

О КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ
ТЯЖЕЛОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

В. А. САМСОНОВ

(Москва)

Ряд механических объектов содержит в качестве основного элемента осесимметричное твердое тело. При определенных условиях эти объекты могут среди своих движений иметь многообразие стационарных движений, в которых тело совершает регулярную прецессию. Диссипативные факторы, присутствующие в реальных объектах, по характеру действия можно условно разделить на два типа. Факторы, относящиеся к первому типу, вызывают выход траекторий в окрестность многообразия стационарных движений. Факторы второго типа приводят к движению изображающей точки вдоль многообразия стационарных движений — так называемым квазистационарным движениям [1]. Проведение качественного анализа последних существенно облегчается специальным выбором «медленных» переменных. В то же время такой анализ позволяет выявить ряд «грубых» свойств движения, определяемых факторами второго типа. Многообразие стационарных движений тяжелого гироскопа в кардановом подвесе построено в [2]. Там же получены условия их устойчивости. В [3] проведен подробный анализ этих условий и изучены свойства некоторых движений, близких к стационарным. Анализ в [2, 3] проводился без учета диссипативных факторов. Ниже проводится исследование квазистационарных движений осесимметричного тела в кардановом подвесе, вызываемых некоторыми диссипативными силами. Частный случай быстрого вращения исследовался в [4].

1. Предположим, что тяжелое осесимметричное тело закреплено в совершенном кардановом подвесе с вертикальной осью внешнего кольца подвеса и с горизонтальной осью внутреннего.

Положение системы определим углами Эйлера: ψ — угол поворота внешнего кольца, угол прецессии; θ — угол поворота внутреннего кольца относительно внешнего (угол между осью симметрии тела и вертикалью), угол нутации; φ — угол поворота тела относительно внутреннего кольца подвеса (вокруг оси симметрии), угол собственного вращения. Будем считать, что при $\theta=0$ ось симметрии тела вертикальна и его центр тяжести G расположен выше неподвижной точки O . Обозначим через $A=B, C$ главные моменты инерции тела для точки O , P — вес тела, a — расстояние GO , A_1, B_1, C_1 — моменты инерции внутреннего кольца, A_2 — момент инерции внешнего кольца.

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$2T = (A+B_1)\dot{\theta}^2 + (A+B_1)\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + C_1\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + A_2\dot{\psi}^2 + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2$$

Потенциальная энергия силы тяжести — $\Pi = aP \cos \theta$. Введем обобщенные импульсы

$$u = \partial T / \partial \dot{\varphi} = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta), \quad v = \partial T / \partial \dot{\psi} = (A+B_1)\dot{\psi} \sin^2 \theta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta + C_1\dot{\varphi} \cos^2 \theta + A_2\dot{\psi}$$

Предположим, что на тело и кольца подвеса, кроме силы тяжести, действуют некоторые дополнительные силы, приводящиеся к обобщенным $M_\varphi(\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \theta)$, $M_\psi(\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \theta)$, $M_\theta(\dot{\varphi})$. Обобщенную силу M_θ — момент сил,

действующих в подшипниках оси качания внутреннего кольца подвеса, будем считать диссипативной.

Запишем уравнения движения в следующем виде (форме уравнений Рауса [5]):

$$\begin{aligned} u^{\cdot} &= M_{\varphi}, \quad v^{\cdot} = M_{\psi}, \quad (A+A_1)\ddot{\vartheta} + F(\vartheta, u, v) = M_{\vartheta} \\ F(\vartheta, u, v) &= -aP \sin \vartheta + (v-u \cos \vartheta) [u(A+B_1+A_2) - \\ &- v \cos \vartheta (A+B_1-C_1)] / [(A+B_1) \sin^2 \vartheta + C_1 \cos^2 \vartheta + A_2]^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Наряду с системой (1.1) рассмотрим систему

$$u^{\cdot} = 0, \quad v^{\cdot} = 0, \quad (A+A_1)\ddot{\vartheta} + F = M_{\vartheta} \quad (1.2)$$

Система (1.2) имеет семейство частных решений

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const}, \quad F(\vartheta, u, v) = 0 \quad (1.3)$$

описывающее стационарные движения гироскопа в кардановом подвесе [2, 3] в случае $M_{\varphi} = M_{\psi} = 0$.

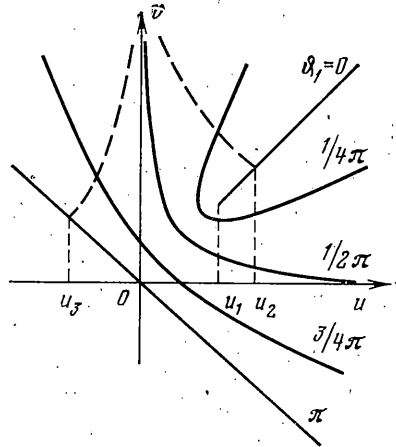
При широких предположениях о структуре функций $M_{\varphi}(\varphi^{\cdot}, \psi^{\cdot}, \vartheta)$, $M_{\psi}(\varphi^{\cdot}, \psi^{\cdot}, \vartheta)$ справедливо следующее утверждение [6].

Если M_{φ} , M_{ψ} достаточно малы, то среди решений системы (1.1) существует семейство решений, на которых $\vartheta(t) \approx \vartheta_1(u(t), v(t))$, где $\vartheta_1(u, v)$ — решение третьего из уравнений (1.3), соответствующее ветви асимптотически устойчивых стационарных движений.

Уравнения (1.1) на указанном семействе решений можно записать в приближенном виде

$$\begin{aligned} u^{\cdot} &= M_{\varphi}(\varphi^{\cdot}(u, v), \psi^{\cdot}(u, v), \vartheta_1(u, v)), \\ v^{\cdot} &= M_{\psi}(\varphi^{\cdot}(u, v), \psi^{\cdot}(u, v), \vartheta_1(u, v)). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Таким образом, квазистационарные движения представляют собой почти регулярную прецессию системы, в которой значение угла нутации ϑ определяется текущими значениями медленно меняющихся параметров u, v .



Фиг. 1

2. Рассмотрим вначале случай невесомых рамок ($A_1 = B_1 = C_1 = A_2 = 0$).

На фиг. 1 отражена некоторая информация о семействе стационарных движений. На плоскости u, v изображены линии уровня функции $\vartheta_1(u, v)$. Фиг. 1 и все последующие обладают центральной симметрией, поэтому построение совершенно лишь в полуплоскости $u+v > 0$. Квадрант $u+v > 0, v-u > 0$ примыкает к режимам так называемой «быстрой» прецессии тела, для которой угловая скорость прецессии ψ^{\cdot} относительно велика, а квадрант $u+v > 0, u-v > 0$ — к «медленной», с относительно малой угловой скоростью ψ^{\cdot} .

Прямая $u = -v$ отвечает вращению тела вокруг вертикальной оси симметрии с нижним расположением его центра тяжести ($\vartheta_1 = \pi$), полупрямая $u = v, u > u_1$ ($u_1^2 = 4aAP$) — устойчивому вращению вокруг вертикальной оси симметрии с верхним расположением центра тяжести ($\vartheta_1 = 0$). Пунктирные линии на фиг. 1 соответствуют таким перманентным вращениям тела вокруг вертикали, для которых $\sin \vartheta_1 \neq 0$.

При $C > A$ ветвление перманентных вращений происходит в точке

$$u = v = u_2 = C[aP/(C-A)]^{1/2} \quad (u_2 > u_1)$$

При $C < A$ ветвление происходит в точке

$$u = -v = u_3 = -C[aP/(A-C)]^{1/2}$$

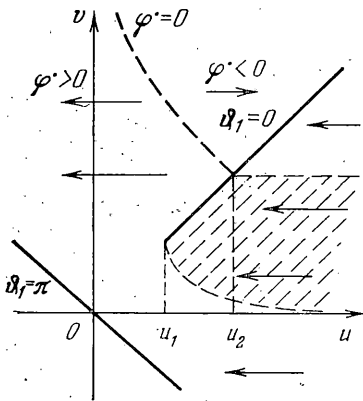
Траектории системы уравнений (1.4) можно нанести на фиг. 1 и проследить за изменением угла ϑ во время квазистационарного движения. Правда, в некоторой окрестности линий $\vartheta_1 = \pi$, $\vartheta_1 = 0$ эти траектории могут нуждаться в уточнении, так как в этой области уравнения (1.4) могут быть некорректными.

Рассмотрим малые силы M_φ и M_ψ , порождаемые различными факторами, и исследуем вызываемые ими тенденции движения гироскопа.

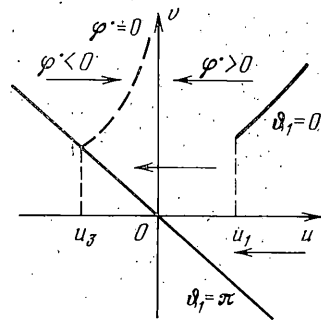
Пример 2.1. Пусть $M_\psi = 0$, а сила M_φ вызвана трением между внутренней рамкой и осью вращения тела. Тогда $\dot{\varphi} \cdot M_\varphi < 0$ при $\dot{\varphi} \neq 0$.

Имеем $v = \text{const}$, а изменение параметра u протекает в сторону, определяемую знаком M_φ (фиг. 2, 3).

При $C > A$ (фиг. 2) в области $v < u_2$ угол ϑ в конечном счете увеличивается до π , т. е. центр тяжести тела опускается, хотя в заштрихованной



Фиг. 2



Фиг. 3

области происходит уменьшение угла ϑ на начальном этапе движения.

Если $v > u_2$, то на всех движениях, начинающихся правее пунктирной линии (перманентные вращения), угол ϑ уменьшается, а центр тяжести поднимается. Хотя сила M_φ направлена в сторону уменьшения величины угловой скорости $\dot{\varphi}$, ее действие может привести к противоположному эффекту (фиг. 2, окрестность линии $\dot{\varphi} = 0$). В оставшейся части области происходит увеличение угла ϑ .

В случае $C < A$ при $v > -u_3$ (фиг. 3) движение выходит в окрестность режима перманентного вращения тела вокруг вертикали ($\sin \vartheta_1 \neq 0$).

Пример 2.2. Допустим, что между моментами сил трения в осях кардановых колец M_φ и M_ψ выполняется соотношение $|M_\varphi|/|M_\psi| = b = \text{const}$, если $\dot{\varphi} \neq 0$, $\dot{\psi} \neq 0$. Условия движения подобного типа создавались в специальных экспериментах [4].

Почти все траектории системы уравнений (1.4) — прямые (фиг. 4, 5). Отметим, что часть траекторий выходит на линию нетривиальных перманентных вращений, которая, в свою очередь, является особой траекторией уравнений (1.4).

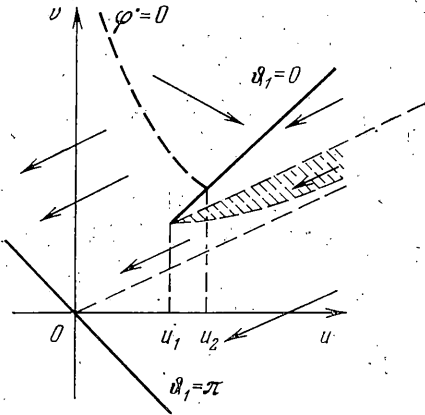
Изменение угла нутации ϑ при квазистационарных движениях в области медленных прецессий (при $b < 1$) происходит таким образом, как оно описано в [4], кроме заштрихованных на фиг. 4, 5 областей, где уменьшение угла ϑ в процессе движения происходит не до нуля, а до некоторого $\vartheta_{\min} > 0$, после чего начинается его увеличение.

Предлагаемое исследование дополняет результаты, полученные для случая $u \gg u_1$, $u > |v|$ в [4].

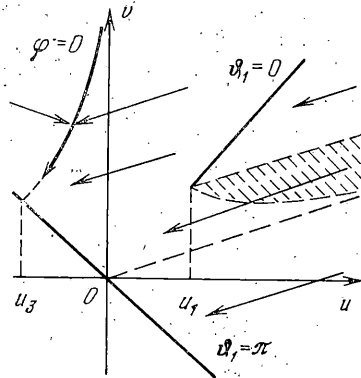
Пример 2.3. Допустим, что на внутреннем кольце подвеса установлен невесомый привод, развивающий момент M . Так как усилия привода — внутренние по отношению к системе тело — подвес, то по-прежнему $v = \text{const}$, а $u' = M$. Траектории в этом случае — также горизонтальные прямые, как и на фиг. 2, 3, но направление движения по ним определяется знаком момента M .

Пример 2.4. Допустим, что к телу приложены внешние силы, приводящиеся к паре с моментом M' , направленным вдоль оси симметрии тела. Тогда $M_\psi = M'$, $M_\phi = M' \cos \phi$.

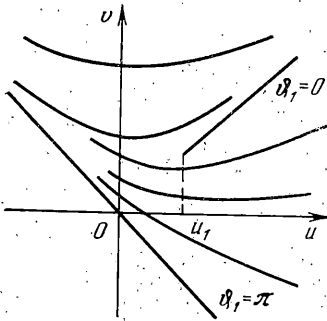
Система уравнений (1.4) в этом случае приводится к одному уравнению $dv/du = \cos \phi_1$, траектории которого схематично изображены на фиг. 6.



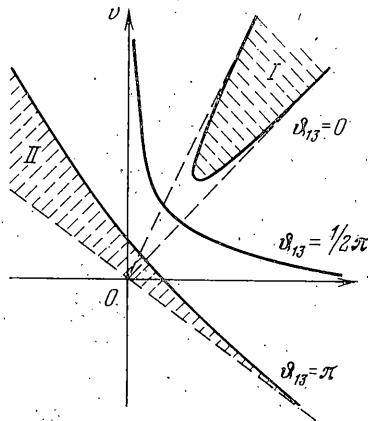
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



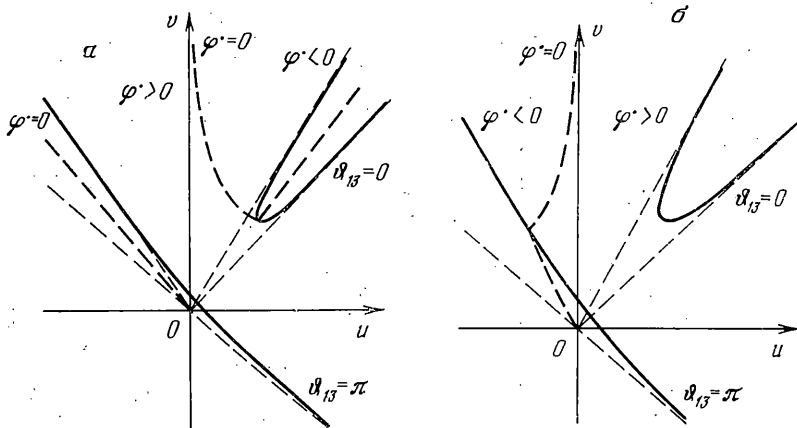
Фиг. 7

Направление движения по ним определяется знаком M' . В области $u > u_1$, $|v| < u$ (область медленных прецессий) траектории мало отличаются от линий $\phi_1 = \text{const}$, т. е. в этой области практически не происходит изменения угла нутации при движении, хотя параметры u, v претерпевают значительные изменения. В другой части полуплоскости вдоль траектории происходит заметное изменение угла ϕ , иногда почти на всем интервале от 0 до π .

Обычно компоненты момента взаимодействия вращающегося тела с воздухом принимаются пропорциональными компонентам угловой ско-

рости тела. Если тело снабжено меридиональными лопатками, то осевая компонента пропорциональна u и существенно больше других. В этом случае траектории квазистационарного торможения вращающегося тела практически не отличаются от линий, изображенных на фиг. 6, до окрестности линии $u=0$, где начинает сказываться влияние других компонент момента.

После того, как выявлено влияние перечисленных сил на характер квазистационарных движений тела, можно эффективно распределять



Фиг. 8

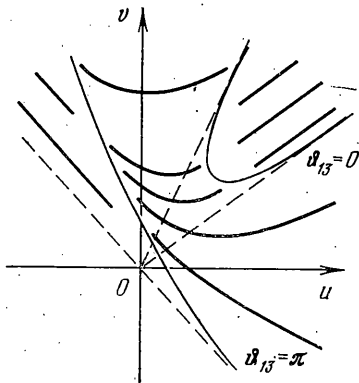
управляющие воздействия приводов таким образом, чтобы вывести объект в окрестность вращений $\vartheta=0$ или $\vartheta=\pi$, один из которых в большинстве случаев является рабочим режимом. Так, например, в случае $C>A$ приведение к режиму $\vartheta=\pi$ обеспечено естественной диссипацией и нужно позаботиться лишь о компенсации ее действия на рабочем режиме. Для приведения в режим $\vartheta=0$ нужно преодолеть влияние сил трения в осях вращения тела и внешнего кольца подвеса на соответствующих участках движения.

3. Рассмотрим влияние массы колец подвеса на характер квазистационарных движений.

Отметим прежде всего те изменения, которые вносит подвес в картину стационарных движений [3].

Уравнение (1.2) при любых значениях параметров u, v имеет решения $\vartheta_{11}=0, \vartheta_{12}=\pi$. Кроме того, при некоторых значениях параметров u, v существует третье решение $\vartheta_{13}(u, v)$. На фиг. 7 изображены линии уровня функции $\vartheta_{13}(u, v)$ для случая $C_1 < A+B_1$. Решение $\vartheta_{11}=0$ отвечает устойчивому стационарному движению в том случае, когда параметры u, v находятся в области (I) (внешняя часть гиперболы $\vartheta_{13}=0$). Решение $\vartheta_{12}=\pi$ отвечает устойчивому движению, если параметры u, v находятся в области (II) (внутренняя часть гиперболы $\vartheta_{13}=\pi$).

Вообще говоря, вращение тела и внешнего кольца подвеса в этих случаях происходит с различными угловыми скоростями ($\dot{\varphi} \neq 0$). Линии перманентных вращений системы вокруг вертикали ($\dot{\varphi}=0$) отмечены пунктиром на фиг. 8. Все стационарные движения ϑ_{13} (регулярные прецессии, если $\dot{\varphi} \neq 0$, и перманентные вращения, если $\dot{\varphi}=0$) в рассматриваемом случае ($C_1 < A+B_1$) устойчивы.



Фиг. 9

Как и в случае невесомых колец подвеса, можно составить уравнения квазистационарных движений (1.4), исключив из рассмотрения некоторую окрестность линий $\phi_{13}=0$, $\phi_{13}=\pi$.

Пример 3.1. Диссипативная сила M_ϕ в отсутствие силы M_ψ оказывает такое же влияние на характер квазистационарного движения, что и в примере 2.1. В случае $C+C_1 > A+B_1$ все движения выходят либо на линию $\dot{\phi}=0$ в области (I), либо на линию $\dot{\phi}=0$ в области (II) (сопоставьте фиг. 2 и фиг. 8, а).

Аналогичное соответствие имеет место и в случае $C+C_1 < A+B_1$ (фиг. 3 и фиг. 8, б).

Пример 3.2. Влияние привода, установленного на внутреннем кольце подвеса, такое же, как и в примере 2.3, если привод не нарушает принятого распределения масс ($A+B_1 > C_1$).

Пример 3.3. Внешние силы, приводящиеся к паре с моментом M' , направленным по оси вращения тела, вызывают прецессионные движения того же характера, что и в примере 2.4 (фиг. 9).

Таким образом, предложенный в [1] способ качественного исследования квазистационарных движений механической системы, близкой к системе с циклическими координатами, позволил получить достаточно богатую информацию о свойствах движения. При этом в ряде случаев удалось выявить грубые свойства движения, слабо чувствительные к деталям структуры малых сил M_ϕ , M , M' .

Поступила 22 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Самсонов В. А. О квазистационарных движениях механических систем. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 1.
2. Румянцев В. В. Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
3. Брюно А. Д. О движении гироскопа в кардановом подвесе. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6.
4. Верли Х., Якоб А. Экспериментальные исследования движения быстро вращающегося симметричного гироскопа в кардановом подвесе при наличии трения в подшипниках. В кн.: Проблемы гироскопии. М., «Мир», 1967.
5. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
6. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Лекции по методу интегральных многообразий. Киев, «Наукова думка», 1968.