

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ВДОЛЬ КРОМОК

М. Ф. БАБУРЧЕНКОВ, Н. М. БОРОДАЧЕВ

(Киев)

В рядах Фурье рассматривается точное решение задачи теории упругости для прямоугольной пластины, подкрепленной непрерывным образом вдоль двух противоположных кромок по одну сторону от срединной плоскости пластины. При этом подкрепление моделируется не стержнями, как в [1-5], а прямоугольными ребрами. Торцы ребер и кромки пластины нагружены равномерно распределенными растягивающими (сжимающими) усилиями.

Вопросу передачи усилия от стержня к прямоугольной пластине посвящены работы [3-5], выполненные в иной постановке. Обзор более ранних исследований в этой области дан в [1].

Решение рассматриваемой задачи строится на основе предлагаемого в данной статье способа, основная идея которого состоит в следующем. В отличие от [6, 7] функция напряжений плоской задачи при наличии объемных сил представляется в виде суммы бигармонической функции и частного решения неоднородного дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция напряжений. Частное решение принимается в форме двойного ряда Фурье, коэффициенты которого определяются в зависимости от закона изменения объемных сил. Способ позволяет строить эффективные решения ряда прикладных задач.

В соответствии с предлагаемым способом касательные усилия, действующие по поверхности контакта ребра с пластиной, заменяются объемными силами, которые переносятся в срединную плоскость последней. Граничные условия для ребра на верхней и нижней гранях удовлетворяются точно, на торцах — точно для нормальных и интегрально для касательных усилий. Граничные условия для пластины удовлетворяются точно. Определение неизвестных коэффициентов сводится к одной вполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с ограниченными сверху свободными членами.

Даны примеры численной реализации на ЭВМ. Изучается краевой эффект и сравнивается поле напряжений с решениями технических теорий.

1. Постановка задачи. Воспользуемся прямоугольной системой координат Ox, y, z , оси x, y которой совпадают с осями симметрии срединной плоскости пластины, а ось z нормальна к ней (фиг. 1). Пусть прямоугольная пластина толщиной $2h$, длиной $2l$, шириной $2a$ подкреплена ребрами жесткости длиной $2l$, высотой b и толщиной $2t$. Ребра и пластина изготовлены из одного материала. К торцам ребер приложена равномерно распределенная нагрузка D , к кромкам пластины — такая же нагрузка, но интенсивностью D_x и D_y .

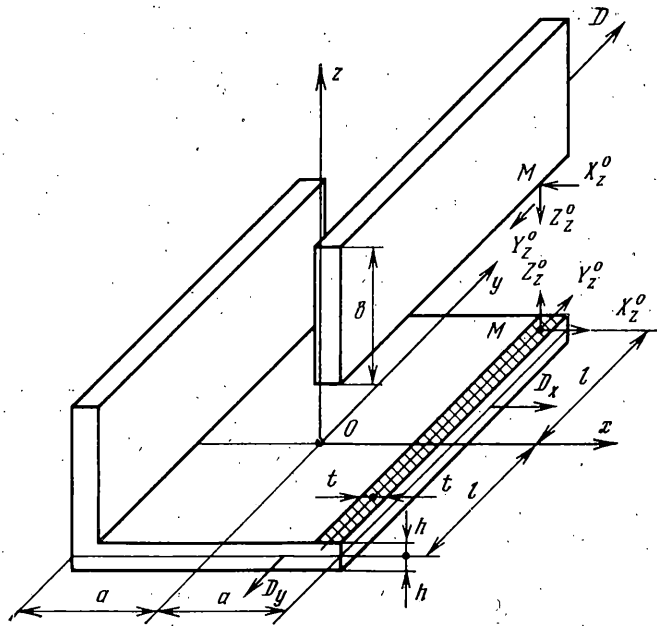
В произвольной точке M поверхности контакта ребра с пластиной (заштрихованный прямоугольник) действуют компоненты тензора напряжений $X_z(x, y, h)$, $Y_z(x, y, h)$ и $Z_z(x, y, h)$. Эти компоненты могут рассматриваться как внешние усилия $X_z^\circ(x, y)$, $Y_z^\circ(x, y)$ и $Z_z^\circ(x, y)$, эквивалентные действию условно отсоединенного ребра (пластины). Из условия равновесия следует, что каждая группа усилий является самоуравновешенной и поэтому может рассматриваться независимо от других.

Очевидно, что усилия $Z_z^\circ(x, y)$ вызывают изгиб пластины. Ограничимся случаем, когда ее толщина значительно меньше высоты ребра ($2h \ll b$).

Так как по условию задачи $X_z=Y_z=Z_z=0$ при $z=-h$, то из соответствующего уравнения равновесия пространственной задачи имеем $\partial Z_z/\partial z=0$ при $z=-h$. Поэтому принимаем $Z_z \approx 0$ во всех точках, т. е., следуя Карману [8], пренебрегаем изгибом пластины.

Пусть, кроме того, жесткость ребра EI_x (E — модуль упругости, I — момент инерции) относительно центральной оси, параллельной Ox , значительно больше жесткости EI_z относительно центральной оси, параллельной Oz . Тогда, как и в [4, 5], пренебрегаем жесткостью EI_z и соответственно принимаем $X_z^o \approx 0$, а напряженное состояние ребра считаем плоским.

Покажем, что принятые допущения позволяют рассматривать напряженное состояние пластины так же, как обобщенно плоское. Для чего, ана-



Фиг. 1

логично [9], проинтегрируем уравнения равновесия пространственной задачи по z от $-h$ до h и разделим их на $2h$. В результате получим

$$\frac{\partial X_x^h}{\partial x} + \frac{\partial X_y^h}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x^h}{\partial x} + \frac{\partial Y_y^h}{\partial y} + \frac{Y_z(x, y, h)}{2h} = 0$$

$$\frac{\partial Z_x^h}{\partial x} + \frac{\partial Z_y^h}{\partial y} = 0. \tag{1.1}$$

Здесь индексом h обозначены средние значения по толщине компонент напряжения. Пренебрегая изгибающими моментами, перенесем силы $1/2 Y_z(x, y, h)/h$ на прямоугольники $(-l \leq y \leq l)$, $(-a \leq x \leq 2t - a)$, $(a - 2t \leq x \leq a)$ срединной плоскости $z=0$ и будем рассматривать их как компоненты $Y(x, y) = 1/2 Y_z(x, y, h)/h$ объемных сил. Тогда вследствие симметрии и определения плоского напряженного состояния X_x, Y_y, X_y — четные функции x , а Z_x и Z_y — нечетные. Следовательно, средние значения Z_x^h и Z_y^h равны нулю, а последнее уравнение (1.1) — тождество [9]. Таким образом, (1.1) принимают вид уравнений равновесия плоской задачи. Это позволяет ограничиться рассмотрением напряженно-деформированного состояния в точ-

*

ках срединной плоскости пластины и совместить с ней нижнюю грань ребра.

В дальнейшем средние значения компонент напряжения и перемещения будем обозначать без верхнего индекса. Тогда граничные условия и условия симметрии принимают вид

для ребра

$$Z_z^r(y, 0) = Z_z^r(y, b) = Y_z^r(y, b) = 0, \quad Y_z^r(y, 0) = Y_z^0(y) \quad (-l \leq y \leq l) \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} Y_y^r(\pm l, z) = D, \quad Y_z^r(\pm l, z) = 0 \quad (0 \leq z \leq b) \\ Y_z^r(0, z) = v^r(0, z) = 0 \quad (0 \leq z \leq b) \end{aligned} \quad (1.3)$$

для пластины

$$X_x(\pm a, y) = D_x, \quad X_y(\pm a, y) = 0 \quad (-l \leq y \leq l) \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} Y_y(x, \pm l) = D_y, \quad X_y(x, \pm l) = 0 \quad (-a \leq x \leq a) \\ X_y(0, y) = u(0, y) = 0 \quad (-l \leq y \leq l) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$X_y(x, 0) = v(x, 0) = 0 \quad (-a \leq x \leq a)$$

Здесь и ниже с индексом r обозначены компоненты, относящиеся к ребру. В (1.2) Y_z^0 рассматривается как функция одной переменной y на основании принципа Сен-Венана. Исходя из физического смысла, допустимо разложение в ряд Фурье

$$Y_z^0(y) = \sum_{n=1,3,\dots} B_n \sin \beta_n y, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{2l} \quad (-l \leq y \leq l) \quad (1.6)$$

Условие соединения ребра с пластиной принимаем в виде равенства проекций перемещений ребра и пластины на ось Oy , т. е.

$$v^r(y, 0) = v(\pm c, y), \quad c = a - t \quad (-l \leq y \leq l)$$

При относительно малых толщинах $2t$ это условие равносильно

$$v^r(y, 0) = v(\pm a, y) \quad (-l \leq y \leq l) \quad (1.7)$$

2. Напряженно-деформированное состояние ребра. Принимаем функцию напряжений в виде

$$\begin{aligned} F^r(y, z) = \frac{1}{2} D_z^2 + \sum_{n=1,3,\dots} (c_{n1} \operatorname{ch} \beta_n z + c_{n2} \operatorname{sh} \beta_n z + \\ + c_{n3} z \operatorname{ch} \beta_n z + c_{n4} z \operatorname{sh} \beta_n z) \cos \beta_n y \end{aligned}$$

Удовлетворяя первым четырем условиям (1.2), находим

$$\begin{aligned} c_{n1} = 0, \quad c_{n2} = -B_n b^2 / p_n, \quad p_n = \operatorname{sh}^2 \beta_n b - \beta_n^2 b^2 \\ c_{n3} = B_n \frac{\operatorname{sh}^2 \beta_n b}{\beta_n p_n}, \quad c_{n4} = \frac{\beta_n b - \operatorname{sh} \beta_n b \operatorname{ch} \beta_n b}{\beta_n p_n} B_n \end{aligned}$$

При этом граничные условия на торцах выполняются точно для Y_y^r , а для Y_z^r — интегрально. Условия симметрии (1.3) также выполняются, а все постоянные в известных формулах для компонент перемещения равны нулю.

3. Плоская задача для прямоугольника (пластины) с объемными силами. Как известно, при наличии компоненты $Y(x, y)$ объемных сил

уравнения равновесия удовлетворяются, если функция напряжений $F(x, y)$ связана с компонентами напряжения зависимостями

$$X_x(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}, \quad X_y(x, y) = -\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (3.1)$$

$$Y_y(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + V(x, y), \quad Y(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \quad (3.2)$$

Уравнение совместности при этом имеет вид

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

где σ — коэффициент Пуассона.

Компоненты перемещения определяются по формулам [9]:

$$2\mu u = \int \left[\frac{P}{(1+\sigma)} - Y_y \right] dx - \varepsilon y + \alpha, \quad P = X_x + Y_y$$

$$2\mu v = \int \left[\frac{P}{(1+\sigma)} - X_x \right] dy + \varepsilon x + \beta \quad (3.4)$$

Здесь $\alpha, \beta, \varepsilon$ — постоянные, μ — постоянная Ламе.

Общее решение (3.3) $F(x, y)$ представим в виде суммы частного решения $\Psi(x, y)$ и решения однородного (бигармонического) уравнения — $\Phi(x, y)$, т. е. $F(x, y) = \Psi(x, y) + \Phi(x, y)$.

Частное решение принимаем в форме двойного ряда Фурье, коэффициенты которого определяются в зависимости от закона распределения объемных сил

$$Y(x, y) = \frac{1}{2} Y_z(x, y, h) / h = \frac{1}{2} \tau(x) Y_z^\circ(y) / h \quad (3.5)$$

Здесь $\tau(x)$ — четная функция, среднеинтегрально равная единице на интервале $(a-2t \leq x \leq a)$ и нулю в остальном. Чтобы обеспечить непрерывность компонент напряжения, принимаем $\tau(x)$ в виде

$$\tau(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq a-2t) \\ \frac{1}{2} [1 - (x-c)^2/t^2] & (a-2t \leq x \leq a) \end{cases}$$

Тогда (3.5) с учетом (1.6) может быть разложена в ряд Фурье.

$$Y(x, y) = \frac{1}{2h} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} A_m B_n \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{2a} \quad (3.6)$$

$$A_m = \frac{12t}{a(\alpha_m t)^2} \left(\frac{\sin \alpha_m t}{\alpha_m t} - \cos \alpha_m t \right) \cos \alpha_m c$$

где A_m — коэффициенты Фурье функции $\tau(x)$.

Интегрируя по y (3.2) с учетом (3.6), получаем

$$V(x, y) = \frac{1}{2h} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{A_m B_n}{\beta_n} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y$$

Используя это выражение, известным образом [10] находим в двойных рядах частное решение (3.3)

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{2h} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{A_m B_n}{\beta_n} \frac{(\alpha_m^2 - \sigma \beta_n^2)}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \quad (3.7)$$

Бигармоническую функцию принимаем в виде

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} (D_x y^2 + D_y x^2) + \sum_{n=1,3,\dots} C_n \frac{H_1(\alpha_n, y)}{\alpha_n H_1'(\alpha_n, l)} \cos \alpha_n x + \sum_{n=1,3,\dots} D_n \frac{H(x, \beta_n)}{\beta_n H'(a, \beta_n)} \cos \beta_n y \quad (3.8)$$

$$H(x, \beta_n) = a \operatorname{sh} \beta_n a \operatorname{ch} \beta_n x - x \operatorname{sh} \beta_n x \operatorname{ch} \beta_n a$$

$$H_1(\alpha_n, y) = l \operatorname{sh} \alpha_n l \operatorname{ch} \alpha_n y - y \operatorname{sh} \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n l$$

Ряды (3.8) использовались ранее в [10, 11].

Построенная таким образом функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям симметрии (1.5). При этом в (3.4) $\alpha = \beta = \varepsilon = 0$.

Удовлетворяя условиям (1.4) и (1.7), получаем совокупность двух бесконечных систем и равенство

$$X_n = \sum_{h=1,3,\dots} a_{nh} Y_h + \sum_{h=1,3,\dots} c_{nh} Z_h \quad (n=1,3,\dots), \quad Y_n = \sum_{h=1,3,\dots} b_{nh} X_h + d_n Z_n \quad (3.9)$$

$$Y_n = e_n Z_n + r_n \quad (n=1, 3, \dots) \quad (3.10)$$

$$X_h = \frac{\sin^{1/2} k\pi}{l\lambda(\alpha_h l)} C_h, \quad Y_h = \frac{\sin^{1/2} k\pi}{a\lambda(\beta_h a)} D_h, \quad Z_h = B_h \sin \frac{k\pi}{\varphi}$$

$$a_{nh} = -\frac{4\alpha_n^2}{l\lambda(\alpha_n l)} \frac{\beta_h}{(\alpha_n^2 + \beta_h^2)^2}, \quad b_{nh} = -\frac{4\beta_n^2}{a\lambda(\beta_n a)} \frac{\alpha_h}{(\alpha_h^2 + \beta_n^2)^2}$$

$$c_{nh} = \varphi_{nh} \frac{A_n \sin^{1/2} n\pi}{l\lambda(\alpha_n l)}, \quad d_n = \frac{1}{a\lambda(\beta_n a)} \sum_{m=1,3,\dots} A_m \varphi_{mn} \sin \frac{m\pi}{2}$$

$$e_n = \frac{\beta_n b - \operatorname{sh} \beta_n b \operatorname{ch} \beta_n b}{a p_n}, \quad r_n = \frac{\Delta D}{a \beta_n l}, \quad \varphi_{nh} = \frac{\alpha_n (\alpha_n^2 - \sigma \beta_h^2)}{2h (\alpha_n^2 + \beta_h^2)^2}$$

$$\lambda(x) = \operatorname{th} x + \frac{x}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad \Delta D = D - D_y + \sigma D_x$$

Из (3.10) следует, что для неподкрепленной пластины ($b=0, D=0$) коэффициенты $Z_n=0$, так как $e_n|_{b=0} = -\infty$. При этом (3.9) становится вполне регулярной системой однородных уравнений [11], имеющей единственное решение. Отсюда $X_n=Y_n=0$, и пластина испытывает растяжение в двух направлениях.

Равенства (3.9) и (3.10) путем подстановки сводятся к одной бесконечной системе

$$X_n = \sum_{j=1,3,\dots} M_{nj} X_j + N_n \quad (n=1,3,\dots) \quad (3.11)$$

$$M_{nj} = \sum_{h=1,3,\dots} \frac{b_{hj} t_{nh}}{1 - d_h/e_h}, \quad N_n = \sum_{h=1,3,\dots} \left(\frac{t_{nh}}{1 - e_h/d_h} - \frac{c_{nh}}{e_h} \right) r_h$$

$$t_{nh} = a_{nh} + c_{nh}/e_h$$

4. Доказательство регулярности бесконечной системы. Так как в интервале $(0, \infty)$ значений $\beta_h b$ коэффициенты e_h монотонно возрастают от $-\infty$

до -1 , а из [11] известны оценки

$$\sum_{j=1,3,\dots} |b_{kj}| \leq 0.7003, \quad \sum_{k=1,3,\dots} |a_{nk}| \leq 0.7003 \quad (4.1)$$

то будем иметь

$$\sum_{j=1,3,\dots} |M_{nj}| \leq \sum_{k=1,3,\dots} \left| \frac{t_{nk}}{1-d_k/e_k} \right| \sum_{j=1,3,\dots} |b_{kj}| \leq 0.7003 \sum_{k=1,3,\dots} \frac{|a_{nk}| + |c_{nk}|}{1-d_k/e_k} \quad (4.2)$$

Можно показать, что

$$d_n = \frac{S(\sigma, t, \beta_n a)}{a\lambda(\beta_n a)} \geq 0 \quad (0.2 \leq \sigma \leq 0.4, 0.01 \leq t \leq 0.15, a=1, l \leq 3) \quad (4.3)$$

$$S(\sigma, t, \beta_n a) = \frac{3\delta}{2(\beta_n t)^3} \left[\frac{3(\sigma+1)}{2} (\text{sh } 2\beta_n t - \text{th } \beta_n a \text{ ch } 2\beta_n t + \text{th } \beta_n a) + \right. \\ \left. + (1+\sigma)\beta_n a \frac{\text{sh}^2 \beta_n t}{\text{ch}^2 \beta_n a} \right] + \frac{3\delta}{2(\beta_n t)^2} \left\{ (2\sigma+1) (\text{th } \beta_n a \text{ sh } 2\beta_n t - \text{ch } 2\beta_n t) + \right. \\ \left. + (1+\sigma) \left[\text{th } \beta_n a (\text{sh } 2\beta_n t - \text{th } \beta_n a \text{ ch } 2\beta_n t) - \beta_n a \frac{\text{sh } \beta_n t \text{ ch } \beta_n t}{\text{ch}^2 \beta_n a} \right] - \sigma \right\}, \quad \delta = \frac{t}{h}$$

Доказательство (4.3) не приводится из-за громоздкости. Оно основано на определении функции, порождающей данный ряд, и имеет сходство с изложенным ниже.

Если воспользоваться рядами

$$\frac{4}{l} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{\alpha_n^3}{(\alpha_n^2 + \beta_k^2)^2} = \text{th } \alpha_n l - \frac{\alpha_n l}{\text{ch}^2 \alpha_n l}, \\ \frac{4}{l} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{\alpha_n \beta_k^2}{(\alpha_n^2 + \beta_k^2)^2} = \lambda(\alpha_n l) \quad (n=1,3,\dots)$$

то получим

$$\sum_{k=1,3,\dots} |c_{nk}| \leq \frac{2\delta}{a\lambda(\alpha_n l)} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{\alpha_n (\alpha_n^2 + \sigma \beta_k^2)}{(\alpha_n^2 + \beta_k^2)^2} \leq \frac{\delta}{2a} (1+\sigma) \quad (4.4)$$

При этом использовано свойство, что абсолютная величина коэффициентов A_m ряда (3.6) ограничена — $|A_m| \leq 4t/a$.

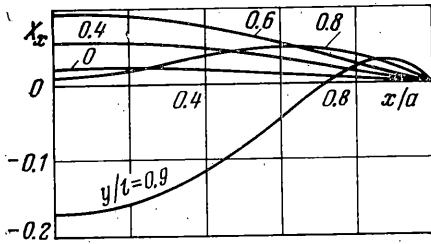
Используя оценки (4.1) — (4.4), получаем

$$\sum_{j=1,3,\dots} |M_{nj}| \leq 0.985 \quad (0.2 \leq \sigma \leq 0.4, 0.01 \leq t \leq 0.15, a=\delta=1, l \leq 3)$$

т. е. система (3.11) вполне регулярна [10] при указанных значениях a , l , t , σ и δ .

Нетрудно заметить, что свободные члены N_n (3.11) ограничены сверху и имеют порядок не ниже $O(1/n)$.

5. Исследование краевого эффекта. Полученное решение численно реализовано на ЭВМ ЕС-1020 для компонент X_x , X_y и Y_y в 180 точках. При этом в рядах, дающих решение, удерживалось 50 членов ($n=1, 3, \dots, 99$; $m=1, 3, \dots, 99$). Соответственно система (3.11) ограничивалась 50 уравнениями. После ее решения проверялось выполнение граничных условий (1.4) для X_y .



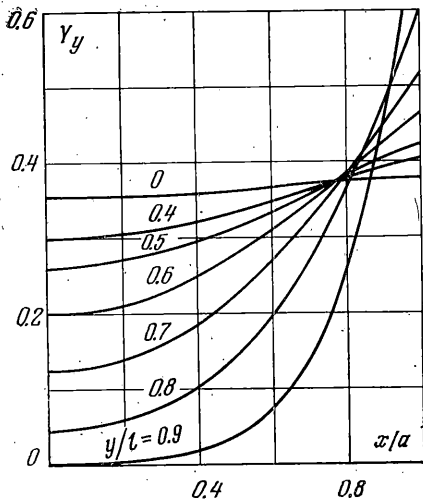
Фиг. 2

Численные результаты получены при следующих значениях параметров: $\Delta D = D = 1$, $a = 1$, $b = 0.6$, $l = 3$, $\sigma = 0.33$ для $t = h = 0.1$ ($\delta = 1$) и $t = 0.1$, $h = 0.025$ ($\delta = 4$). Для случая $\delta = 4$ регулярность системы перед ее решением подтверждалась численно. В обоих случаях граничные условия для X_y (во всех точках за исключением угловой и ее окрестности) удовлетворялись с погрешностью, не превышающей 2% по отношению к исходным усилиям $\Delta D = 1$. В угловой точке и ее окрестности погрешность несколько возрастает.

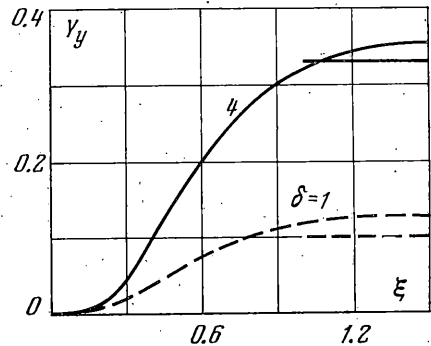
Расчеты подтверждают экспериментальные данные [12] о незначительном вкладе X_y в напряженное состояние, так как компонента X_y почти на порядок отличается от значений X_x и Y_y в соответствующих точках.

На фиг. 2, 3 приведены графики компонент X_x , Y_y для случая $\delta = 4$.

С целью оценки характера затухания возмущения на фиг. 4 изображены кривые зависимости Y_y при $x=0$ как функции относительного расстояния от торцов ребер



Фиг. 3



Фиг. 4

$\xi = \frac{1}{2}(l-y)/a$. Для сравнения в виде горизонтальных линий приведены значения Y_y , определенные по теории бруса для срединной плоскости (внецентренное растяжение).

При $\delta = 1$ компонента Y_y находится в согласии с принципом Сен-Венана, и ее значение вне зоны краевого эффекта близко к значению Y_y в срединной плоскости, определенной по формулам технической теории.

Уменьшение толщины пластины ($\delta = 4$) приводит к увеличению протяженности зоны краевого эффекта. Эту особенность предсказывали авторы работы [13].

Поступила 10 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
2. Каландия А. И. О напряженном состоянии в пластинках, усиленных ребрами жесткости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
3. Theocaris P. S., Dafermos K. The elastic strip under mixed boundary conditions. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 4. (Рус. перев: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. E, 1964, № 4.)

4. *Микаелян В. В.* О двух задачах растяжения упругого прямоугольника с упругими накладками. Докл. АН АрмССР, 1973, т. 56, № 4.
5. *Нуллер Б. М.* Контактные задачи для полос и прямоугольных пластинок, усиленных стержнями. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
6. *Годоров М. М.* О решении плоской задачи теории упругости для прямоугольника посредством двойных тригонометрических рядов. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 4.
7. *Угодчиков А. Г.* К решению плоской задачи теории упругости при произвольных объемных силах. Уч. зап. Горьковск. ун-та, 1966, вып. 80, ч. 1.
8. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М., «Наука», 1975.
9. *Мустелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
10. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Физматгиз, 1962.
11. *Абрамян Б. Л.* Об одном случае плоской задачи теории упругости для прямоугольника. Докл. АН АрмССР, 1955, т. 21, № 5.
12. *Mitchell L. H.* An experimental investigation of stress diffusion in non-buckling plates. Aeronaut. Res. Council Repts and Mem., 1955, No. 2878.
13. *Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г.* Принцип Сен-Венана и его использование в теории плит и оболочек. В сб.: Расчет пространственных конструкций, вып. 1. М., Машиностроител, 1950.