

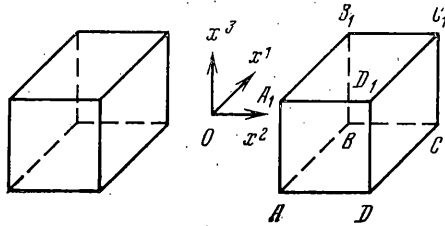
**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В УПРУГОМ ПРОСТРАНСТВЕ,
ОСЛАБЛЕННОМ ДВУМЯ КУБИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ**

Е. М. ШАФАРЕНКО

(Москва)

Рассматривается решение второй основной задачи математической теории упругости в случае задания на граничной поверхности полости S нормального давления p .

Введем декартовую систему координат x^1, x^2, x^3 с центром в некоторой точке O пространства и совпадающую с ней систему y^1, y^2, y^3 . Центры кубических полостей имеют координаты $0, b, 0$ и $0, -b, 0$. Сторона куба a (см. фиг. 1).



Фиг. 1

Следуя [1], задача сводится к решению сингулярного интегрального уравнения, получаемого посредством представления смещения в виде потенциала простого слоя

$$\varphi(y) - \lambda_1 \int_S K(y-x) \varphi(x) d_x S = f(y), \quad K(y-x) = \|K_{kj}(y-x)\| \quad (k, j=1, 2, 3) \quad (1)$$

$$K_{kj}(y-x) = \frac{1}{2\pi|y-x|^3} \left\{ \left[\delta_{kj} + \frac{3(\lambda+\mu)}{\mu} \frac{(x^k-y^k)(x^j-y^j)}{|y-x|} \right] \times \right. \\ \left. \times \sum_{l=1}^3 (x^l-y^l)n^l(y) + n^j(y)(x^k-y^k) - n^k(y)(x^j-y^j) \right\} \frac{\mu}{\lambda+2\mu}$$

Здесь $\varphi\{f^1, f^2, f^3\}$ — искомый вектор, $f\{f^1, f^2, f^3\}$ — заданный на S вектор напряжения, n^1, n^2, n^3 — компоненты единичного вектора, направленного по внешней нормали к S . Для рассматриваемой задачи $\lambda_1=1$.

В [2] доказано, что решение сингулярного интегрального уравнения (1) может быть получено методом последовательных приближений

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_1^n \varphi_n(y), \quad \varphi_0(y) = f(y), \quad \varphi_n(y) = \int_S K(y-x) \varphi_{n-1}(x) d_x S \quad (2)$$

Для вычисления сингулярных интегралов (2) в [3] введено тождество

$$\int_S K(y-x) \varphi(x) d_x S = -\varphi(y) + \int_S [K(y-x) \varphi(x) - K^*(y-x) \varphi(y)] d_x S$$

т. е. вместо (2) имеем

$$\varphi_n(y) = -\varphi_{n-1}(y) + \int_S [K(y-x) \varphi_{n-1}(x) - K^*(y-x) \varphi_{n-1}(y)] d_x S \quad (3)$$

где $K^*(y-x)$ и $K(y-x)$ — союзные матрицы.

Интеграл в соотношении (3) находим численным методом. Согласно алгоритму решения задач [4], для тел, ограниченных кусочно-гладкими поверхностями, разбиваем поверхность S на малые области S_i ($i=1, 2, \dots, m$), площадь которых — ΔS_i . Определяем центры этих областей в системе координат x^1, x^2, x^3 , а вершины — в

x^1/a	x^2/a	x^3/a	$n=0$	1	2	3	4	5
---------	---------	---------	-------	---	---	---	---	---

одна полость (начало координат в центре полости)

0.5	0.1	0.1	1 (0)	0.382 (-0.053)	0.158 (-0.027)	0.078 (-0.01)	0.033 (-0.005)	0.015 (-0.002)
0.5	0.4	0.4	1 (0)	0.347 (-0.25)	0.345 (0.01)	0.088 (-0.02)	0.05 (-0.003)	0.018 (-0.003)

две полости ($b/a=2$)

0.1	1.5	0.1	0 (-1)	-0.053 (-0.377)	-0.027 (-0.157)	-0.01 (-0.077)	-0.005 (-0.032)	-0.002 (-0.015)
0.4	1.5	0.4	0 (-1)	-0.248 (-0.343)	0.01 (-0.342)	-0.02 (-0.087)	-0.003 (-0.048)	-0.002 (-0.017)

две полости ($b/a=0.75$)

0.1	0.25	0.1	0 (-1)	-0.035 (-0.24)	-0.015 (-0.085)	-0.033 (-0.048)	-0.033 (-0.013)	0 (-0.01)
0.4	0.25	0.4	0 (-1)	-0.192 (-0.265)	0.003 (-0.302)	0.003 (-0.04)	0.005 (-0.038)	0.007 (0.007)

системе y^1, y^2, y^3 . Тогда

$$\varphi_n(y) = -\varphi_{n-1}(y) + \sum_{i=1}^m c_i \quad (4)$$

$$c_i = [K(y-x_i)\varphi_{n-1}(x_i) - K^*(y-x_i)\varphi_{n-1}(y)]\Delta S_i \quad (5)$$

Рекуррентное соотношение (4) позволяет определить значение плотностей в вершинах малых областей. Плотности в центрах определяются как среднее значение плотностей в вершинах.

Запишем (5) в виде

$$c_i^k = \frac{\mu}{2\pi(\lambda+2\mu)|y-x_i|^3} (a_1\varphi_{n-1}^k(x_i) + a_2\varphi_{n-1}^k(y) - a_3n^k(y) + a_4n^k(x_i) + a_5(x_i^k - y^k))\Delta S_i \quad (6)$$

($k=1,2,3$)

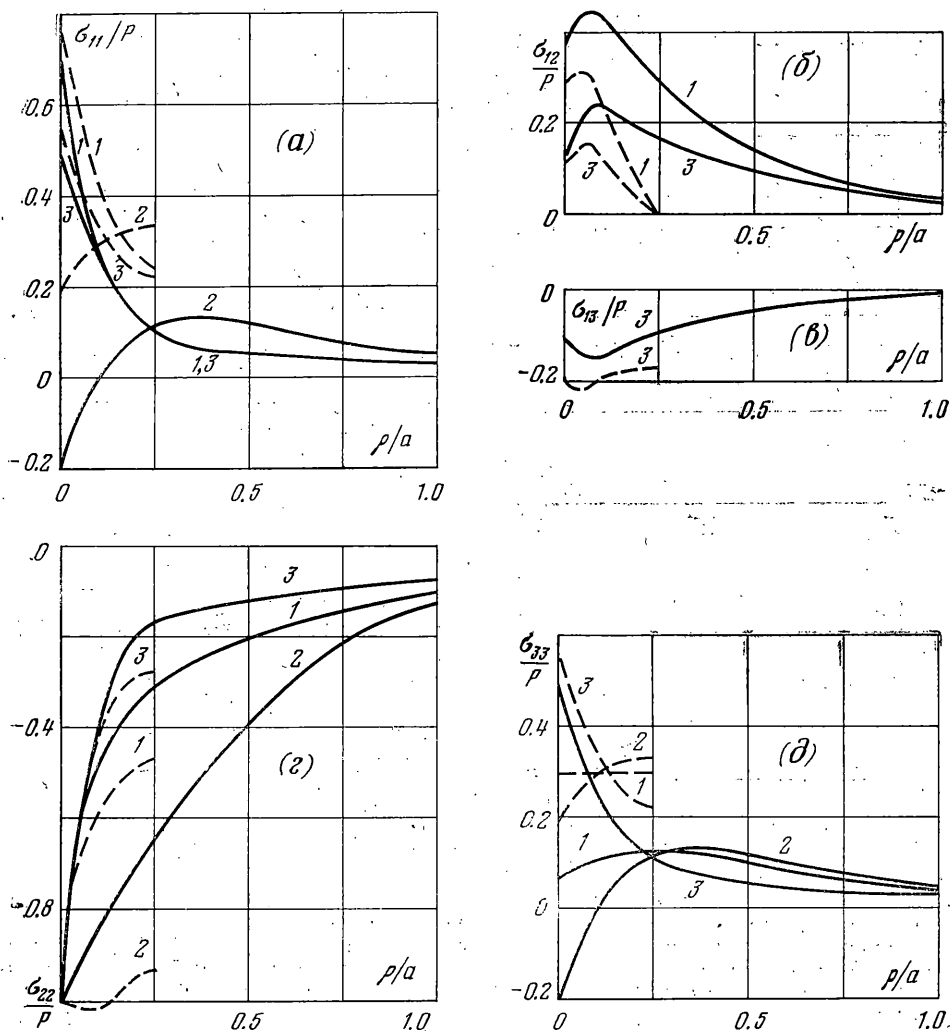
$$a_1 = \sum_{l=1}^3 n^l(y)(x_i^l - y^l), \quad a_2 = \sum_{l=1}^3 n^l(x_i)(x_i^l - y^l), \quad a_3 = \sum_{l=1}^3 (x_i^l - y^l)\varphi_{n-1}^l(x_i),$$

$$a_4 = \sum_{l=1}^3 (x_i^l - y^l)\varphi_{n-1}^l(y)$$

$$a_5 = \frac{3(\lambda+\mu)}{\mu|y-x_i|} (a_1a_3 + a_2a_4) + \sum_{l=1}^3 (n^l(y)\varphi_{n-1}^l(x_i) - n^l(x_i)\varphi_{n-1}^l(y))$$

Использование выражения (6) при решении интегральных уравнений на ЭЦВМ сокращает в два раза время счета.

На ЭЦВМ Минск-32 выполнены расчеты для двух значений b ($2a$ и $0.75a$ соответственно) и коэффициента Пуассона $\nu=0.25$. Каждое ребро кубической полости разбивалось на N неравномерных участков. Для получения решения достаточно



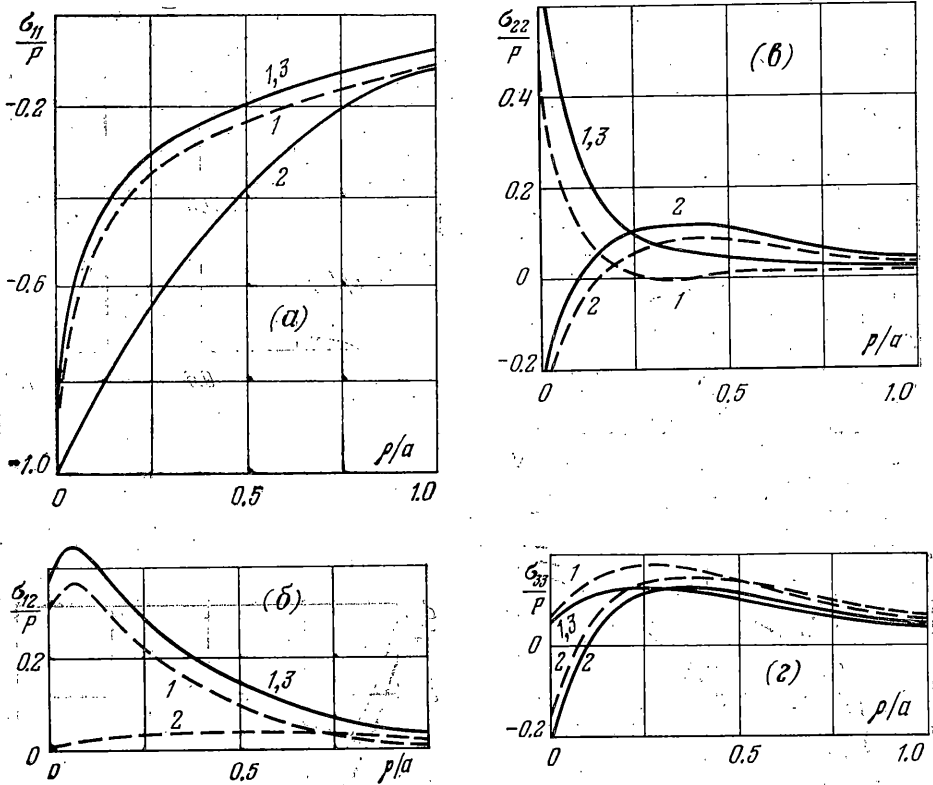
Фиг. 2

выполнить семь итераций. Расчеты выполнялись для $N=6, 8, 10$. При размерах участков разбиения $0.05a, 0.1a, 0.15a, 0.2a, 0.2a, 0.15a, 0.1a, 0.05a$ ($N=8$) граничные условия выполняются с точностью 0.017% . Время вычисления одного приближения 10 мин.

В таблице приведены значения $\varphi_n^1(y)/\rho$ ($n=1-5$); в скобках стоят значения $\varphi_n^2(y)/\rho$. При $b=2a$ решение для пространства с двумя полостями с точностью 0.54% совпадает с аналогичным решением для пространства с одной полостью, т. е. при таком расстоянии практически отсутствует взаимное влияние полостей.

В точках, не принадлежащих поверхности S , по уравнению (1) определялись напряжения. Более мелкое разбиение поверхности вводилось в окрестности точек, для которых $\Delta S_{ij}/|y-x_i|^3 > 1$.

На фиг. 2 и 3 приведены графики распределения компонент тензора напряжений вдоль нормалей к граням кубических полостей (ρ — расстояние до грани). Сплошные линии характеризуют напряженное состояние при $b=2a$, пунктирные — при $b=0.75a$. На фиг. 2 кривые 1 построены вдоль нормали к грани ABB_1A_1 , проходящей через точку $(0.4a, 0, 0)$. Кривые 2 и 3 построены вдоль нормалей, проходящих соответственно через начало координат и точку $(0.4a, 0, 0.4a)$. На фиг. 3 те же номера кривых соответствуют случаям прохождения нормали к грани BB_1C_1C через точки $(0, b-0.4a, 0)$, $(0, b, 0)$ и $(0, b+0.4a, 0)$, т. е. сравнение напряжений производится в точках пространства, для которых $x^2-b=\text{const}$. С ростом величины x^2-b разность между одноименными компонентами тензора напряжений, опреде-



Фиг. 3

ленными при различных значениях b , уменьшается. На фиг. 3 сплошные и пунктирные линии строятся только для случаев существенного различия между величинами напряжений. Для точек с координатами x^2 в пределах $(-b+a/2, b-a/2)$ сближение полостей приводит к значительному изменению напряжений. При этом изменяется характер распределения компоненты σ_{11} . Если при $b=2a$ вблизи грани полости ($0 < \rho < 0.1a$) появляются сжимающие напряжения, то при $b=0.75a$ знак напряжения σ_{11} постоянен (растяжение).

Для проверки точности решения рассматривался случай $\lambda_1 = -1$, т. е. решалась задача о напряженном состоянии куба под действием гидростатической нагрузки. Из (2) следует, что $\Phi_n^+(y) = \Phi_n^-(y)$, $\Phi^+(y) \neq \Phi^-(y)$, где $\Phi_n^-(y)$, $\Phi^-(y)$ соответствуют $\lambda_1 = -1$, а $\Phi_n^+(y)$, $\Phi^+(y) - \lambda_1 = 1$. Определенные при $\lambda_1 = 1$ значения $\Phi_n(y)$ используются для вычисления $\Phi^-(y)$. При этом точность определения напряжений в кубе составляет 1%.

Поступило 20 I 1978:

ЛИТЕРАТУРА

1. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963.
2. Pham The Lai. Potentiels elastiques, tenseurs de Green et de Neumann. J. Мéc., 1967, vol. 6, No. 2.
3. Перлин П. И. Применение регулярного представления сингулярных интегралов к решению второй основной задачи теории упругости. ПММ, 1976, т. 40, вып. 2.
4. Андрианов Н. Ф., Перлин П. И. Решение второй основной задачи теории упругости для тел, ограниченных кусочно-гладкими поверхностями. В сб.: Прикладные проблемы прочности и пластичности, вып. 4. Горький, Изд-во Горьковск. ун-та, 1976.