

ДИСКРЕТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ

Н. В. ЛУКАШИНА, И. Ф. ОБРАЗЦОВ, Л. С. РЫБАКОВ

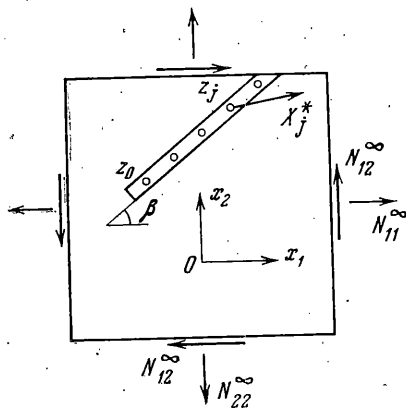
(Москва)

Дискретное взаимодействие пластины и сжато-растянутого стержня изучалось в [1-3].

В данной статье исследуется плоская контактная задача о дискретном взаимодействии бесконечной пластины и полубесконечного однородного стержня, работающего на растяжение — сжатие и изгиб в плоскости пластины. Взаимодействие стержня и пластины осуществляется через полубесконечный ряд одинаковых жестких круглых включений (заклепок). Задача формулируется в реактивных силах, передаваемых через включения, и для принятой модели взаимодействия пластины и стержня приводится к двум независимым полубесконечным системам линейных алгебраических уравнений с коэффициентами, зависящими от разности индексов. Одна из них относительно осевых компонент реактивных сил соответствует задаче о дискретном взаимодействии бесконечной пластины и работающего на растяжение — сжатие полубесконечного стержня; точное решение ее в квадратурах получено в работе [2].

Другая система относительно поперечных компонент реактивных сил описывает дискретное взаимодействие бесконечной пластины и полубесконечной балки. Точное решение этой системы в квадратурах строится по аналогии с первой системой — путем сведения ее к проблеме Римана — Гильберта [4].

1. Постановка задачи. Рассмотрению подлежит плоская упругая система, составленная из бесконечной пластины и полубесконечного однородного стержня, соединенного с пластиной полубесконечным рядом одинаковых заклепок, центры которых расположены на оси стержня с постоянным шагом (см. фиг. 1).



Фиг. 1

Предположим, что в пластине реализуется плоское напряженное состояние, а заклепки в ней имитируются жесткими круглыми включениями, скрепленными с телом пластины лишь по нормали к поверхности их контакта. Полагая, что стержень работает на растяжение — сжатие и изгиб в плоскости пластины, исключим из рассмотрения силы трения между пластиной и стержнем, а также эффекты эксцентричного (относительно срединной плоскости пластины) прикрепления стержня и ослабления его сечений за счет постановки заклепок. В соответствии с этими допущениями

стержень можно представить упругой линией, наделенной жесткостями на растяжение — сжатие и изгиб и взаимодействующей с пластиной в ее срединной плоскости через включения без передачи моментных нагрузок.

Введем обозначения: ν , E — соответственно коэффициент Пуассона и

модуль Юнга материала пластины, A и B — жесткости стержня на растяжение — сжатие и изгиб, h — толщина пластины, r — радиус включений, R — расстояние между центрами смежных включений (шаг заклепок). Имея в виду безразмерную форму изложения, будем считать, что все величины с линейной размерностью, погонные усилия в пластине и силы, прикладываемые к центрам включений, отнесены соответственно к R , $Eh/(1+\nu)$ и $8\pi EhR/(1+\nu)^2$, а осевые усилия, изгибающие моменты и перерезывающие силы в стержне — к A , B/R и B/R^2 .

Ограничимся рассмотрением случая, когда на упругую систему действуют внешнее поле нагрузок в пластине, задаваемое на бесконечности постоянными усилиями $N_{\alpha\beta}^\infty$ ($\alpha, \beta=1, 2$), и силы $X_j^*=X_{1j}^*+iX_{2j}^*$, приложенные к стержню в центрах $z_j=z_0+je^{i\theta}$ включений ($j=0, 1, 2, \dots$; $z=x_1+ix_2$ — комплексная переменная; x_1, x_2 — прямоугольные декартовы координаты в средней плоскости пластины; β — угол между осью стержня и осью ox_1 ; см. фиг. 1).

Разрезая включения, отделим мысленно стержень от пластины и приложим к центрам включений в пластине и стержне пока неизвестные силы взаимодействия $X_j=X_{1j}+iX_{2j}$ и $-X_j$ соответственно.

Поле смещений и усилий в изолированной пластине определяется известными выражениями [5]:

$$w(z) = u_1 + iu_2 = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (1.1)$$

$$N_{11} + N_{22} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \quad N_{22} - N_{11} + 2N_{12} = 2[\overline{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]$$

где u_1, u_2 — смещения в пластине вдоль осей ox_1 и ox_2 соответственно; $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$; $N_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta=1, 2$) — тензор погонных усилий; $\varphi(z), \psi(z)$ — комплексные потенциалы, для определения которых необходимо, вообще говоря, решить плоскую задачу теории упругости для плоскости с полу-бесконечным рядом жестких круглых включений.

Положим

$$\varphi(z) = \varphi_*(z) + \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(z), \quad \psi(z) = \psi_*(z) + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(z) \quad (1.2)$$

$$\varphi_*(z) = \Gamma z, \quad \psi_*(z) = \Gamma' z \quad (1.3)$$

$$(4\Gamma = N_{11}^\infty + N_{22}^\infty, \quad 2\Gamma' = N_{22}^\infty - N_{11}^\infty + 2iN_{12}^\infty)$$

$$\varphi_j(z) = -X_j \ln(z - z_j) \quad (1.4)$$

$$\psi_j(z) = \kappa \overline{X_j} \ln(z - z_j) + \overline{X_j} \left[\frac{\overline{z_j}}{z - z_j} + \frac{\varepsilon^2}{(z - z_j)^2} \right] \quad (\varepsilon = r/R)$$

где $\varphi_*(z), \psi_*(z)$ — потенциалы от заданного внешнего поля для плоскости без включений, а $\varphi_j(z), \psi_j(z)$ — потенциалы для плоскости с одним j -м включением, к центру которого приложена сила X_j [5].

Использование принципа суперпозиции (1.2), учитывающего взаимодействие включений в пластине асимптотически, оправдано при малых значениях параметра ε и равномерно здесь, если учесть, что фактическая область изменения ε заключена в интервале 0.01–0.1.

Введем на каждом участке между включениями стержня продольную координату x , отсчитываемую в направлении роста j ($x \in [+0, 1-0]$). Обозначим через $v_{1j}(x), v_{2j}(x), \theta_j(x), n_j(x), m_j(x)$ и $r_j(x)$ соответственно продольное смещение, прогиб, угол наклона упругой линии, осевое усилие, изгибающий момент и перерезывающую силу в произвольном сечении j -го участка (между j и $(j+1)$ -м включениями) стержня.

Используя известные решения дифференциальных уравнений растяжения — сжатия и изгиба стержня

$$v_{1j}(x) = V_{1j} + N_j x, \quad n_j(x) = N_j$$

$$v_{2j}(x) = V_{2j} + \Theta_j x - M_j \frac{x^2}{2} - R_j \frac{x^3}{6}$$

$$\theta_j(x) = \Theta_j - M_j x - R_j \frac{x^2}{2}, \quad m_j(x) = M_j + R_j x, \quad r_j(x) = R_j$$

выписанные для j -го участка в форме метода начальных параметров, представим статические и кинематические условия сопряжения двух смежных участков (j и $j-1$) изолированного стержня в следующем виде:

$$V_{1j} - V_{1, j-1} = N_{j-1}, \quad \omega(N_j - N_{j-1}) = P_j - P_j^* \quad (1.5)$$

$$V_{2j} - V_{2, j-1} = \Theta_{j-1} - \frac{1}{2} M_{j-1} - \frac{1}{6} R_{j-1}, \quad \Theta_j - \Theta_{j-1} = -M_{j-1} - \frac{1}{2} R_{j-1}$$

$$M_j - M_{j-1} = R_{j-1}, \quad \lambda(R_j - R_{j-1}) = Q_j - Q_j^* \quad (j=1, 2, \dots)$$

$$\omega = (1+\nu)^2 A / (8\pi E h R), \quad \lambda = (1+\nu)^2 B / (8\pi E h R^3) \quad (1.6)$$

$$P_j + iQ_j = X_j e^{-i\beta}, \quad P_j^* + iQ_j^* = X_j^* e^{-i\beta} \quad (1.7)$$

Здесь P_j и Q_j (P_j^* и Q_j^*) — соответственно осевые и поперечные (по отношению к оси стержня) компоненты реактивных (внешних) сил.

На конце изолированного стержня имеют место статические граничные условия

$$\omega N_0 = P_0 - P_0^*, \quad M_0 = 0, \quad \lambda R_0 = Q_0 - Q_0^* \quad (1.8)$$

После исключения взаимных смещений пластины и стержня как твердых тел условия их совместного деформирования примут вид

$$\operatorname{Re} \{ [w(z_{j+1}) - w(z_j)] e^{-i\beta} \} = V_{1, j+1} - V_{1j} \quad (j=0, 1, 2, \dots)$$

$$\operatorname{Im} \{ [w(z_{j+1}) - 2w(z_j) + w(z_{j-1}))] e^{-i\beta} \} = V_{2, j+1} - 2V_{2j} + V_{2, j-1} \quad (j=1, 2, \dots)$$

Преобразуя эти уравнения с помощью формул (1.1) — (1.5) и (1.7), найдем

$$\gamma - \sum_{j=0}^{\infty} \Gamma_{h-j} P_j = N_h \quad (h=0, 1, 2, \dots) \quad (1.9)$$

$$Q_h - 6\lambda \sum_{j=0}^{\infty} C_{h-j} Q_j = -6\lambda M_h + Q_h^* \quad (h=1, 2, \dots)$$

$$\Gamma_0 = -\Gamma_{-1} = -1 + \varepsilon^2 - 2\kappa \ln \varepsilon$$

$$\Gamma_h = -\Gamma_{-h-1} = 2\kappa \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) - \varepsilon^2 \frac{2k+1}{k^2 (k+1)^2} \quad (h \neq 0, -1)$$

$$C_0 = 2(1 - \varepsilon^2 - 2\kappa \ln \varepsilon), \quad C_1 = C_{-1} = -1 + 1.75\varepsilon^2 + 2\kappa \ln 2\varepsilon \quad (1.10)$$

$$C_h = C_{-h} = 2\kappa \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) - 2\varepsilon^2 \frac{3k^2 - 1}{k^2 (k^2 - 1)^2} \quad (|h|=2, 3, \dots)$$

$$2\gamma = \frac{1-\nu}{1+\nu} (N_{11}^{\infty} + N_{22}^{\infty}) + (N_{11}^{\infty} - N_{22}^{\infty}) \cos 2\beta + 2N_{12}^{\infty} \sin 2\beta$$

Исключая из уравнений (1.5), (1.8) и (1.9) величины N_k и M_k , получим

$$P_0 + \omega \sum_{j=0}^{\infty} \Gamma_{-j} P_j = P_0^* + \omega \gamma, \quad P_k + \omega \sum_{j=0}^{\infty} B_{k-j} P_j = P_k^* \quad (k=1, 2, \dots) \quad (1.11)$$

$$6Q_0 + Q_1 - 6\lambda \sum_{j=0}^{\infty} C_{j-1} Q_j = 6Q_0^* + Q_1 \quad (1.12)$$

$$12Q_0 + 6Q_1 + Q_2 - 6\lambda \sum_{j=0}^{\infty} C_{j-2} Q_j = 12Q_0^* + 6Q_1^* + Q_2^*$$

$$Q_{k+1} + 4Q_k + Q_{k-1} + 6\lambda \sum_{j=0}^{\infty} D_{k-j} Q_j = Q_{k+1}^* + 4Q_k^* + Q_{k-1}^* \quad (k=2, 3, \dots)$$

$$B_0 = -2(1 - \varepsilon^2 + 2\kappa \ln \varepsilon) = 2\Gamma_0, \quad B_1 = \Gamma_1 + \Gamma_{-1} = 1 - 1.75\varepsilon^2 + 2\kappa \ln 2\varepsilon \quad (1.13)$$

$$B_k = \Gamma_k + \Gamma_{-k} = 2\kappa \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) + 2\varepsilon^2 \frac{3k^2 - 1}{k^2 (k^2 - 1)^2} \quad (|k|=2, 3, \dots)$$

$$D_k = 2C_k - C_{k-1} - C_{k+1}$$

Полубесконечные системы (1.11), (1.12) независимы и служат для определения компонент P_k [2] и Q_k соответственно, через которые, согласно формулам (1.4)–(1.7), выражены все кинематические и статические величины в пластине и стержне.

2. Решение полубесконечной системы (1.12). Следуя [4], введем функцию

$$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k \quad (2.1)$$

которая, как видно из (1.10), регулярна на единичной окружности L и представима на ней в виде

$$c(\sigma) = C(e^{i\sigma}) = \gamma(\sigma) + \delta(\sigma) \quad (\sigma \in [0, 2\pi]) \quad (2.2)$$

$$\gamma(\sigma) = 4\kappa \left[(\cos \sigma - 1) \ln 2\varepsilon + \sum_{k=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) (\cos k\sigma - 1) \right] \quad (2.3)$$

$$\delta(\sigma) = 2 \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\sigma^2}{2} - \pi\sigma + \frac{\pi^2}{3} \right) \right] (1 - \cos \sigma)$$

Согласно (1.13)

$$D(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \xi^k = (2 - \xi - \xi^{-1}) C(\xi) \quad (\xi \in L) \quad (2.4)$$

Предположим, что функции $Q^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k z^k$, $Q^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k^* z^k$, ана-

литичны в области $D_+ + L(D_+(D_-))$ — область внутри (вне) единичной окружности L). В отношении функции $Q^+(z)$ это допущение оправдывается решением задачи. Что касается функции $Q^*(z)$, то в большинстве практически важных случаев нагружения она аналитична в круге, содержащем L .

На основании этого можно записать

$$Q_k = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q^+(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta = \frac{Q^{+(k)}(0)}{k!} \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q^+(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta = \begin{cases} Q_k & (k=0,1,2,\dots) \\ 0 & (k=-1,-2,\dots) \end{cases} \quad (2.6)$$

и аналогичные зависимости будут для величин Q_k^* и $Q^*(z)$. Отметим, что при интегрировании вдоль контура L за положительное принимается направление против часовой стрелки.

С помощью (2.1), (2.4) и (2.6) система (1.12) преобразуется к виду

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L [6\zeta+1-6\lambda C(\zeta)] Q^+(\zeta) \zeta^{-2} d\zeta = 6Q_0^* + Q_1^* \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L [12\zeta^2+6\zeta+1-6\lambda C(\zeta)] Q^+(\zeta) \zeta^{-3} d\zeta = 12Q_0^* + 6Q_1^* + Q_2^* \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L (4+\zeta+\zeta^{-1}) [H(\zeta) Q^+(\zeta) - Q^*(\zeta)] \zeta^{-k-1} d\zeta = 0 \quad (k=2,3,\dots) \quad (2.9)$$

$$H(\zeta) = 1 + 6\lambda \frac{2-\zeta-\zeta^{-1}}{4+\zeta+\zeta^{-1}} C(\zeta) \quad (\zeta \in L) \quad (2.10)$$

Уравнениям (2.6) и (2.9) удовлетворяет кусочно-аналитическая функция $Q(z) = Q^+(z)$ ($z \in D_+$), $Q(z) = Q^-(z)$ ($z \in D_-$), являющаяся решением краевой задачи Римана — Гильберта

$$Q^-(\zeta) + a\zeta = (4+\zeta+\zeta^{-1}) [H(\zeta) Q^+(\zeta) - Q^*(\zeta)] \quad (\zeta \in L) \quad (2.11)$$

Здесь a — пока неизвестная постоянная.

Уравнения (2.7), (2.8) с учетом (2.10) и (2.11) приводятся к соотношениям

$$Q^+(1) = Q^*(1), \quad Q^{+'}(1) = Q^{*'}(1) \quad (2.12)$$

отражающим условия равновесия изолированного стержня в отношении поперечных сил и моментов соответственно.

Регулярная в D_+ часть решения краевой задачи (2.11) имеет вид [6]:

$$Q^+(z) = \frac{Y^+(z)}{z+2+\sqrt{3}} [Q^-(\infty) + a(z-2+\sqrt{3}-S_1) + q^+(z)] \quad (z \in D_+) \quad (2.13)$$

$$Y^\pm(z) = \exp[-S^\pm(z)], \quad S^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln H(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \quad (2.14)$$

$$q^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\xi + 2 + \sqrt{3}) Q^*(\xi)}{Y^-(\xi) (\xi - z)} d\xi \quad (z \in D_{\pm})$$

$$S_k = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln H(\xi)}{\xi^{k+1}} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln h(\sigma) \cos k\sigma d\sigma, \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$$h(\sigma) = H(e^{i\sigma}) = 1 + 6\lambda \frac{1 - \cos \sigma}{2 + \cos \sigma} c(\sigma)$$

где $Q^-(\infty)$ — дополнительная неизвестная постоянная.

Для определения $Q^-(\infty)$ и a воспользуемся соотношениями (2.12). Раскрывая их левые части с помощью выражения (2.13) и формул Сохоцкого, найдем

$$Q^-(\infty) = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{Y_0}} Q^*(1) + a(S_1 + 1 - \sqrt{3}) - q(1) \quad (2.15)$$

$$a = \frac{1}{2\sqrt{Y_0}} \{ (3 + \sqrt{3}) [Q^{*'}(1) + S'(1)Q^*(1)] + Q^*(1) \} - q'(1)$$

$$Y_0 = Y^+(0) = e^{-s_0}, \quad q(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\xi + 2 + \sqrt{3}) Q^*(\xi)}{Y^-(\xi) (\xi - 1)} d\xi \quad (2.16)$$

$$q'(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q^*(\xi) + (\xi + 2 + \sqrt{3}) [Q^{*'}(\xi) + S'(\xi)Q^*(\xi)]}{Y^-(\xi) (\xi - 1)} d\xi$$

$$S'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln H(\tau)}{(\tau - \xi)^2} d\tau, \quad S'(1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\ln h(\sigma)}{\cos \sigma - 1} d\sigma$$

при этом учтено, что

$$S(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln H(\xi)}{\xi - 1} d\xi = \frac{1}{2} S_0$$

Подставляя теперь (2.13) в (2.5) и применяя формулу Лейбница, после некоторых преобразований приходим к следующим рекуррентным соотношениям для искомых величин Q_k :

$$Q_0 = (2 - \sqrt{3}) \left[\frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{Y_0}} Q^*(1) - a - q(1) - q_0 \right] Y_0 \quad (2.17)$$

$$Q_k = \frac{Q_0}{Y} Y_k + (2 - \sqrt{3}) \left(a Y_{k-1} + \sum_{m=0}^{k-1} Y_m q_{k-m} - Q_{k-1} \right) \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$q_k = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\xi + 2 + \sqrt{3}) Q^*(\xi)}{Y^-(\xi) \xi^{k+1}} d\xi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

где Y_k находятся по рекуррентной формуле

$$Y_k = \frac{Y^{+(k)}(0)}{k!} = -\frac{1}{k} \sum_{n=1}^k n Y_{k-n} S_n \quad (k=1,2,\dots) \quad (2.18)$$

Заметим, что в принятых здесь обозначениях решение системы (1.14) имеет вид [2]:

$$P_0 = \left[\frac{P^*(1) + 2\omega\gamma}{2\sqrt{X_0}} - p(1) + p_0 \right] X_0, \quad P_k = \frac{P_0}{X_0} X_k + \sum_{m=0}^{k-1} X_m P_{k-m} \quad (k=1,2,\dots) \quad (2.19)$$

$$p(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{P^*(\zeta) d\zeta}{X^-(\zeta)(\zeta-1)}, \quad P^*(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^* \zeta^k, \quad p_k = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{P^*(\zeta) d\zeta}{X^-(\zeta) \zeta^{k+1}} \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (2.20)$$

$$X^\pm(z) = \exp[-F^\pm(z)], \quad F^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \quad (z \in D_\pm)$$

$$G(\zeta) = 1 + \omega B(\zeta), \quad B(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k \zeta^k \quad (\zeta \in L)$$

где X_k ($k=0, 1, 2, \dots$) подобно величинам Y_k найдутся из формул (2.16), (2.18), если в них заменить S_k на

$$F_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln g(\sigma) \cos k\sigma d\sigma \quad (k=0,1,2,\dots)$$

$$g(\sigma) = G(e^{i\sigma}) = 1 + \omega b(\sigma), \quad b(\sigma) = B(e^{i\sigma}) = \gamma(\sigma) - \delta(\sigma)$$

Изложенный метод упругого анализа дискретного взаимодействия бесконечной пластины и полубесконечного стержня может быть распространен и на другие случаи нагружения. В частности, если внешние силы X_j^* приложены к центрам включений со стороны пластины, то в формулах (1.5) следует опустить величины P_j^* и Q_j^* , а в выражениях (1.4) произвести замену X_j на $X_j + X_j^*$. Дальнейший ход рассуждений остается прежним.

3. Численные результаты. В качестве примера рассмотрим случай, когда внешнее поле нагрузок в пластине отсутствует, $P_0^* = Q_0^* = 1$, а остальные P_k^* и Q_k^* равны нулю.

Тогда $Q^*(z) = 1$ и согласно (2.14)

$$q^+(z) = 2 + \sqrt{3} - S_1 + z \quad (z \in D_+)$$

$$q^-(z) = 2 + \sqrt{3} - S_1 + z - \frac{z + 2 + \sqrt{3}}{Y^-(z)} \quad (z \in D_-)$$

Учитывая, что $Y^-(1) = \sqrt{Y_0}$, по формулам Сохоцкого найдем

$$q(1) = \frac{1}{2} [q^+(1) + q^-(1)] = 3 + \sqrt{3} - S_1 - \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{Y_0}}$$

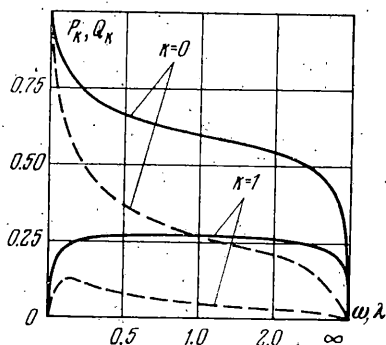
$$q'(1) = \frac{1}{2} [q^{+'}(1) + q^{-'}(1)] = 1 - \frac{1 + (3 + \sqrt{3})S'(1)}{2\sqrt{Y_0}}$$

Рекуррентные соотношения (2.17) принимают вид

$$Q_0 = [1 - (3 - \sqrt{3})S'(1)]\sqrt{Y_0}$$

$$Q_k = \frac{Q_0}{Y_0} Y_k + (2 - \sqrt{3}) \left[\frac{1 + (3 + \sqrt{3})S'(1)}{\sqrt{Y_0}} Y_{k-1} - Q_{k-1} \right] \quad (k=1, 2, \dots)$$

Из (2.19), (2.20) аналогично устанавливается, что $P_k = X_k / \sqrt{X_0}$ ($k=0, 1, 2, \dots$). Некоторые результаты вычислений при $\nu=1/3$ и $\varepsilon=0.1$ представлены графически на фиг. 2. Сплошными кривыми показана зависимость Q_0 и Q_1



Фиг. 2

от параметра λ , а пунктирными — зависимость P_0 и P_1 от параметра ω [2]. Заметим, что на горизонтальной оси (ω, λ) использован переменный масштаб: слева и справа от точки 1 отложены симметрично относительно нее значения $\omega(\lambda)$ и $1/\omega(1/\lambda)$ соответственно.

По мере удаления от нагруженного включения силы Q_k (как и P_k) затухают: быстрее — при малых λ (слабая балка), медленнее — при больших λ (мощная балка). Изменение параметра ε в указанной выше области его практических значений сказывается на результатах вычислений незначительно.

Поступила 10 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Budiansky B., Wu Tai Te. Transfer of load to a sheet from a rivet-attached stiffener. J. Math. and Phys., 1961, vol. 40, No. 2.
2. Рыбаков Л. С., Черепанов Г. П. Дискретное взаимодействие пластины с полубесконечным стрингером. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
3. Черепанов Г. П., Рыбаков Л. С. К расчету клепаных панелей. Прикл. механ., 1977, т. 13, № 8.
4. Фельд Я. Н. О бесконечных системах линейных алгебраических уравнений, связанных с задачами о полубесконечных периодических структурах. Докл. АН СССР, 1955, т. 102, № 2.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.