МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1979

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЯХ

В. В. КАБАНОВ

(Новосибирск)

Большая часть известных решений нелинейных задач тонких оболочек получена в рамках канонической теории пологих оболочек, область применимости которой ограничена не только малыми деформациями, но и малыми углами поворотов. При сильной неоднородности напряженно-деформированного состояния, вообще говоря, следует использовать уравнения общей нелинейной теории оболочек [1–4]. Однако практическое использование этих уравнений затруднено их громоздкостью из-за многих малых и несущественных для конечного результата слагаемых.

Для уточнения теории пологих оболочек в [5] получены уравнения в квадратичном приближении, которые можно использовать при малых углах поворотов и деформациях; в [6] получены уравнения для сильно деформированных пологих оболочек путем выделения в перемещениях жесткого поворота. Уравнения в [5–7] отнесены к недеформированной метрике оболочек. В [4] общие уравнения уточняются на случай учета сдвига в срединной поверхности оболочек и упрощаются для различных случаев среднего изгиба.

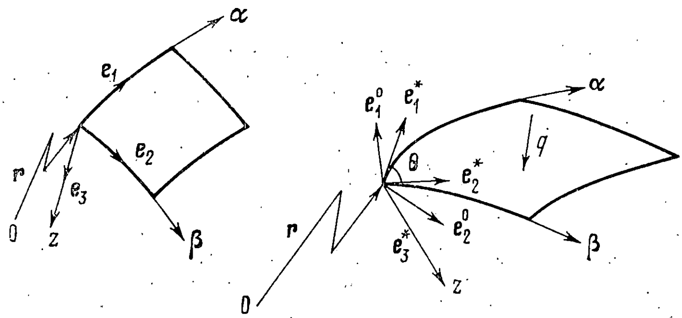
Ниже выводятся общие нелинейные уравнения при единственном допущении о малости деформаций по сравнению с единицей. Уравнения отнесены как к деформированной, так и к недеформированной метрике для случаев постоянной по направлению и следящей поверхностных нагрузок. Проводится упрощение уравнений для характерных случаев деформирования. Соответственно нелинейным уравнениям получены и уравнения устойчивости, пригодные для исследования как общих, так и местных форм потери устойчивости и при сильной изменяемости исходного напряженно-деформированного состояния оболочек. В случае умеренно больших углов поворотов эти уравнения не намного сложнее уравнений теории пологих оболочек.

1. Рассмотрим тонкую упругую оболочку, срединная поверхность которой отнесена к линиям кривизны (фиг. 1). Введем на срединной поверхности правую систему криволинейных ортогональных координат α, β, z. Примем следующие обозначения для геометрических характеристик поверхности: $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\alpha, \beta)$ — радиус-вектор точки; $\mathbf{r}_\alpha$, $\mathbf{r}_\beta$ — основные векторы (α, β в индексах означают дифференцирование, $\mathbf{r}_\alpha=\partial\mathbf{r}/\partial\alpha$); $A=|\mathbf{r}_\alpha|$, $B=|\mathbf{r}_\beta|$ — параметры Ляме; $\mathbf{e}_1=\mathbf{r}_\alpha/A$, $\mathbf{e}_2=\mathbf{r}_\beta/B$, $\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2$ — единичные векторы; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны; $k_1=R_1^{-1}$, $k_2=R_2^{-1}$ — главные кривизны.

Обозначим через u, v, w смещения точек поверхности по направлению ортов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ при деформации. Отмечая звездочкой характеристики деформированной поверхности, одинаковые по написанию с характеристиками недеформированной поверхности, получаем

$$
\begin{gathered}
\mathbf{r}^*=\mathbf{r}+\mathbf{U},\quad \mathbf{U}=u\mathbf{e}_1+v\mathbf{e}_2+w\mathbf{e}_3 \\
\mathrm{I}=g_{11}d\alpha^2+2g_{12}d\alpha d\beta+g_{22}d\beta^2,\quad \mathrm{II}=b_{11}d\alpha^2+2b_{12}d\alpha d\beta+b_{22}d\beta^2 \\
g_{11}=\mathbf{r}_\alpha^*=A_1^2,\ g_{12}=A_1B_1\cos\theta=\mathbf{r}_\alpha^*\mathbf{r}_\beta^*,\quad b_{11}=A_1\mathbf{e}_{1\alpha}^*\mathbf{e}_3^* \\
b_{12}=A_1\mathbf{e}_{1\beta}^*\mathbf{e}_3^*,\quad \mathbf{e}_1^*=\mathbf{r}_\alpha^*/A_1,\quad \mathbf{e}_3^*=(\mathbf{e}_1^*\times\mathbf{e}_2^*)/|\mathbf{e}_1^*\times\mathbf{e}_2^*| \\
k_1^*=b_{11}/g_{11},\quad k_{12}^*=b_{12}/(A_1B_1),\quad A^*=A_1,\ 1,\alpha,A\rightleftarrows 2,\beta,B
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Здесь $\mathbf{U}$ — вектор смещения точки; g_{ij}, b_{ij} $(i, j=1, 2)$ — коэффициенты первой (I) и второй (II) квадратичных форм; θ — угол между единичными векторами $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$ (угол $\pi/2-\theta$ характеризует сдвиг координатных линий при деформации, система координат α, β, z становится косоугольной); k_{12}^* — кручение.



Фиг. 1

Считая деформации малыми в сравнении с единицей, находим с точностью до величин второго порядка малости

$$
\begin{gathered}
A_1=A(1+\varepsilon_{11}),\ \mathbf{e}_1^*=\delta_1\mathbf{e}_1+\gamma_1\mathbf{e}_2+\omega_1\mathbf{e}_3,\quad \mathbf{e}_3^*=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3\\
\delta_1=1-\delta_{11},\quad \mathbf{e}_1\approx\delta_1\mathbf{e}_1^*-(\gamma_1+\omega_1\omega_2)\mathbf{e}_2^*+a_1\mathbf{e}_3^*,\quad \delta_{11}=\varepsilon_{11}-\varepsilon_1\\
g_{11}=A^2(1+2\varepsilon_{11}),\ \mathbf{e}_3=-\omega_1\mathbf{e}_1^*-\omega_2\mathbf{e}_2^*+a_3\mathbf{e}_3^*,\quad g_{12}=AB\varepsilon_{12}
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

$$
\begin{gathered}
b_{11}=A_1^2k_1^*,\quad b_{12}=A_1B_1k_{12}^*,\quad k_1^*=k_1+\chi_{11}\\
k_{12}^*=\chi_{12}+k\varepsilon_{12},\quad k={}^1/_2(k_1+k_2),\quad 1,\alpha,A\rightleftarrows 2,\beta,B\\
\varepsilon_{11}=\varepsilon_1+{}^1/_2(\varepsilon_1^2+\gamma_1^2+\omega_1^2),\quad \varepsilon_{12}=\gamma_2(1+\varepsilon_1)+\gamma_1(1+\varepsilon_2)+\omega_1\omega_2\ (\rightleftarrows)
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

$$
\varepsilon_1=\frac{u_\alpha}{A}+\frac{A_\beta}{AB}v-k_1w,\quad \gamma_1=\frac{1}{A}\left(v_\alpha-\frac{A_\beta}{B}u\right),\quad \omega_1=\frac{w_\alpha}{A}+k_1u\qquad(\rightleftarrows)
\tag{1.4}
$$

$$
\begin{gathered}
\chi_{11}=k_1(\delta_2-1-\varepsilon_{11})+A^{-1}(a_1\delta_{1\alpha}+a_2\gamma_{1\alpha}+a_3\omega_{1\alpha})+\\
+[A_\beta/(AB)]\omega_2-\varepsilon_{12}\{k_1\gamma_1+[A_\beta/(BA)]\omega_1\ (\rightleftarrows)\\
\chi_{12}=-k_2\gamma_2+B^{-1}(a_1\delta_{1\beta}+a_2\gamma_{1\beta}+a_3\omega_{1\beta})-\\
-[B_\alpha/(AB)]\omega_2-\varepsilon_{12}\{k-k_2\delta_1-[B_\alpha/(AB)]\omega_1\}\\
a_1=-\omega_1\delta_2+\gamma_1\omega_2,\quad a_3=\delta_1\delta_2-\gamma_1\gamma_2=1-\chi,\ \chi={}^1/_2(\omega_1^2+\omega_2^2)
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

где ε_{11}, $\varepsilon_{12}, \ldots$ — деформации срединной поверхности, ε_1, γ_1, $\omega_1, \ldots$ — линейные компоненты деформаций; χ_{11}, χ_{22}, χ_{12} — изменения кривизн и кручения.

Производные единичных векторов определяются формулами Гаусса — Вейнгартена

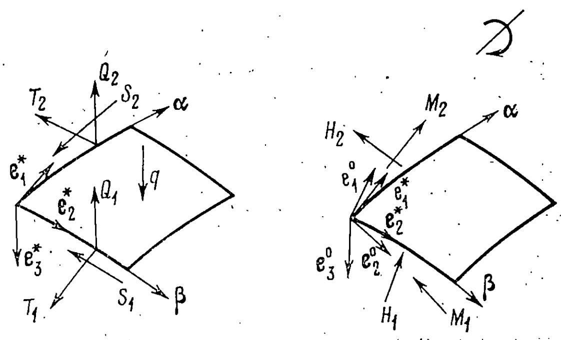
$$
\begin{gathered}
\mathbf{e}_{1\alpha}^*=\frac{A_\beta}{B}\varepsilon_{12}\mathbf{e}_1^*+\left[\frac{(B\varepsilon_{12})_\alpha}{B}-\frac{A_{1\beta}}{B_1}\right]\mathbf{e}_2^*+\frac{b_{11}}{A_1}\mathbf{e}_3^*\\
\mathbf{e}_{2\alpha}^*=\left(\frac{A_{1\beta}}{B_1}-\frac{B_\alpha}{B}\varepsilon_{12}\right)\mathbf{e}_1^*-\frac{A_\beta}{B}\varepsilon_{12}\mathbf{e}_2^*+\frac{b_{12}}{B_1}\mathbf{e}_3^*\quad(\rightleftarrows)\\
\mathbf{e}_{3\alpha}=\left(-\frac{b_{11}}{A_1}+\frac{b_{12}}{B_1}\varepsilon_{12}\right)\mathbf{e}_1^*+\left(\frac{b_{11}}{A_1}\varepsilon_{12}-\frac{b_{12}}{B_1}\right)\mathbf{e}_2^*
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

Индекс (⇄) означает, что недостающие формулы могут быть получены из приведенных перестановкой величин u, 1, α, A с величинами v, 2, β, B.

Деформации произвольной поверхности выражаются через деформации срединной поверхности зависимостями

$$\varepsilon_{11}{}^{z}=\varepsilon_{11}-z\chi_{11},\quad \varepsilon_{12}{}^{z}=\varepsilon_{12}-2z\chi_{12}\quad (\rightleftarrows) \tag{1.7}$$

2. Составим уравнения равновесия элемента $d\alpha d\beta$ срединной поверхности оболочки под действием внешней нагрузки и погонных усилий и моментов (фиг. 2). На гранях элемента $\alpha=0$, $\beta=0$ действуют векторы уси-



Фиг. 2

лий и моментов

$$\mathbf{R}_1=-(T_1\mathbf{e}_1{}^*+S_1\mathbf{e}_2{}^*+Q_1\mathbf{e}_3{}^*)B_1d\beta$$
$$\mathbf{G}_1=(H_1\mathbf{e}_1{}^\circ-M_1\mathbf{e}_2{}^\circ)B_1d\beta,\quad \mathbf{G}_2=(-H_2\mathbf{e}_2{}^\circ+M_2\mathbf{e}_1{}^\circ)A_1d\alpha$$

Векторы усилий направлены по единичным векторам $\mathbf{e}_1{}^*$, $\mathbf{e}_3{}^*$, а моментов — по сопряженным им единичным векторам $\mathbf{e}_1{}^\circ$, $\mathbf{e}_2{}^\circ$. При этом

$$\mathbf{e}_1{}^\circ=\mathbf{e}_1{}^*-\varepsilon_{12}\mathbf{e}_2{}^*,\quad \mathbf{e}_3{}^\circ=\mathbf{e}_3{}^*\quad (\rightleftarrows)$$

Векторы усилий на противоположных гранях элемента равны: $-(R_1+ +R_{1\alpha}d\alpha)$ (⇄). Вектор поверхностной следящей нагрузки определяется выражением

$$\mathbf{q}=\mathbf{q}^*A_1B_1d\alpha d\beta,\quad \mathbf{q}^*=q_1(\delta_k\mathbf{e}_1+\delta_c\mathbf{e}_1{}^*)+$$
$$+q_2(\delta_k\mathbf{e}_2+\delta_c\mathbf{e}_2{}^*)+q(\delta_k\mathbf{e}_3+\delta_c\mathbf{e}_3{}^*)$$

Здесь $\delta_c=0$, $\delta_k=1$ при консервативной нагрузке; $\delta_c=1$, $\delta_k=0$ при следящей нагрузке.

Равенство нулю главного вектора приводит к первому уравнению равновесия элемента

$$\mathbf{R}_{1\alpha}d\alpha+\mathbf{R}_{2\beta}d\beta-\mathbf{q}=0 \tag{2.1}$$

Запишем векторы моментов $\mathbf{G}_{11}=\mathbf{G}_1+\mathbf{r}^*\times\mathbf{R}_1$ (⇄) относительно начала декартовой системы координат от усилий и моментов, действующих на гранях $\alpha=0$, $\beta=0$.

Векторы моментов от усилий и моментов, действующих на противоположных гранях, равны: $-(\mathbf{G}_{11}+\mathbf{G}_{11\alpha}d\alpha)$ (⇄). Вектор момента поверхностной нагрузки $\mathbf{m}=\mathbf{r}^*\times\mathbf{q}$. Равенство нулю главного момента дает второе уравнение равновесия элемента

$$\mathbf{G}_{11\alpha}d\alpha+\mathbf{G}_{22\beta}d\beta-\mathbf{m}=0 \tag{2.2}$$

которое с учетом (2.1) преобразуется к виду

$$(\mathbf{G}_{1\alpha}+\mathbf{r}_\alpha^*\times\mathbf{R}_1)\,d\alpha+(\mathbf{G}_{2\beta}+\mathbf{r}_\beta^*\times\mathbf{R}_2)\,d\beta=0$$

Векторные уравнения (2.1), (2.2) эквивалентны шести скалярным уравнениям. Используя деривационные формулы (1.6) и приравнивая нулю выражения при векторах $\mathbf{e}_i^*$, $\mathbf{e}_3^*$, получаем уравнения равновесия в составляющих по осям, связанным с деформированным элементом поверхности

$$\begin{gathered}(B_1T_1)_\alpha+(AS_2)_\beta-[B_{1\alpha}-(A\varepsilon_{12})_\beta]T_2+A_\beta\varepsilon_{12}T_1+(A_{1\beta}-B_\alpha\varepsilon_{12})S_1-\\ -B_\alpha S_2\varepsilon_{12}-A_1B_1\{Q_1(k_1+\chi_{11})+Q_2[\chi_{12}+{}^1/_2\varepsilon_{12}(k_1-k_2)]-q_1+\\ +\delta_k[q_1\delta_{11}+q_2(\gamma_2+\omega_1\omega_2)+q\omega_1]\}=0\\ (B_1Q_1)_\alpha+(A_1Q_2)_\beta+A_1B_1[T_1(k_1+\chi_{11})+T_2(k_2+\chi_{22})+(S_1+S_2)\times\\ \times(\chi_{12}+k\varepsilon_{12})+q+\delta_k(q_1a_1+q_2a_2-q\chi)]=0\\ (B_1H_1)_\alpha+(A_1M_2)_\beta+B_{1\alpha}H_2-A_{1\beta}M_1-A_1B_1Q_2+B\varepsilon_{12\alpha}M_1+\\ +\varepsilon_{12}[AH_{2\beta}+(BM_1)_\alpha+B_\alpha M_1+ABQ_1]=0\quad(\rightleftarrows)\end{gathered}\tag{2.3}$$

Если при раскрытии уравнений (2.1), (2.2) выразить векторы $\mathbf{e}_i^*$, $\mathbf{e}_3^*$ через $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_3$, согласно (1.2), то аналогично можно получить уравнения в составляющих по осям, связанным с недеформированным элементом поверхности

$$\begin{gathered}(BT_{11})_\alpha+(AS_{21})_\beta+A_\beta S_1-B_\alpha T_{22}-AB(k_1Q_{11}-q_{11})=0\\ (BQ_{11})_\alpha+(AQ_{22})_\beta+AB(k_1T_{11}+k_2T_{22}+q_{33})=0\\ (BH_{11})_\alpha+(AM_{22})_\beta-A_\beta M_{11}+B_\alpha H_{22}-ABQ_{21}=0\quad(\rightleftarrows)\\ T_{11}=T_1(1+\varepsilon_1-\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+S_1\gamma_2+Q_1a_1\\ S_{12}=S_1(1+\varepsilon_2)+T_1\gamma_1+Q_1a_2,\quad H_{11}=H_1(1+\varepsilon_{22})\delta_1+M_1(\varepsilon_{12}-\gamma_2)\\ Q_{11}=Q_1(1+\varepsilon_{22})\chi-T_1\omega_1-S_1\omega_2,\quad M_{22}=M_2(1+\varepsilon_{11})\delta_1+H_2(\varepsilon_{12}-\gamma_2)\\ Q_{21}=Q_2\delta_1(1+\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+Q_1(\gamma_1+\omega_1\omega_2)+k_1(M_1\omega_2-H_1\omega_1)+(S_1-S_2)a_1\\ q_{11}=q_1+\delta_c(q_1\varepsilon_1+q_2\gamma_2+q\delta_2\omega_1)\\ q_{33}=q-\delta_c(q_1\omega_1+q_2\omega_2+q\chi)\quad(\rightleftarrows)\end{gathered}\tag{2.4}$$

К полученным уравнениям необходимо добавить соотношения упругости, которые примем в простейшем виде

$$T_1=K(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}),\quad S_1=S_2=S=K\nu_{12}\varepsilon_{12},\quad M_1=-D(\chi_{11}+\nu\chi_{22})\quad(\rightleftarrows)$$

$$H_1=H_2=H=-D(1-\nu)\chi_{12},\quad K=\frac{Eh}{1-\nu^2},\quad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$\nu_{12}=\frac{1-\nu}{2}$$

Здесь E, ν — модуль нормальной упругости и коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки. Уравнения (2.3), (2.4) выведены с учетом деформаций сдвига срединной поверхности оболочки. В этой мере они обобщают известные уравнения [1–3].

Системы уравнений (2.3), (2.4) и выражения деформаций (1.3), (1.5) громоздки. Для приложений целесообразно их упростить. Первое очевидное упрощение можно сделать, опустив в уравнениях и выражениях деформаций нелинейные слагаемые, содержащие множителями деформации сдвига. Второе упрощение можно сделать, опустив нелинейные слагаемые с множителями, содержащими углы поворотов γ_i элементов срединной поверхности вокруг нормали и равновеликие им величины. В тонких оболочках эти углы значительно меньше углов поворота нормали. В уравнениях следует также опустить деформации ε_{ij} в сравнении с единицей.

3. Для более полного упрощения полученных уравнений проведем их качественное исследование, следуя [4]. Рассмотрим оболочки с плавной геометрией, для которых можно считать

$$A\sim B\sim R,\quad A_\alpha\sim A_\beta\sim B_\alpha\sim B_\beta\leqslant R,\quad R=\min R_i$$

Введем коэффициенты изменяемости μ_i ($i=\alpha$, β) напряженно-деформированного состояния, показывающие, во сколько раз изменяются функции при дифференцировании. Пусть $\mu_i\sim\mu\gg1$, что имеет место при сильном изгибе. В этом случае в углах поворотов можно опустить слагаемые, содержащие u и v. Используя линейную часть нелинейных уравнений (2.3), получаем оценки для компонентов внешней нагрузки $q\sim kT_2$, $q_i\sim\sim kT_i\mu$, $T_i\sim Eh\varepsilon$, $k=R^{-1}$, где ε — величина деформаций ($\varepsilon_{ij}\sim\varepsilon$). Положим для определенности $h/R\sim\varepsilon$, $\mu\sim(R/h)^{1/2}$, $\omega_i\sim10(h/R)^{1/2}$, считая углы поворотов нормали порядка единицы. Тогда

$$a_i\sim\chi\sim\delta_{ii}\sim1,\ h\chi_{ii}\sim10h/R,\ M_i\sim Eh^2\varepsilon,\ Q_i\sim Eh\varepsilon(h/R)^{1/2}$$

Сравнивая с помощью полученных оценок слагаемые в уравнениях (2.3), (2.4) и опуская малые слагаемые, получаем соответственно уравнениям (2.3), (2.4) следующие упрощенные с точностью $O[(h/R)^{1/2}]$ системы уравнений:

$$\begin{gathered}(BT_1)_\alpha+(AS_2)_\beta-B_\alpha T_2+A_\beta S_1+AB\{q_1-\delta_k[q_1\delta_{11}+q_2(\gamma_2+\omega_1\omega_2)+\\+q\omega_1]\}=0\ (\rightleftarrows)\\(BQ_1)_\alpha+(AQ_2)_\beta+AB[k_1T_1+k_2T_2+T_1\chi_{11}+T_2\chi_{22}+(S_1+S_2)\chi_{12}+\\+q+\delta_k(q_1a_1+q_2a_2-q\chi)]=0\\(BH_1)_\alpha+(AM_2)_\beta-ABQ_2=0\ (\rightleftarrows)\end{gathered}\tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}(BT_1)_\alpha+(AS_2)_\beta-B_\alpha T_2+A_\beta S_1-(BT_1\delta_{11})_\alpha+(AS_2\varepsilon_1)_\beta+AB[k_1(Q_1\chi+\\+T_1\omega_1+S_1\omega_2)+q_1+\delta_c(q_1\varepsilon_1+q_2\gamma_2+q\delta_2\omega_1)]=0\ (\rightleftarrows)\\(BQ_1)_\alpha+(AQ_2)_\beta-[(Q_1\chi+T_1\omega_1+S_1\omega_2)B]_\alpha-[(Q_2\chi+T_2\omega_2+S_2\omega_1)A]_\beta+\\+AB[k_1T_1+k_2T_2-k_2T_2\delta_{22}+q-\delta_c(q\chi+q_1\omega_1+q_2\omega_2)]=0\\(BH_1)_\alpha+(AM_2)_\beta-A_\beta M_1+B_\alpha H_2+ABQ_2(1+\varepsilon_1)-(BH_1\delta_{11})_\alpha+(AM_2\varepsilon_1)_\beta=0\end{gathered}\tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon_{11}=\varepsilon_1+{}^1/_2(\varepsilon_1^2+\omega_1^2),\ \varepsilon_{12}=\gamma_1+\gamma_2+\omega_1\omega_2\\\chi_{11}=-k_{11}(\delta_{22}+\varepsilon_{11})+A^{-1}[\omega_1(\varepsilon_1\varepsilon_{1\alpha}+\omega_1\omega_{1\alpha})+\omega_{1\alpha}a_3+[A_\beta/(AB)]\omega_2\ (\rightleftarrows)\\\chi_{12}=k_2(\gamma_1+\omega_1\omega_2)+B^{-1}[\omega_1(\varepsilon_1\varepsilon_{1\beta}+\omega_1\omega_{1\beta})+\omega_{1\beta}a_3]-[B_\alpha/(AB)]\omega^2-k\varepsilon_{12}\\a_1=-\omega_1\delta_2,\ \omega_1=w_\alpha/A,\ \delta_1=1-\delta_{11},\ \delta_{11}={}^1/_2(\varepsilon_1^2+\omega_1^2)\end{gathered}\tag{3.3}$$

Рассмотрим далее случай, когда $\mu_1=(h/R)^{1/2}\ll1$, $\mu_2\sim1$. Используя линейную часть уравнений (3.1), находим $T_1=Eh\varepsilon$, $S=Eh\varepsilon\mu_1$, $T_2\sim Eh\varepsilon\mu_1^2$. Наибольшей из χ_{ij} является χ_{22}, поэтому $h\chi_{22}\sim\varepsilon$. Следовательно $\omega_2\sim1$, $w\sim\sim\varepsilon R^2/h$, $h\chi_{11}\sim\varepsilon\mu_1^2$, $h\chi_{12}\sim\varepsilon\mu_1$, $\omega_1\sim\mu_1$, $M_1\sim Eh^2\varepsilon\mu_1^2/10$, $M_2\sim0.1Eh^2\varepsilon$, $Q_1\sim\sim0.1Eh^2k\varepsilon\mu_1^3$, $Q_2\sim0.1Eh^2k\varepsilon$.

Сравнивая с помощью полученных оценок порядки слагаемых в уравнениях (2.3), (2.4), получаем упрощенные уравнения

$$\begin{gathered}(BT_1)_\alpha+(AS_2)_\beta+A_\beta S_1+ABq_1=0\\(AT_2)_\beta+(BS_1)_\alpha-A_\beta T_1+B_\alpha S_2+AB[-k_2Q_2+q_2-\delta_k(q\omega_2+q_2\delta_{22})]=0\\(AQ_2)_\beta+AB[k_1T_1+k_2T_2+T_1\chi_{11}+T_2\chi_{22}+(S_1+S_2)\chi_{12}+\\+q+\delta_k(q_2a_2-{}^1/_2q\omega_2^2)]=0\\(AM_2)_\beta-ABQ_2=0\ (\rightleftarrows)\end{gathered}\tag{3.4}$$

$$
\begin{gathered}
(BT_1)_\alpha+(AS_2)_\beta+A_\beta S_1+ABq_1+A_\beta S_1\varepsilon_2+ABk_1(T_1\omega_1+S_1\omega_2)=0\\
(AT_2)_\beta+(BS_1)_\alpha+B_\alpha S_2+ABq_2+ABk_2[-Q_2(1-{}^1/_2\omega_2{}^2)+T_2\omega_2+S_2\omega_1]=0\\
(AQ_2)_\beta-[A({}^1/_2Q_2\omega_2{}^2+T_2\omega_2+S_2\omega_1)]_\beta+AB[k_1T_1+k_2T_2-\\
-k_2T_2\delta_{22}+q-\delta_c({}^1/_2q\omega_2{}^2+q_2\omega_2)]=0\\
(AM_2)_\beta-ABQ_2=0\ (\rightleftarrows)\\
\chi_{11}=-k_1(\delta_{22}+\varepsilon_{11})+A^{-1}\omega_{1\alpha}(1-{}^1/_2\omega_2{}^2)+[A_\beta/(AB)]\omega_2\\
\chi_{22}=-k_2\varepsilon_{22}+B^{-1}[\omega_2(\varepsilon_2\varepsilon_{2\beta}+\omega_2\omega_{2\beta})+\omega_{2\beta}a_3]+[B_\alpha/(AB)]\omega_1\\
\chi_{12}=k_2(\gamma_1+\omega_1\omega_2)+B^{-1}\omega_{1\beta}(1-{}^1/_2\omega_2{}^2)-[B_\alpha/(AB)]\omega_2-k\varepsilon_{12}\\
\omega_1=(w_\alpha/A)+k_1u\ (\rightleftarrows)
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

В системах (3.4), (3.5) по сравнению с системами (3.1), (3.2) появились дополнительные слагаемые, учитывающие влияние моментов M_2 во втором уравнении. Эти слагаемые необходимы при деформациях оболочки с малым показателем изменяемости по окружности. Учитывая их в системах (3.1), (3.2) получим уравнения, пригодные для исследования в обоих рассмотренных случаях деформирования. Выражения изгибных деформаций (3.3) записаны с точностью до кубичных членов относительно смещений и их производных. В случае умеренно больших углов поворотов ($\omega_i\leqslant 0{,}5$) и малых деформаций ($\varepsilon_{ij}\ll\omega_i{}^2$) можно считать $\varepsilon_i\sim\omega_i{}^2$, $\varepsilon_i{}^2\ll\omega_i{}^2$ и в полученных выражениях сохранить только линейные и квадратичные по смещениям и их производным члены. Тогда

$$
\begin{gathered}
\chi_{11}=-k_1(\varepsilon_{11}+{}^1/_2\omega_2{}^2)+A^{-1}\omega_{1\alpha}+[A_\beta/(AB)]\omega_2,\qquad a_1=-\omega_1\\
\chi_{12}=k_2(\gamma_1+\omega_1\omega_2)+B^{-1}\omega_{1\beta}-[B_\alpha/(AB)]\omega_2-k\varepsilon_{12}
\end{gathered}
$$

С небольшой погрешностью можно также пренебречь квадратами углов поворотов по сравнению с единицей, положив $\delta_{11}=\chi=0$, $\delta_1=a_3=1$.

В таком варианте уравнения, отнесенные к осям недеформированного элемента оболочки, выводились в [5]. Уравнения для этого же случая, в которых на углы поворотов наложены более слабые ограничения, получены в [7].

4. Используя статический критерий устойчивости, представим полное напряженно-деформированное состояние оболочки в точке ветвления равновесных состояний в виде суммы исходного и дополнительного состояний. Вычитая из полных уравнений уравнения исходного состояния и производя линеаризацию оставшейся части уравнений, получаем соответственно уравнениям (3.1), (3.2) уравнения устойчивости

$$
\begin{gathered}
(BT_1)_\alpha+(AS_2)_\beta-B_\alpha T_2+A_\beta S_1+\underline{A(S_1{}^\circ+S_2{}^\circ)\varepsilon_{11\beta}}-\delta_kAB(q_1\delta_{11}+\\
+q_2(\gamma_2+a_{12})+q\omega_1]=0\\
(AT_2)\beta+(BS_1)_\alpha-A_\beta T_1+B_\alpha S_2-(AM_2)_\beta+\underline{A(T_2{}^\circ-T_1{}^\circ)\varepsilon_{11\alpha}+}\\
\underline{+(S_1{}^\circ+S_2{}^\circ)\varepsilon_{22\alpha}}-\delta_kAB[q_2\delta_{22}+q_1(\gamma_1+a_{12})+q\omega_2]=0\\
(BQ_1)_\alpha\overline{+(AQ_2)_\beta+AB[k_1T_2+k_2T_2+T_1{}^\circ\chi_{11}+T_2{}^\circ\chi_{22}+(S_1{}^\circ+S_2{}^\circ)\chi_{12}+}\\
+T_1\chi_{11}{}^\circ+T_2\chi_{22}{}^\circ+(S_1+S_2)\chi_{12}{}^\circ+\delta_k(q_1a_1+q_2a_2-q\chi)]=0\\
(BH_1)_\alpha+(AM_2)_\beta-ABQ_2=0\ (\rightleftarrows)\\
(BT_1)_\alpha+(AS_2)_\beta-B_\alpha T_2+A_\beta S_1-(BM_1)_\alpha-[B(T_1{}^\circ\delta_{11}+T_1\delta_{11}{}^\circ)]_\alpha+\\
+[A(S_2{}^\circ\varepsilon_1+S_2\varepsilon_1{}^\circ)]_\beta+AB[k_1(Q_1{}^\circ\chi+Q_1\chi^\circ+T_1{}^\circ\omega_1+T_1\omega_1{}^\circ+
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

$$+S_1^\circ\omega_2+S_1\omega_2^\circ)+\delta_c(q_1\varepsilon+q_2\gamma_2+qa_2)]=0 \quad (\rightleftarrows)$$

$$(BQ_1)_\alpha+(AQ_2)_\beta-[(Q_1^\circ\chi+Q_1\chi^\circ+T_1^\circ\omega_1+T_1\omega_1^\circ+S_1^\circ\omega_2+S_1\omega_2^\circ)B]_\alpha-$$

$$-[(Q_2^\circ\chi+Q_2\chi^\circ+T_2^\circ\omega_2+T_2\omega_2^\circ+S_2^\circ\omega_1+S_2\omega_1^\circ)A]_\beta+AB[k_1T_1+k_2T_2- \tag{4.2}$$

$$-k_2(T_2^\circ\delta_{22}+T_2\delta_{22}^\circ)-\delta_c(q\chi+q_1\omega_1+q_2\omega_2)]=0$$

$$(BH_1)_\alpha+(AM_2)_\beta-A_\beta M_1+B_\alpha H_2-AB(Q_2+Q_2^\circ\varepsilon_1+Q_2\varepsilon_1^\circ)-$$

$$-[B(H_1^\circ\delta_{11}+H_1\delta_{11}^\circ)]_\alpha+[A(M_2^\circ\varepsilon_1+M_2\varepsilon_1^\circ)]_\beta=0 \quad (\rightleftarrows)$$

$$\chi_{11}=-k_1(\delta_{22}+\varepsilon_{11})+A^{-1}[\omega_1(\varepsilon_1^\circ\varepsilon_{1\alpha}^\circ+\omega_1^\circ\omega_{1\alpha}^\circ)+\omega_1^\circ(\varepsilon_1^\circ\varepsilon_{1\alpha}+$$

$$+\varepsilon_1\varepsilon_{1\alpha}^\circ)+\omega_{1\alpha}a_3^\circ-\omega_{1\alpha}^\circ\chi]+[A_\beta/(AB)]\omega_2 \quad (\rightleftarrows)$$

$$\chi_{12}=k_2(\gamma_1+\omega_1\omega_2^\circ+\omega_2\omega_1^\circ)+B^{-1}(\omega_1(\varepsilon_1^\circ\varepsilon_{1\beta}^\circ+\omega_1^\circ\omega_{1\beta}^\circ)+$$

$$+\omega_1^\circ[\varepsilon_1^\circ\varepsilon_{1\beta}+\varepsilon_1\varepsilon_{1\beta}^\circ+\omega_1^\circ\omega_{1\beta}^\circ+\omega_1\omega_{1\beta}^\circ)+$$

$$+\omega_{1\beta}a_3^\circ-\omega_{1\beta}^\circ\chi]-k\varepsilon_{12}-[B_\alpha/(AB)]\omega_2$$

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_1+\delta_{11}, \quad \varepsilon_{12}=\gamma_1+\gamma_2+a_{12}, \quad \delta_{11}=\varepsilon_1^\circ\varepsilon_1+\omega_1^\circ\omega_1$$

$$a_{12}=\omega_1\omega_2^\circ+\omega_2\omega_1^\circ, \quad a_1=-\omega_1(1+\delta_{22}^\circ)$$

$$\omega_1=(\omega_\alpha/A)+k_1u, \quad \chi=\omega_1\omega_1^\circ+\omega_2\omega_2^\circ \quad (\rightleftarrows)$$

При умеренно больших углах поворотов

$$\delta_1^\circ=1, \quad \delta_{11}^\circ=0, \quad \delta_{11}=\omega_1^\circ\omega_1, \quad a=-\omega_1, \quad \chi=\chi^\circ=0$$

$$\chi_{11}=-k_1(\omega_2^\circ\omega_2+\varepsilon_{11})+A^{-1}\omega_{1\alpha}+[A_\beta/(AB)]\omega_2 \quad (\rightleftarrows)$$

$$\chi_{12}=k_2(\gamma_1+\omega_1^\circ\omega_2+\omega_1\omega_2^\circ)+B^{-1}\omega_{1\beta}-[B_\alpha/(AB)]\omega_2-k\varepsilon_{12}$$

В систему (4.1) дополнительно включены малые подчеркнутые слагаемые, которые необходимы в особых случаях общей потери устойчивости длинных круговых цилиндрических оболочек (случаи Гринхилла, Саусвелла — Тимошенко, потеря устойчивости оболочки от внутреннего давления) [4], когда в уравнениях сокращаются главные слагаемые.

Поступила 10 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М., ОНТИ, 1935.
2. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1946.
3. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, Таткнигоиздат, 1957.
4. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. М., «Наука», 1978.
5. *Шаповалов Л. А.* Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек. Инж. ж. МТТ, 1968, № 1.
6. *Шкутин Л. И.* Точная формулировка уравнений нелинейного деформирования тонких оболочек. В сб.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. Изд-во Горьковск. ун-та, 1977, № 7.
7. *Шаповалов Л. А.* Уравнения эластики тонкой оболочки при неосесимметричной деформации. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.