

**ПОСТРОЕНИЕ КОНФОРМНО ОТОБРАЖАЮЩИХ ФУНКЦИЙ
ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ
МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ ГРАНИЦ**

Ю. М. МАМЕДОВ, А. Г. УГОДЧИКОВ, Н. М. ХУТОРЯНСКИЙ

(Жданов, Горький)

Одним из эффективных методов решения задач математической теории упругости является метод конформных отображений. Вопросы построения функций, конформно отображающих канонические области (круг или круговое кольцо) на заданные области (односвязные или двухсвязные), рассматривались во многих работах.

Весьма продуктивным оказался итерационно-интерполяционный метод [1-3], позволяющий строить конформно отображающую функцию для произвольной односвязной или двухсвязной области непосредственно в виде полинома или отрезка ряда Лорана. Однако в некоторых случаях (например при наличии резких изломов на контуре) использование этого метода наталкивается на значительные трудности. Вблизи прообразов точек излома иногда нарушается однолиственность построенных отображающих функций, причем увеличение числа точек интерполяции и продолжительности итерационного процесса не всегда дает в этих случаях положительные результаты.

В данной статье предлагается способ, позволяющий улучшить сходимость итерационного процесса при построении конформно отображающих функций для областей сложной конфигурации. Этот способ заключается в последовательной вариации границ областей от выбранной простой конфигурации к заданной (более сложной).

Указанный прием используется для решения задач кручения бруса с поперечным сечением сложной формы.

Ограничимся рассмотрением случая односвязной области. Процесс вариации граничного контура области разбивается на ряд последовательных этапов. Первый этап заключается в переходе от исходного (простого) контура $L^{(0)}$ к первому промежуточному контуру $L^{(1)}$. Второй и последующие этапы заключаются в переходе от n -го промежуточного контура $L^{(n)}$ к $n+1$ -му контуру $L^{(n+1)}$ ($n=1, 2, \dots, N-1$). Последним является заданный граничный контур $L=L^{(N)}$.

На каждом этапе отклонение контура $L^{(n+1)}$ от предыдущего контура $L^{(n)}$ превышает заданной величины, связанной с числом узлов интерполяции и длиной контура.

Алгоритм вычислений на каждом n -м этапе ($n=0, 1, N-1$) строится следующим образом:

1. С помощью итерационного процесса, описанного в [1, 2] (с использованием операции интегрального усреднения), определяются с заданной точностью коэффициенты D_k (коэффициент D_{-1} равен нулю в случае конечной области и отличен от нуля в случае бесконечной области) функции

$$\omega(\xi) = \sum_{k=-1}^m D_k \xi^k$$

осуществляющей приближенное конформное отображение единичного круга на область с границей $L^{(n)}$.

2. По коэффициентам D_k определяются координаты (x_j, y_j) основных точек M_j , соответствующих основным узлам интерполяции [1].

3. Формируется контур $L^{(n+1)}$ посредством вариации контура $L^{(n)}$.

4. Точки M_j принимаются за начальное приближение основных точек для контура $L^{(n+1)}$.

5. Если $n+1 < N$, то номер этапа n увеличивается на единицу и совершается переход к п. 1; если $n+1 = N$, то определяются с заданной точностью коэффициенты для контура $L^{(N)}$, и начинается процесс уменьшения числа членов интерполяционного полинома для нахождения оптимального полинома, по которому достигается требуемая точность определения конформно отображающей функции [2].

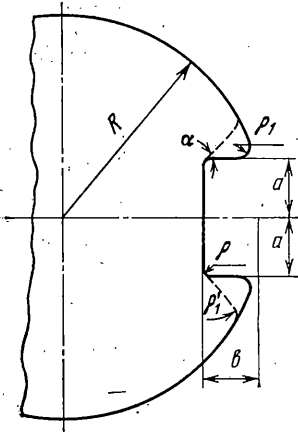
В качестве примера рассмотрим построение функции, конформно отображающей внешность единичного круга на внешность заданной кривой сложной конфигурации, изображенной сплошной линией на фиг. 1. Отметим, что численные эксперименты, проведенные для рассматриваемой бесконечной области, показали, что немодифицированный итерационный процесс [1-3] иногда приводит (при малых

значениях радиуса (ρ_1) к нарушению однолиственности строящейся отображающей функции.

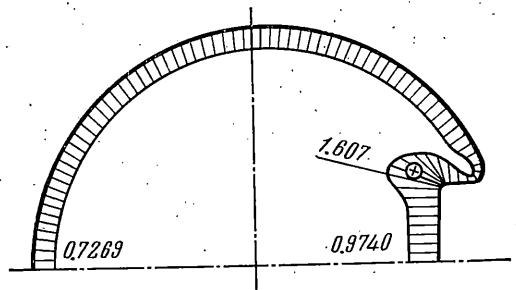
Используемый для вариации исходный контур образован частью заданного контура и пунктирной линией (см. фиг. 1). Вариация границ осуществлялась путем уменьшения α и ρ_1 . Для заданной области с размерами $R=1$, $a=0.32$, $b=0.24$, $\alpha=0^\circ$, $\rho_1=0.054$, $\rho=0.02$ были выбраны следующие размеры исходного контура: $\alpha=20^\circ$, $\rho_1'=0.084$. Шаги для α и ρ_1' выбирались соответственно 5° и 0.006 .

Численные значения коэффициентов D_k отображающей функции для указанной области, вычисленные с погрешностью $\epsilon=0.0013$, приведены ниже.

Построенная отображающая функция была использована при решении методом аналитических функций (см. [4, 5]) задачи о кручении вала со шпоночной канав-



Фиг. 1



Фиг. 2

кой. Поперечное сечение этого вала представляет собой область, изображенную на фиг. 1, при размерах, указанных выше.

| k | D_k | k | D_k | k | D_k |
|-----|------------|-----|-------------|-----|---------------|
| -1 | +0.987399 | 8 | -0.0147086 | 17 | -0.00220901 |
| 0 | -0.0248989 | 9 | -0.0130424 | 18 | -0.00135958 |
| 1 | -0.0242122 | 10 | -0.0113977 | 19 | -0.00062519 |
| 2 | -0.0233076 | 11 | -0.00979731 | 20 | -0.0000379269 |
| 3 | -0.0222010 | 12 | -0.00826975 | 21 | +0.000518038 |
| 4 | -0.0209251 | 13 | -0.00682977 | .. | |
| 5 | -0.0195028 | 14 | -0.00549734 | .. | |
| 6 | -0.0179719 | 15 | -0.00427808 | 61 | -0.000065037 |
| 7 | -0.0163610 | 16 | -0.00318292 | 62 | -0.000319387 |

На фиг. 2 представлена эпюра касательных напряжений для единичного крутящего момента, при построении которой применялась процедура интегрального усреднения напряжений по соседним интерполяционным точкам (см. [2]). Получено также следующее значение жесткости при кручении $D/\mu R^4=1.359$.

Поступила 23 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Угодчиков А. Г. Построение конформно отображающих функций при помощи электромоделирования и интерполяционных полиномов Лагранжа. Киев, «Наукова думка», 1966.
2. Угодчиков А. Г., Длугач М. И., Степанов А. Е. Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. М., «Высшая школа», 1970.
3. Фильчаков П. Ф. Приближенные методы конформных отображений. Киев, «Наукова думка», 1964.
4. Арутюнян Н. Х., Абрамян В. Л. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
5. Шерман Д. И. Об одной задаче теории упругости. Докл. АН СССР, 1940, т. 27, № 9.