $-n_*$. Поэтому при $z < f_1$ ($0 < \theta < 4$) вдоль отличающейся от (8) оптимальной кривой существуют четыре комплексных характеристических показателя. При этом неаналитический максимум коэффициента демпфирования (фиг. 2, б) обеспечивается равенством вещественных частей этих показателей, которые в силу (2) равны

$$n_\sigma = 1/4z(1+\theta) \quad (20)$$

Подстановка формулы (20) в (7) и (6) приводит к прежнему выражению $\zeta = 2/(1+\theta)$ и новому условию оптимальности

$$\sigma = (1-\theta)(1+\theta)^{-2} + 1/4z^2(1+\theta) \quad (21)$$

Формула (10) в рассматриваемом случае содержит неопределенность типа 0/0. Раскрытие этой неопределенности приводит к двум существенно различным значениям

$$v^2 = (1+\theta)^{-1} - 1/16z^2(1+\theta)^2 \pm [(1+\theta)(f_1^2 - z^2)]^{1/2} \quad (22)$$

Из условия $v^2 > 0$ вещественности наименьшей из величин (22) получаем неравенство

$$z > 0 \quad \text{при} \quad 0 < \theta \leq 1 \quad (23)$$

$$z > f_4(\theta), \quad f_4 = 4(\sqrt{\theta} - 1)^{1/2}(1+\theta)^{-1/2} \quad \text{при} \quad 1 \leq \theta < 4$$

Следовательно, внутри области 1 (фиг. 3), определяемой неравенствами $z < f_1$ и (23), условие оптимальности имеет вид (21), а максимальный коэффициент демпфирования определен равенством (20). Отметим также, что и в этой области максимальный при фиксированном θ по σ и z (по c_2 и h) коэффициент демпфирования n_* достигается на границе $z = f_1$, отвечает условию оптимальности (8) и равен значению (19).

На кривой $z = f_3$ при условии (8) вещественная часть пары комплексных показателей совпадает с наименьшим по модулю вещественным показателем. Поэтому в области 3 ($z > f_3$) неаналитический экстремум (фиг. 2, б) по σ характеризуется так: $r_{1,2} = -n_\sigma \pm iv$, $r_3 = -n_\sigma$, $r_4 = -n_1 < -n_\sigma$. Уравнения для определения оптимальных значений $n_\sigma(z, \theta)$, $\sigma(z, \theta)$, и v получаются из (2) и имеют вид

$$p|_{-n_\sigma} = 0, \quad p'(-n_\sigma) = 1/6 p'''(-n_\sigma)v^2, \quad p''(-n_\sigma) = 1/12 p'v(-n_\sigma)v^2 \quad (24)$$

где штрихами обозначено дифференцирование полинома $p(r)$ по r .

С другой стороны, на кривой $z = f_4$ одна из пар критических характеристических показателей сливается в двукратный вещественный показатель. Поэтому в области 4 ($z < f_4$) искомому оптимуму отвечает двукратный вещественный показатель. Максимальный коэффициент демпфирования n_σ и оптимальное значение σ определяются из системы

$$p(-n_\sigma) = p'(-n_\sigma) = 0 \quad (25)$$

Область 3 снизу ограничивается неравенством $z > f_5(\theta)$, причем нижняя граница $z = f_5$, а также соответствующие значения $n_\sigma = n_*(\theta)$ и $\sigma(\theta)$ характеризуются тем, что величина v в уравнениях (24) обращается в нуль и появляется трехкратный вещественный корень

$$p(-n_*) = p'(-n_*) = p''(-n_*) = 0 \quad (26)$$

Непосредственный анализ (26) дает

$$(1+\theta)^2 n_*^6 + 3(1+\theta)n_*^4 + 3(1-\theta)n_*^2 + 1 = 0$$

$$f_5 = \frac{8n_*^3}{3(1+\theta)n_*^2 - 1}, \quad \sigma = \frac{24n_*^4}{3(1+\theta)n_*^2 - 1} - \frac{1+6n_*^2}{1+\theta} \quad (27)$$

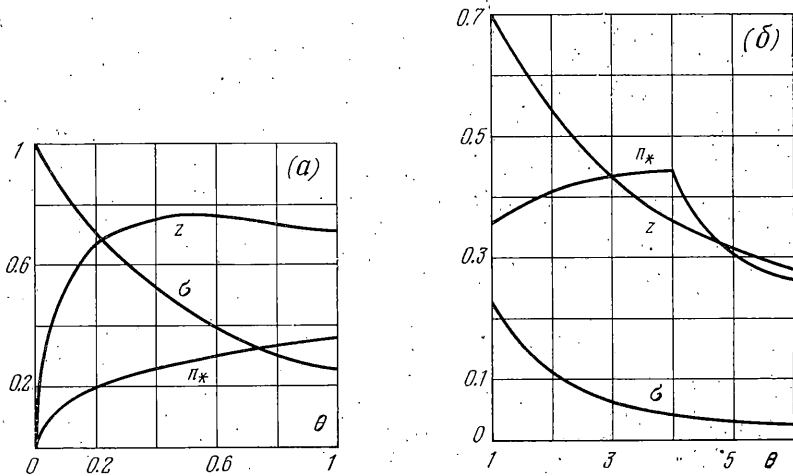
Отсюда, при $\theta \rightarrow \infty$ с точностью до малых высшего порядка получаем

$$n_* = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \left(0.577 + \frac{0.396}{\theta} + \frac{0.685}{\theta^2} + \dots \right), \quad f_5 = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \left(0.650 + \right. \quad (28)$$

$$\left. + \frac{0.180}{\theta} + \frac{0.170}{\theta^2} + \dots \right), \quad \sigma = \frac{1}{\theta} \left(0.125 + \frac{0.083}{\theta} + \frac{0.073}{\theta^2} + \dots \right)$$

Итак, кривая $z = f_5(\theta)$, разделяющая области 3 и 4, исходит из точки слияния границ $z = f_1, f_3, f_4$ ($\theta = 4, z = 4/\sqrt{125}$) и с ростом θ монотонно стремится к оси $z = 0$.

Оптимальное по σ и z значение коэффициента демпфирования $n_*(\theta)$ определяется при $0 < \theta < 4$ по формуле (19), а при $\theta > 4$ — из первого уравнения (27) или по приближенной формуле (28). Величине n_* при $0 < \theta < 4$ отвечают значения σ (8) и $z = f_1$, а при $\theta > 4$ — значения σ и $z = f_2$, определяемые согласно (27) или (28). Графики зависимости оптимальных значений σ и z и коэффициента n_* от θ приведены на фиг. 4, а, б.



Фиг. 4

Определенный интерес представляет формула для определения степени отклонения коэффициента демпфирования от максимального δn при малых отклонениях $\delta \sigma$ и δz соответствующих величин от их оптимальных значений. С этой целью, ограничиваясь наиболее важным диапазоном $0 < \theta < 4$, разложим функцию f (6) в степенной ряд около точки $n = n_*$ (19), $z = f_1$, σ (8). В результате с точностью до величин высшего порядка малости получим

$$16(4-\theta)\delta n^4 - 8[\theta(1+\theta)]^{1/2}\{(2-\theta)\delta z + [\theta(1+\theta)]^{1/2}\delta\sigma\}\delta n^2 - \theta(1+\theta)[(1+\theta)^{1/2}\delta\sigma - \theta^{1/2}\delta z]^2 + \dots = 0 \quad (29)$$

Имеющее физический смысл решение биквадратного уравнения (29) будет следующим:

$$\delta n = -1/2[\theta(1+\theta)]^{1/4}(4-\theta)^{-1/2}\{(2-\theta)\delta z + [\theta(1+\theta)]^{1/2}\delta\sigma + 2[\delta z^2 - \theta^{1/2}(1+\theta)^{1/2}\delta z\delta\sigma + (1+\theta)\delta\sigma^2]^{1/2}\}^{1/2} + \dots \quad (30)$$

Из формулы (30) видно, что при $\theta \rightarrow 4$ погрешность в определении коэффициента демпфирования резко нарастает.

Поступила 10 IV 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Вульфсон М. Н. К вопросу о выборе параметров динамического гасителя колебаний. В кн.: Нелинейные колебания и переходные процессы в машинах. М., «Наука», 1972, стр. 347-354.
2. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М., «Наука», 1967.