

МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ БОЛЬШИХ ПРОГИБОВ НЕПОЛОГОЙ КРУГОВОЙ АРКИ

В. И. ШАЛАШИЛИН

(Москва)

В [1] сформулирован метод продолжения по параметру, который сводит решение нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений к задаче Коши по параметру. В [2] этот метод изложен в операторной форме. В [3] в нелинейную краевую задачу специальным образом вводится параметр, и интегрирование задачи Коши по этому параметру используется для организации итерационного процесса решения исходной нелинейной краевой задачи. В [4] — конечные прогибы пластин и оболочек определяются как результат последовательного приложения малых приращений нагрузок так, что на каждом шаге приращения нагрузки решается линейная краевая задача относительно приращений прогиба и функции усилий. Уравнения для вариаций этих величин рассмотрены в [5]. Обобщенная формулировка метода последовательных нагружений и многочисленные примеры обсуждаются в [6].

Ниже излагается модификация метода продолжения, сводящая решение нелинейных краевых задач к задаче Коши по параметру, который не входит явно в уравнения и граничные условия исходной задачи.

1. Нелинейную краевую задачу на отрезке $s[s_1, s_2]$ представим в виде

$$dV/ds = G(V, P), \quad AV(s_1) = b_1, \quad BV(s_2) = b_2 \quad (1.1)$$

Здесь $V = \{V_1, \dots, V_m\}$ — m -мерная вектор-функция, $G(V, P) = \{G_1(V, P), \dots, G_m(V, P)\}$ — нелинейная вектор-функция; A, B — прямоугольные матрицы ранга t и $m-t$; b_1, b_2 — векторы порядка t и $m-t$; P — параметр.

Пусть для некоторого значения параметра P известно решение задачи (1.1): $P = P_0, V = \bar{V}$. Такая постановка характерна для нелинейных краевых задач механики твердого деформируемого тела, в которых параметр P представляет нагрузку, а данное решение соответствует недеформированному состоянию. В этих задачах часто существует область значений P , в которой задача (1.1) имеет несколько решений. Интерес представляет исследование поведения решения именно в этой области (например в области критического поведения деформируемых систем). Неединственность решения вызывает определенные затруднения при выборе параметра нагрузки в качестве параметра продолжения. Эти затруднения можно обойти, приняв в качестве параметра продолжения некоторый параметр λ , который не входит явно в задачу (1.1).

Продифференцируем уравнения (1.1) по параметру λ и обозначим

$$\partial V / \partial \lambda = v, \quad dP / d\lambda = p \quad (1.2)$$

Для вектор-функции v получим линейную краевую задачу

$$dv/ds = I(V, P)v + D(V, P)p, \quad Av(s_1) = Bv(s_2) = 0 \quad (1.3)$$

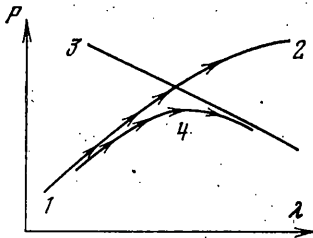
Якобиан I вектор-функции G и вектор-функция D определяются соотношениями

$$I(V, P) = \|\partial G_i(V, P) / \partial V_j\| \quad (i, j=1, \dots, m), \quad D(V, P) = \partial G(V, P) / \partial P \quad (1.4)$$

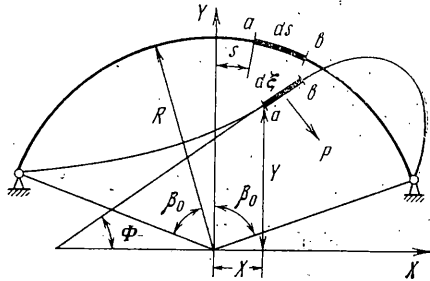
Если параметр λ выбрать так, что его начальному значению λ_0 соответствует $P=P_0$, то обозначения (1.2) можно рассматривать как задачу Коши по параметру λ с соответствующими начальными условиями

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = v, \quad \frac{dP}{d\lambda} = p, \quad V=V_0, \quad P=P_0 \quad \text{при} \quad \lambda=\lambda_0 \quad (1.5)$$

Для интегрирования начальной задачи (1.5) по параметру λ можно использовать известные шаговые методы (Рунге — Кутты, Адамса и другие). Получающиеся на каждом шаге интегрирования линейные краевые задачи вида (1.3) определяют пра-



Фиг. 1



Фиг. 2

вые части первого из уравнений (1.5) и могут быть решены любым удобным методом. При этом встает вопрос об определении величины p , устанавливающей связь между параметром задачи P и параметром продолжения λ . Эта связь определяется как конкретным смыслом параметра λ , так и вторым уравнением (1.5). Причем последнее позволяет определить ее в соответствии с выбранным методом интегрирования начальной задачи (1.5). Такая формулировка позволяет рассматривать метод последовательных нагружений как алгоритм интегрирования задачи Коши (1.5) методом Эйлера, когда параметр продолжения λ совпадает с параметром нагрузки P ($dP/d\lambda=1$). Установление соответствия между параметрами P и λ при другом выборе параметра λ и для иного алгоритма интегрирования начальной задачи (1.5) проиллюстрировано ниже на конкретном примере.

В изложенном методе следует отметить два основных источника погрешности, а именно, погрешность, возникающую при интегрировании задачи Коши (1.5) тем или иным методом, и погрешность интегрирования промежуточных линейных краевых задач вида (1.3).

Погрешность интегрирования задачи Коши обсуждается в [2, 3, 6]. В качестве эффективной меры борьбы с ней рекомендуется после нескольких шагов по λ проводить коррекцию решения методами Ньютона — Рафсона. Необходимость коррекции может быть оценена в процессе счета, например, по невязке задачи (1.1).

Одним из наиболее эффективных методов уменьшения погрешности решения линейных краевых задач вида (1.3) является ортогональная прогонка [7]. Более того, этот метод позволяет по смене знака прогоночного определителя фиксировать точки бифуркации решений системы (1.1), в окрестности которых метод продолжения порождает определенные проблемы. Пусть картина бифуркации имеет вид, показанный на фиг. 1, и решение приближается к точке бифуркации со стороны ветви 1. Ветвь 2 является аналитическим продолжением ветви 1 и при отсутствии погрешностей метод продолжения выведет решение на ветвь 2.

В то же время практически интересной, как правило, является ветвь 3, а не 2. Проблема перехода на ветвь 3 может быть решена движением по возмущенному решению 4. Для этого возмущенное решение должно содержать в качестве одной из компонент собственную функцию, соответствующую ветви 3.

2. Применим описанный метод к задаче о больших прогибах непологой круговой арки (в ее плоскости) с учетом растяжения ее оси. Для элемента ab в деформированном состоянии (фиг. 2) имеют место следующие

очевидные геометрические соотношения, условия равновесия и соответствующие гипотезе плоских сечений физические соотношения

$$\frac{d\xi}{ds} = 1 + \varepsilon, \quad \frac{dX}{d\xi} = \cos \Phi, \quad \frac{dY}{d\xi} = \sin \Phi, \quad \frac{d\Phi}{ds} = K, \quad \frac{dN}{d\xi} = -KQ \quad (2.1)$$

$$\frac{dQ}{d\xi} = KN - P, \quad \frac{dM}{d\xi} = Q, \quad \varepsilon = \frac{N}{EF}, \quad M = EJ \left(K + \frac{1}{R} \right)$$

Здесь ε , K — относительное удлинение и кривизна деформированной оси арки; N , Q , M — продольная и поперечная силы и изгибающий момент; EF , EJ — жесткости арки при растяжении и изгибе; P — распределенная нормальная к оси арки нагрузка. Смысл остальных обозначений следует из фиг. 1.

Введем безразмерные величины $\beta = s/R$, $X^\circ = X/R$, $Y^\circ = Y/R$, $K^\circ = RK$, $N^\circ = NR^2/EJ$, $Q^\circ = QR^2/EJ$, $P^\circ = PR^3/EJ$, $c = J/FR^2$. С использованием этих величин уравнения (2.1) приводятся к виду (градус у безразмерных величин везде ниже опущен)

$$\frac{dX}{d\beta} = (1 + cN) \cos \Phi, \quad \frac{dY}{d\beta} = (1 + cN) \sin \Phi, \quad \frac{d\Phi}{d\beta} = K \quad (2.2)$$

$$\frac{dN}{d\beta} = -(1 + cN)KQ, \quad \frac{dQ}{d\beta} = (1 + cN)(KN - P), \quad \frac{dK}{d\beta} = (1 + cN)Q$$

Шарнирному закреплению концов арки соответствуют граничные условия при $\beta = \pm\beta_0$:

$$X = \pm \sin \beta_0, \quad Y = \cos \beta_0, \quad K = -1 \quad (2.3)$$

Решение краевой задачи (2.2) и (2.3) для недеформированного состояния имеет вид

$$P = 0, \quad X = \sin \beta, \quad Y = \cos \beta, \quad \Phi = -\beta, \quad N = Q = 0, \quad K = -1 \quad (2.4)$$

В качестве параметра λ примем отнесенный к радиусу прогиб средней точки арки, который связан с безразмерной координатой $Y_3(0)$ этой точки соотношением $\lambda = 1 - Y(0)$.

Продифференцируем уравнения (2.2) с граничными условиями (2.3) по λ и обозначим

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = x, \quad \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = y, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \varphi, \quad \frac{\partial N}{\partial \lambda} = n, \quad \frac{\partial Q}{\partial \lambda} = q, \quad \frac{\partial K}{\partial \lambda} = k, \quad \frac{\partial P}{\partial \lambda} = p \quad (2.5)$$

Эти соотношения вместе с условиями (2.4), которым соответствует $\lambda = 0$, и образуют задачу Коши (1.5). Правые части уравнений (1.2) определяются из линейной краевой задачи, которая записана здесь при $p = 1$:

$$\begin{aligned} dx/d\beta &= cn \cos \Phi - \varphi(1 + cN) \sin \Phi \\ dy/d\beta &= cn \sin \Phi + \varphi(1 + cN) \cos \Phi, \quad d\varphi/d\beta = k \\ dN/d\beta &= -cnKQ - (1 + cN)(kQ + Kq) \\ dq/d\beta &= cn(KN - P) + (1 + cN)(kN + Kn - 1) \\ dk/d\beta &= cnQ + (1 + cN)q, \quad x(\pm\beta_0) = y(\pm\beta_0) = k(\pm\beta_0) = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Конкретный вид связи между P и λ определяется соотношением $\lambda = 1 - Y(0)$ и выбранным для интегрирования задачи Коши (2.5) методом. Введем вектор-функцию $V = \{X, Y, \Phi, N, Q, K\}$ и $v = \{x, y, \varphi, n, q, k\}$.

В этих обозначениях задача Коши (2.5) принимает вид (1.5), а линейная краевая задача (2.6) представляется в форме (1.3) при $p=1$.

3. Приведем алгоритм i -го шага интегрирования задачи Коши (2.5) модифицированным методом Эйлера

$$\lambda_{(i+1)} = \lambda_{(i)} + \Delta\lambda_{(i)}$$

$$\frac{dv_{(i)}}{d\beta} = I_{(i)}v_{(i)} + D_{(i)}, \quad Av_{(i)}(-\beta_0) = Bv_{(i)}(+\beta_0) = 0, \quad P_{(i)} = -\frac{\Delta\lambda_{(i)}}{y_{(i)}(0)}$$

$$(3.1)$$

$$I_{(i)} = I(V_{(i)}, P_{(i)}), \quad D_{(i)} = D(V_{(i)}, P_{(i)})$$

$$V_{(i)}^{\check{}} = V_{(i)} + p_{(i)}v_{(i)}, \quad P_{(i)}^{\check{}} = P_{(i)} + p_{(i)}$$

$$\frac{dv_{(i)}^{\check{}}}{d\beta} = I_{(i)}^{\check{}}v_{(i)}^{\check{}} + D_{(i)}^{\check{}}, \quad Av_{(i)}^{\check{}}(-\beta_0) = Bv_{(i)}^{\check{}}(+\beta_0) = 0, \quad P_{(i)}^{\check{}} = -\frac{\Delta\lambda_{(i)}}{y_{(i)}^{\check{}}(0)}$$

$$V_{(i+1)} = V_{(i)}^{\check{}} + 1/2(p_{(i)}v_{(i)} + p_{(i)}^{\check{}}v_{(i)}^{\check{}}), \quad P_{(i+1)} = P_{(i)} + 1/2(p_{(i)} + p_{(i)}^{\check{}})$$

Этот алгоритм был использован для построения равновесных форм и кривых деформирования $P(\lambda)$ арки под равномерным следящим давлением. Промежуточные линейные краевые задачи вида (2.6) решались методом ортогональной прогонки [7]. Чтобы избежать накопления ошибки, через несколько шагов по параметру λ проводилось уточнение вектор функции V методом Ньютона — Рафсона в том виде, как он изложен в [8]. Это потребовало решения линейных краевых задач, которые отличались от задачи (1.3) только в неоднородной части уравнений и неоднородностью граничных условий. Необходимость такой коррекции определялась по невязке исходной задачи (2.2), (2.3).

Для того чтобы реализовать движение по ветви, соответствующей возмущенному решению, и перейти к закритическим деформациям арки, вблизи точек бифуркации нагрузка принималась в виде $P[1+0.01 \cos(\pi(\beta-\beta_0)/2\beta_0)]$ для симметричных форм и $P[1+0.01 \sin(\pi(\beta-\beta_0)/2\beta_0)]$ — для несимметричных.

Кривые деформирования, а также некоторые симметричные и несимметричные формы равновесия показаны на фиг. 3–6 для $\beta_0=22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ, 90^\circ$ (кривые 1 соответствуют симметричным формам выпучивания, а кривые 2 — несимметричным). Приведенные результаты соответствуют аркам с параметром $c=10^{-5}$. При других значениях параметра c для неполюгих арок кривые деформирования отличаются от приведенных только на начальном участке, при малых прогибах. Влияние растяжимости оси арки становится существенным только для полюгих арок.

Отметим, что в экстремальных точках кривых деформирования $P(\lambda)$ величина $p=dP/d\lambda=0$ и линейная краевая задача (2.6), вырождается, что приводит к увеличению погрешности при счете вблизи этих точек. Анализ промежуточных результатов показал, что при применении ортогональной прогонки порядок неоднородного решения оказался существенно меньше порядка однородных составляющих решения. Эту трудность удалось обойти, получая неоднородное решение задачи (2.6) при $p=1/c$ и вводя соответствующие множители в алгоритм (3.1).

Численное решение выявило два обстоятельства, которые кажутся интересными.

Во-первых, у арок с $\beta_0>75^\circ$ закритическое деформирование сначала является устойчивым. Так, для арки с $\beta_0=90^\circ$ (фиг. 6) рост прогиба λ сопровождается ростом нагрузки P до величины $\lambda \approx 0.75$. И только при $\lambda > 0.75$ равновесные состояния закритического деформирования становятся неустойчивыми.

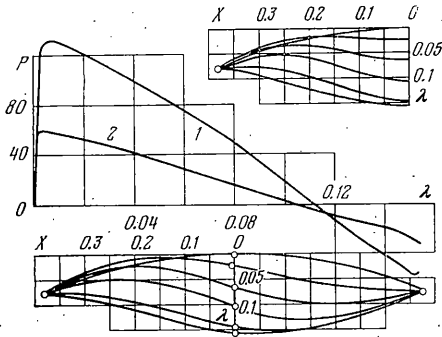
Во-вторых, величина параметра P , соответствующая осесимметричным формам выпучивания арки (фиг. 3–6), оказалась несколько ниже известных результатов для нерастяжимой арки [9]. Это побудило провести анализ задачи устойчивости нерастяжимой арки, который излагается ниже.

Для нерастяжимой арки ($c=0$) уравнения (2.2) принимают вид (здесь и ниже штрих означает дифференцирование по β)

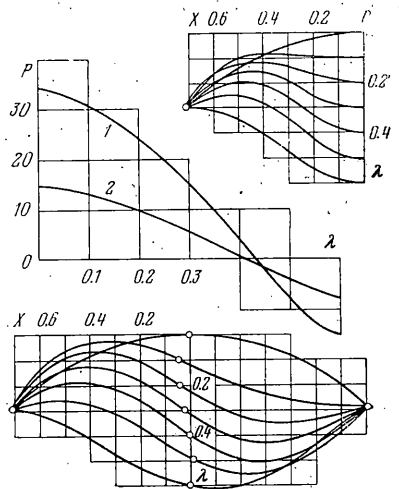
$$X' = \cos \Phi, \quad Y' = \sin \Phi, \quad \Phi' = K, \quad N' = -KQ, \quad Q' = KN - P, \quad K' = Q \quad (3.2)$$

Для любых P эти уравнения допускают точное решение, удовлетворяющее граничным условиям (2.3) и отвечающее недеформированному состоянию равновесия арки

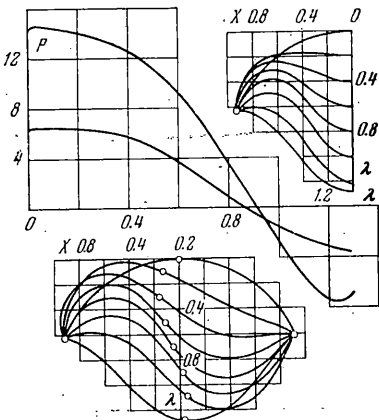
$$X_0 = \sin \beta, \quad Y_0 = \cos \beta, \quad \Phi_0 = -\beta, \quad N_0 = -P, \quad Q_0 = 0, \quad K_0 = -1 \quad (3.3)$$



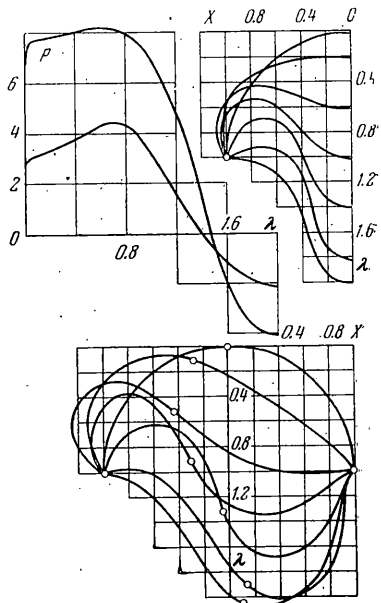
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Малым возмущениям этого решения x, y, φ, n, q, k соответствует линейризованная однородная краевая задача

$$\begin{aligned} x' &= \varphi \sin \beta, & y' &= \varphi \cos \beta, & \varphi' &= k, & n' &= q, & q' &= -Pk - n, & k' &= q \quad (3.4) \\ x(\pm\beta_0) &= y(\pm\beta_0) = k(\pm\beta_0) = 0 \end{aligned}$$

Отметим, что уравнения (3.4) могут быть также получены из системы (3.2) дифференцированием по параметру P .

В уравнениях (3.4) перейдем к нормальному w и тангенциальному u возмущенным перемещениям оси арки, которые связаны с x и y соотношениями

$$x = u \cos \beta + w \sin \beta, \quad y = -u \sin \beta + w \cos \beta \quad (3.5)$$

В итоге приходим к однородной задаче

$$\begin{aligned} u' &= -w, \quad w' = u + \varphi, \quad \varphi' = k; \quad n' = q, \quad q' = -Pk - n, \quad k' = q \\ u(\pm\beta_0) &= w(\pm\beta_0) = k(\pm\beta_0) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Неизвестные в уравнениях (3.6) выразим через u следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} w &= -u', \quad \varphi = -(u'' + u), \quad k = -(u'' + u)' \\ q &= -(u'' + u)'', \quad n = -P(u'' + u)' - (u'' + u)''' \end{aligned} \quad (3.7)$$

Тогда краевая задача для системы (3.6) сведется к одному уравнению

$$(u'' + u)^{IV} + (P + 4)(u'' + u)'' = 0 \quad (3.8)$$

Этому уравнению соответствуют условия при $\beta = \pm\beta_0$:

$$u = u' = (u'' + u)' = 0 \quad (3.9)$$

Общее решение уравнения (3.8) имеет вид

$$u = C_1 + C_2\beta + C_3 \sin \beta + C_4 \cos \beta + C_5 \sin r\beta + C_6 \cos r\beta, \quad r = \sqrt{P+4} \quad (3.10)$$

Подстановка этого решения в граничные условия (3.9) приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений для постоянных интегрирования C_1, C_2, \dots, C_6 . В соответствии с бифуркационным критерием устойчивости критическое состояние соответствует такому значению параметра r , при котором определитель системы равен нулю. Это условие после разворачивания определителя и простых преобразований сводится к виду

$$(r^3 - r) \sin r\beta_0 [r^3 \cos r\beta (\beta_0 \cos \beta_0 - \sin \beta_0) - \cos \beta_0 (r\beta_0 \cos r\beta_0 - \sin r\beta_0)] = 0 \quad (3.11)$$

Так как $r > 1$, то уравнение (3.11) распадается на два

$$\begin{aligned} \sin r\beta_0 &= 0 \\ r^3 \cos r\beta_0 (\beta_0 \cos \beta_0 - \sin \beta_0) - \cos \beta_0 (r\beta_0 \cos r\beta_0 - \sin r\beta_0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Первое из этих уравнений приводит к известным [9] критическим давлениям P^* для обратносимметричных форм выпучивания

$$P^* = (m\pi/\beta_0)^2 - 1 \quad (m=1, 2, \dots) \quad (3.13)$$

Второе уравнение в (3.12) соответствует симметричным формам выпучивания. Интересно отметить, что для непологих арок ($\beta_0 > 20^\circ$) критические нагрузки, соответствующие корням второго уравнения (3.12), близки к нагрузкам, которые дает формула (3.13) при $m = 3/2, 5/2, \dots$. Так, для первой осесимметричной формы выпучивания ($m = 3/2$) при $\beta_0 = 22.5^\circ$ по второму уравнению (3.12) имеем $P^* = 140$, а по формуле (3.13) критическая нагрузка $P^* = 143$. При $\beta_0 = 45^\circ$ имеем для P^* соответственно 34.3 и 35 и т.д.

В [9] исследование этой задачи построено на уравнении, общее решение которого включает только два последних слагаемых выражения (3.10). Полученная там формула вида (3.13) формально справедлива для $m = 1, 3/2, 2, 5/2, \dots$. Использованная здесь более точная постановка не приводит к существенному уточнению критических нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давиденко Д. Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений. Докл. АН СССР, 1953, т. 88, № 4.
2. Ortega J. M., Rheinboldt W. C. Iterative solution of non-linear equation in several variables. New York — London, Acad. Press, 1970. (Рус. перев.: М., «Мир», 1975.)
3. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ, ч. 2. Киев, «Наукова думка», 1966, стр. 137—149.
4. Петров В. В. К расчету пологих оболочек при конечных прогибах. Научн. докл. Высшей школы, Строительство, 1959, № 1.
5. Thurston G. A. A numerical solution of the non-linear equation for axisymmetric bending of shallow spherical shells. Trans. ASME. Ser. E, 1961, vol. 28, No. 4, p. 557—562.
6. Oden J. T. Finite elements of non-linear continua. New York, Mc Grow-Hill, 1972. (Рус. перев.: М., «Мир», 1976.)
7. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1961, т. 16, вып. 3.
8. Bellman R. E., Kalaba R. E. Quasilinearization and non-linear boundary-value problems. New York, Amer. Elsevier Publ., 1965. (Рус. перев.: М., «Мир», 1968.)
9. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.—Л., Гостехиздат, 1946, стр. 205—206.