

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ  
СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ  
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ВДОЛЬ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ

Р. М. БЕРГМАН, С. А. СИДОРИН, П. Е. ТОВСТИК

(Баку, Ленинград)

Методом асимптотического интегрирования построены интегралы системы уравнений свободных колебаний шарнирно-опертой цилиндрической оболочки. Радиус кривизны оболочки и ее толщина предполагаются переменными вдоль направляющей. Рассмотрен случай наличия на отрезке интегрирования точки поворота. Предполагается, что изменяемость искомого напряженного и деформированного состояния велика.

1. Пусть на криволинейных краях  $\alpha=0$  и  $\alpha=l$  задано условие шарнирного опирания

$$T_1=v=w=G_1=0 \quad (1.1)$$

Тогда после разделения переменных

$$u(\alpha, \beta, t) = u(\beta) \cos k\alpha \sin \omega t, \quad v(\alpha, \beta, t) = v(\beta) \sin k\alpha \sin \omega t \\ k = n\pi/l, \quad w(\alpha, \beta, t) = w(\beta) \sin k\alpha \sin \omega t \quad (1.2)$$

и отбрасывания второстепенных членов система моментных уравнений свободных колебаний цилиндрической оболочки произвольного очертания с переменной толщиной вдоль направляющей принимает вид

$$\left[ -k^2 + \frac{1-\sigma}{2h} h' \frac{d}{d\beta} + \frac{1-\sigma}{2} \frac{d^2}{d\beta^2} + (1-\sigma^2)\lambda \right] u + \\ + \left[ \frac{1-\sigma}{2h} h' k + \frac{1+\sigma}{2} k \frac{d}{d\beta} \right] v - \frac{\sigma k}{R} w = 0 \\ \left[ -\frac{\sigma}{h} h' k - \frac{1+\sigma}{2} k \frac{d}{d\beta} \right] u + \left[ \frac{h' d}{h d\beta} + \frac{d^2}{d\beta^2} - \frac{1-\sigma}{2} k^2 + (1-\sigma^2)\lambda \right] v - \\ - \left[ \frac{h'}{Rh} + \frac{d}{d\beta} \left( \frac{1}{R} \right) \right] w = 0, \quad \lambda = \rho \omega^2 \frac{r^2}{E} \\ - \frac{\sigma}{R} k u + \frac{1}{R} \frac{dv}{d\beta} + \left[ -\frac{1}{R^2} - \frac{h^2 h_0^2}{3} \left( \frac{d^2}{d\beta^2} - k^2 \right) - \right. \\ \left. - 2hh'h_0^2 \frac{d}{d\beta} \left( \frac{d^2}{d\beta^2} - k^2 \right) + \lambda(1-\sigma^2) \right] w = 0 \quad (1.3)$$

Здесь приняты обозначения [1] и считается, что  $\alpha$  — безразмерная длина образующей срединной поверхности оболочки;  $\beta$  — безразмерная длина направляющей;  $n$  — целое положительное число;  $h = h(\beta)$  — безразмерная полутолщина оболочки, отнесенная к некоторому среднему без-

размерному ее значению  $h_0$  в области изменения  $\beta$  ( $h' = dh/d\beta$ );  $R = R(\beta)$  — безразмерный радиус кривизны поперечного сечения ( $R' = dR/d\beta$ );  $\lambda$  — безразмерный параметр частоты;  $\rho$  — плотность материала оболочки;  $\omega$  — частота колебаний;  $r$  — некоторое характерное для оболочки число, имеющее размерность длины. Все безразмерные величины, фигурирующие в задаче, отнесены к  $r$ . Предполагается, что  $R(\beta)$  и  $h(\beta)$  — произвольные, достаточно гладкие функции.

2. Асимптотическое интегрирование системы (1.3) будем вести, исходя из предположений, что параметр  $h_0$  является малым, а параметр  $k$ , функции  $h(\beta)$ ,  $R(\beta)$  и их производные соизмеримы с единицей. Положим

$$\lambda \sim h_0^\kappa, \quad -2 < \kappa \leq 1 \quad (2.1)$$

и будем рассматривать всевозможные  $\kappa$  из этого промежутка.

Экспоненциальное представление решений системы (1.3) ищем в виде

$$x_j(\beta, h_0) = \sum_{h=0}^{\infty} x_j^{(h)}(\beta, h_0) \exp \int P_j(\beta, h_0) d\beta \quad (j=1, 2, \dots, 8) \quad (2.2)$$

где  $x$  заменяет любую из функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Функции  $P_j, x_j^{(k)}$  могут зависеть также от  $\lambda$ . Будем искать их такими, чтобы были выполнены следующие условия при  $h_0 \rightarrow 0$ :

$$|P_j| \gg 1, \quad x_j^{(k+1)} = o(x_j^{(k)}) \quad (2.3)$$

первое из которых обеспечивает большую изменяемость решения (2.2), а второе говорит о том, что ряд (2.2) является асимптотическим. Потребуем также, чтобы функции  $x_j^{(k)}$  существенно не возрастали при дифференцировании. Представление (2.2) годится при любых  $\kappa$  из интервала (2.1). При некоторых частных значениях  $\kappa$  оказывается возможным использовать более простое асимптотическое представление

$$x_j(\beta, h_0) = \varepsilon_j^{-\gamma_j(x)} \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon_j^h X_j^{(h)}(\beta) \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon_j} \int f_j(\beta) d\beta \right\}, \quad \varepsilon_j = h_0^{q_j} C_j \quad (2.4)$$

где функции  $f_j$  и  $X_j^{(k)}$  уже не зависят от  $h_0$ . Здесь  $\gamma_j(x)$  — показатель интенсивности,  $q_j$  — показатель изменяемости [1], а  $C_j$  — постоянная порядка единицы.

Для представления (2.2) также вводим показатели интенсивности и изменяемости

$$x_j^{(0)} \sim h_0^{-\gamma_j(x)}, \quad P_j \sim h_0^{-q_j} \quad (2.5)$$

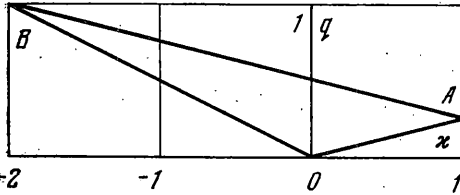
Ясно, что показатель интенсивности одной из неизвестных функций может быть задан произвольно.

После подстановки (2.2) в (1.3) получаем уравнение восьмой степени для определения функций  $P_j$ :

$$\frac{h_0^2 h^2}{3(1-\sigma^2)} P^8 - \lambda P^4 - (1+\sigma)(3-\sigma)\lambda^2 P^2 - 2(1+\sigma)(1-\sigma^2)\lambda^3 + \frac{k^4}{R^2(\beta)} = 0 \quad (2.6)$$

в котором отброшены лишь члены, малые при всех  $\lambda$  из области (2.1).

3. Проведем анализ корней уравнений (2.6) при различных  $\lambda$ . При этом будем особо отмечать чисто мнимые корни  $P_j$ , ибо им соответствуют осциллирующие в направлении  $\beta$  интегралы.



При  $\kappa > 1$  уравнение (2.6) не имеет чисто мнимых корней, поэтому этот случай подробнее не рассматривается.

Для  $-2 < \kappa \leq 1$  показатели изменчивости  $q_j$  изображены на фигуре. При  $\kappa = 1$  (точка  $A$ ) все восемь корней уравнения (2.6) имеют одинаковый порядок ( $q = 1/4$ ) и приближенно могут быть найдены из уравнения

$$\frac{h_0^2 h^2}{3(1-\sigma^2)} P^8 - \lambda P^4 + \frac{k^4}{R^2(\beta)} = 0 \quad (3.1)$$

При  $-2 < \kappa < 1$  по своему порядку корни уравнения (2.6) делятся на две группы по четыре корня в каждой. Четыре корня (величина  $q$  показана отрезком  $AB$ ) приближенно могут быть найдены из уравнения

$$\frac{h_0^2 h^2}{3(1-\sigma^2)} P^4 - \lambda = 0 \quad \text{при } -2 < \kappa < 1 \quad (3.2)$$

Четыре других корня приближенно находятся из уравнений

$$-\lambda P^4 + \frac{k^4}{R^2(\beta)} = 0 \quad \text{при } 0 < \kappa < 1 \quad (3.3)$$

$$P^4 + \lambda(1+\sigma)(3-\sigma)P^2 + 2(1+\sigma)(1-\sigma^2)\lambda^3 = 0 \quad \text{при } -2 < \kappa < 0 \quad (3.4)$$

причем величины  $q$ , соответствующие этим корням, показаны на фигуре отрезками  $OA$  и  $OB$ .

При  $\kappa = 0$  получаем  $q = 0$  и для получения четырех интегралов в этом случае асимптотические методы неприемлемы. Нужно численно интегрировать систему (1.3) при  $h_0 = 0$ .

Заметим, что среди корней уравнений (3.2) и (3.3) имеется по одной паре чисто мнимых корней, а уравнение (3.4) имеет две пары. Следовательно, уравнение (2.6) при  $0 < \kappa < 1$  имеет две пары чисто мнимых корней, а при  $-2 < \kappa < 0$  будет три пары.

Классификация интегралов динамических уравнений тонких оболочек дана в [2]. Как показано ниже, в соответствии с этой классификацией интегралы, соответствующие корням (3.2), являются квазиперечными с большой изменчивостью. Корням (3.3) соответствуют квазиперечные интегралы с малой изменчивостью, а корням (3.4) — квазитангенциальные интегралы. В точке  $A$  (фигура) изменчивость всех интегралов одинакова, поэтому назовем их интегралами с промежуточной изменчивостью.

4. Построение интегралов начнем с квазитангенциальных интегралов. Уравнение (3.4) имеет корни

$$P_1^2 = -2(1+\sigma)\lambda, \quad P_2^2 = -(1-\sigma^2)\lambda \quad (4.1)$$

Непосредственная подстановка рядов (2.2) в систему (1.3) показывает, что несколько первых членов этих рядов имеют вид (2.4) (число этих членов не менее двух и зависит от величины  $\kappa$ ).

Положим  $\varepsilon_{1,2} = \lambda^{-1/2}$ . Тогда интегралы, соответствующие корням (4.1), могут быть представлены в виде первых слагаемых рядов (2.4), причем

$$f_1^2 = -2(1+\sigma), \quad \gamma_1(u) = 0, \quad U_1^{(0)} = h^{-1/2}(\beta), \quad \gamma_1(v) = -1 \quad (4.2)$$

$$V_1^{(0)} = -\frac{kf_1}{2(1+\sigma)} U_1^{(0)}, \quad \gamma_1(w) = -2, \quad W_1^{(0)} = \frac{1+\sigma}{R(\beta)} k U_1^{(0)}$$

$$f_2^2 = -(1-\sigma^2), \quad \gamma_2(u) = -1, \quad U_2^{(0)} = -\frac{kf_2}{1-\sigma^2} V_2^{(0)}, \quad \gamma_2(v) = 0 \quad (4.3)$$

$$V_2^{(0)} = h^{-1/2}(\beta), \quad \gamma_2(w) = -1, \quad W_2^{(0)} = -\frac{f_2 V_2^{(0)}}{(1-\sigma^2)R(\beta)}$$

Интегралы (4.2) могут быть названы квазипродольными, ибо  $|u_1| \gg |v_1|, |w_1|$ ; аналогично (4.3) — квазикрутильные интегралы, ибо  $|v_2| \gg |u_2|, |w_2|$ .

Таким образом, уже при построении первого приближения интегралов квазитангенциальных колебаний цилиндрической оболочки переменной толщины учет переменности последней является обязательным.

Не представляет труда построить и остальные члены рядов (2.2) или (2.4), однако будем ограничиваться только главными членами.

5. Четыре интеграла квазипоперечных колебаний с большой изменчивостью представим в виде (2.2), где функции  $P_j$  удовлетворяют уравнению (2.6), а приближенные их значения могут быть найдены из (3.2). Для функций интенсивности имеем формулы

$$w_j^{(0)} = [h(\beta)]^{-3/4}, \quad u_j^{(0)} = -\frac{k}{R(\beta)P_j^2} w_j^{(0)},$$

$$v_j^{(0)} = \frac{1}{R(\beta)P_j} w_j^{(0)} \quad (j=5,6,7,8) \quad (5.1)$$

При этом показатель изменчивости и показатели интенсивности таковы:  $q_j = 1/2 - \kappa/4$ ,  $\gamma(w) = 0$ ,  $\gamma(u) = -2$ ,  $\gamma(v) = -1$ . Заметим, что при  $\kappa < 6/7$  для вычисления  $P_j$  можно пользоваться приближенным уравнением (3.2). При  $6/7 \leq \kappa < 1$  следует пользоваться формулами, полученными в п. 8 для  $\kappa = 1$ .

При больших  $\lambda$  точность первой из формул (5.1) снижается в связи с неточностью самой системы (1.3), которая не учитывает эффектов типа сдвига и инерции вращения элемента оболочки, нормального к срединной поверхности. Лишь при  $\kappa > -2/3$  можно пользоваться первой из формул (5.1), однако это обстоятельство не препятствует приближенному определению частот колебаний вплоть до  $\kappa > -2$ , исходя из системы (1.3) и формул (5.1).

6. Четыре интеграла квазипоперечных колебаний с малой изменчивостью при  $0 < \kappa < 1$  также представим в виде (2.2), где функции  $P_j$  удовлетворяют уравнению (2.6), а их приближенные значения — (3.3). При  $0 < \kappa < 8/9$  находим

$$w_j^{(0)} = R^{-1/4} h^{-1/2}, \quad q_j = \kappa/4 \quad (j=5,6,7,8) \quad (6.1)$$

а формула для  $u_j^{(0)}$ ,  $v_j^{(0)}$  та же, что и в (5.1).

При  $8/9 \leq \kappa < 1$  следует пользоваться формулами из п. 8.

7. Если оболочка является замкнутой, то уравнением частот служит условие возврата, которое в первом приближении дает

$$\int_0^{\beta_0} |P_j| d\beta = 2k\pi \quad (7.1)$$

где  $P_j$  — один из чисто мнимых корней уравнения (2.6),  $k$  — целое число. В зависимости от того, какой корень (2.6) взят, уравнение (7.1) дает частоты квазитангенциальных либо квазиперечных колебаний с большой или малой изменяемостью.

Каждому  $\lambda$  корню (7.1) соответствует, вообще говоря, две близкие одна к другой частоты собственных колебаний [3].

Для открытых оболочек при  $-2 < \kappa < 0$  интегралы квазитангенциальных и квазиперечных колебаний с большой изменяемостью взаимно дополняют один другой. Точно так же при  $0 < \kappa < 1$  взаимно дополнительными являются интегралы квазиперечных колебаний с большой и малой изменяемостью. При решении полной краевой задачи возможно ее асимптотическое расщепление на более простые задачи, о чем подробнее сказано в [2, 4].

8. Пусть  $\kappa = 1$ . В этом случае все восемь интегралов системы (1.3) имеют показатель изменяемости  $q = 1/4$  (см. точку A на фигуре). Положим

$$\varepsilon = \left( \frac{h_0^2}{3(1-\sigma^2)} \right)^{1/8}, \quad \lambda = \lambda' \varepsilon^4 \quad (8.1)$$

и будем искать интегралы с промежуточной изменяемостью в виде рядов (2.4). Тогда функции  $f_j(\beta)$  удовлетворяют уравнению

$$h^2(\beta) f'' - \lambda' f^4 + k^4/R^2(\beta) = 0 \quad (8.2)$$

Для показателей и функций интенсивности находим

$$W_j^{(0)} = f_j^{1/2} D^{-1/4} h, \quad U_j^{(0)} = -\frac{k}{R f_j^2} W_j^{(0)}, \quad V_j^{(0)} = \frac{W_j^{(0)}}{f_j R}, \quad \gamma(w) = 0, \quad \gamma(u) = -2$$

$$\gamma(v) = -1, \quad f_j = \left( \frac{\lambda'}{2h^2} \pm D^{1/2} \right)^{1/4}, \quad D = \frac{\lambda'^2}{4h^4} - \frac{k^4}{R^2 h^2} \quad (8.3)$$

При  $\lambda' > \lambda^+ = \max \{2k^2 h/R\}$  среди интегралов (2.4) имеются две пары осциллирующих. Если при этом оболочка замкнута, то уравнениями частот будут уравнения (7.1) при  $P_j = \varepsilon^{-1} f_j$ . При  $\lambda' < \lambda^- = \min \{2k^2 h/R\}$  все интегралы (2.4) являются функциями типа краевого эффекта и уравнение частот корней не имеет.

Обратимся к случаю  $\lambda^- \leq \lambda' \leq \lambda^+$ . Здесь при некоторых  $\beta = \beta_*$  (называемых точками поворота) корни уравнения (8.2) становятся попарно кратными, а ряды (2.4) — непригодными для асимптотического представления интегралов.

Действительно, при  $\beta = \beta_*$  будет  $D = 0$  и функции  $w_j^{(0)}$  обращаются в бесконечность.

9. Построим интегралы системы (1.3) в окрестности точки поворота  $\beta = \beta_*$ . При этом для простоты вместо системы (1.3) рассмотрим систему

$$\frac{d^2}{d\beta^2} \left( \frac{2Eh^3 h_0^3}{3(1-\sigma^2)} \frac{d^2 w}{d\beta^2} \right) - 2Eh h_0 \lambda w + \frac{k^2}{r^2 R} C = 0$$

$$-\frac{r^2 k^2}{R} w + \frac{d^2}{d\beta^2} \left( \frac{1}{2Eh h_0} \frac{d^2 C}{d\beta^2} \right) = 0 \quad (9.1)$$



необходимые для вычисления главных членов асимптотики) получаем следующие четыре системы уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz_{j+1}}{d\beta} &= \frac{1}{2} (f_{j+1} + f_{j+2}) z_{j+1} + z_{j+2} \\ \varepsilon \frac{dz_{j+2}}{d\beta} &= \left[ \frac{1}{4} (f_{j+1} - f_{j+2})^2 + \frac{\varepsilon}{2} (f_{j+1} - f_{j+2}) (b_{j+1}^{(1)} - b_{j+2}^{(1)}) \right] z_{j+1} + \\ &+ \left[ \frac{1}{2} (f_{j+1} + f_{j+2}) + \varepsilon \left( b_{j+1}^{(1)} + b_{j+2}^{(1)} + \frac{d}{d\beta} \ln(f_{j+1} - f_{j+2}) \right) \right] z_{j+2} \quad (j=0, 2, 4, 6) \end{aligned} \quad (9.7)$$

Из формулы (9.6), а также из уравнения (8.2) следует, что коэффициенты системы (9.7) голоморфны при  $\beta = \beta_*$  и что  $z_3 = \bar{z}_1$ ,  $z_4 = \bar{z}_2$ .

Полагая, что в точке  $\beta_*$  выполнено условие  $D'(\beta_*) \neq 0$  ( $D' = dD/d\beta$ ), для восьми значений  $f_j$  получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} f_1 &= i\psi + i\varphi\sqrt{\beta - \beta_*}, & f_2 &= i\psi - i\varphi\sqrt{\beta + \beta_*} \\ f_3 &= -i\psi - i\varphi\sqrt{\beta - \beta_*}, & f_4 &= -i\psi + i\varphi\sqrt{\beta - \beta_*} \\ f_5 &= \psi + \varphi\sqrt{\beta - \beta_*}, & f_6 &= \psi - \varphi\sqrt{\beta - \beta_*} \\ f_7 &= -\psi - \varphi\sqrt{\beta - \beta_*}, & f_8 &= -\psi + \varphi\sqrt{\beta - \beta_*} \quad (i^2 = -1) \end{aligned}$$

где  $\varphi = \varphi(\beta)$  и  $\psi = \psi(\beta)$  голоморфны при  $\beta = \beta_*$ , причем  $\varphi(\beta_*) > 0$ ,  $\psi(\beta_*) > 0$ . Считаем, что  $\sqrt{\beta - \beta_*} > 0$  при  $\beta > \beta_*$ .

Рассмотрим систему уравнений (9.7) для  $z_1$  и  $z_2$  ( $j=0$ ). Следуя [5], с учетом формул (9.4) получим

$$\xi_k = \left( \frac{c_{k1}^{(0)} - c_{k2}^{(0)}}{2} \chi + \varepsilon \frac{c_{k1}^{(0)} - c_{k2}^{(0)}}{f_1 - f_2} \frac{d\chi}{d\beta} \right) \exp \left( \int_{\beta_*}^{\beta} \frac{f_1 + f_2}{2\varepsilon} d\beta \right) \quad (k=1, 2, \dots, 8) \quad (9.8)$$

где  $c_{kj}^{(0)}$  — элементы матрицы  $C^{(0)}(\beta)$ , а  $\chi$  — решение уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{d^2\chi}{d\beta^2} + \varepsilon^2 A(\beta) \frac{d\chi}{d\beta} + [B_0(\beta) + \varepsilon B_1(\beta)] \chi &= 0 \\ A(\beta) &= - \left[ b_1^{(1)} + b_2^{(1)} + \frac{d}{d\beta} \ln(f_1 - f_2) \right] \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$B_0(\beta) = -1/4 (f_1 - f_2)^2, \quad B_1(\beta) = -1/2 (b_1^{(1)} - b_2^{(1)}) (f_1 - f_2)$$

Интегралы уравнения (9.9) имеют вид

$$\chi^{(i)} = \alpha_0(\beta) \gamma^{(i)}[\delta(\beta)] + B_0(\beta) \frac{d\gamma^{(i)}}{d\delta} \quad (i=1, 2) \quad (9.10)$$

где  $\gamma^{(i)}$  — функция Эри, т. е. решение уравнения

$$d^2\gamma/d\delta^2 + \delta\gamma = 0 \quad (9.11)$$

$$\delta(\beta) = \left[ \frac{3}{2\varepsilon} \int_{\beta_*}^{\beta} B_0^{1/2}(t) dt \right]^{2/3}, \quad \alpha_0(\beta) = \varepsilon^{1/3} \left( \frac{d\delta}{d\beta} \right) (T_1 + T_2)$$

$$B_0(\beta) = \frac{1}{i} B_0^{-1/2} \left( \frac{d\delta}{d\beta} \right)^{1/2} (T_1 - T_2) \cdot (i^2 = -1), \quad T_k = \frac{(F'_{fk})^{-1/2}}{f_k - f_l} \quad (k, l = 1, 2; k \neq l)$$

В соотношениях (9.10), (9.11) считается, что  $\delta(\beta) > 0$  при  $\beta > \beta_*$ . Имея в виду следующие формулы для функции Эри, приведенные, например,

в. [5]:

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)}(z) &= A_i(-z), \quad \gamma^{(2)}(z) = B_i(-z) \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} |z|^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) &\leftarrow A_i(z) \rightarrow \frac{z^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{2z^{3/2}}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} |z|^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) &\leftarrow B_i(z) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(\frac{2z^{3/2}}{3}\right) \end{aligned}$$

где слева стоит представление  $A_i$  и  $B_i$  при  $z < 0$ , а справа — при  $z > 0$ , из формул (9.9) получаем асимптотические выражения функций  $\xi_j$  при  $|\delta| \gg 1$  в виде линейных комбинаций решений (9.5), имеющих силу вне некоторой окрестности, содержащей точку поворота

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1/6} (2\pi)^{-1/2} c_{j2}^{(0)} y_2 &\leftarrow \xi_j^{(1)} \rightarrow \varepsilon^{-1/6} (2\pi)^{-1/2} (c_{j1}^{(0)} y_1 + c_{j2}^{(0)} y_2) \\ \varepsilon^{-1/6} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2} c_{j1}^{(0)} y_1 &\leftarrow \xi_j^{(2)} \rightarrow i\varepsilon^{-1/6} (2\pi)^{-1/2} (c_{j1}^{(0)} y_1 - c_{j2}^{(0)} y_2) \quad (i^2 = -1) \end{aligned} \quad (9.12)$$

Здесь справа стоят асимптотические выражения  $\xi_j$  при  $\beta > \beta_*$ , а слева — при  $\beta < \beta_*$ . Еще два решения можно получить из (9.8), (9.12), если перейти к комплексно-сопряженным величинам и учесть

$$\bar{f}_1 = f_3, \bar{f}_2 = f_4 \quad (\beta > \beta_*); \quad \bar{f}_1 = f_4, \bar{f}_2 = f_3 \quad (\beta < \beta_*).$$

Аналогично тому, как были получены формулы (9.12), находим

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1/6} (2\pi)^{-1/2} (c_{j5}^{(0)} y_5 + c_{j6}^{(0)} y_6) &\leftarrow \xi_j^{(5)} \rightarrow \varepsilon^{-1/6} (2\pi)^{-1/2} c_{j6}^{(0)} y_6 \\ i\varepsilon^{-1/6} (2\pi)^{-1/2} (c_{j5}^{(0)} y_5 - c_{j6}^{(0)} y_6) &\leftarrow \xi_j^{(6)} \rightarrow \varepsilon^{-1/6} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2} c_{j5}^{(0)} y_5 \end{aligned} \quad (9.13)$$

Асимптотические формулы для  $\xi_j^{(7)}$  и  $\xi_j^{(8)}$  получаются из формул (9.13) заменой индекса пять на семь, индекса шесть на восемь.

Приведенные асимптотические выражения для  $\xi_j^{(i)}$  ( $i, j=1, 2, \dots, 8$ ) слева и справа от точки поворота дают возможность решать краевые задачи на  $[0, \beta_0]$ , если точка поворота  $\beta_*$  расположена не слишком близко к краям  $\beta=0$  и  $\beta=\beta_0$ .

10. Рассмотрим один из случаев, когда уравнение частот не зависит от граничных условий при  $\beta=0$  и  $\beta=\beta_0$ .

Пусть  $g(\beta) = R(\beta)/h(\beta)$  имеет единственный максимум при  $\beta=\beta_z$ . Возьмем  $\lambda' > \lambda^- = 2h^2/g(\beta_z)$ , такое, что имеются две точки поворота  $\beta_*^{(1)}$  и  $\beta_*^{(2)}$ , причем  $0 < \beta_*^{(1)} < \beta_z < \beta_*^{(2)} < \beta_0$ . Тогда при  $\beta_*^{(1)} < \beta < \beta_*^{(2)}$  имеем  $D > 0$ , и система (9.1) имеет четыре осциллирующих интеграла.

При  $\beta < \beta_*^{(1)}$  и  $\beta > \beta_*^{(2)}$  все интегралы системы (9.1) экспоненциально возрастают или затухают (подобно интегралам простого краевого эффекта).

Уравнениями частот будет условие, которое обеспечивает существование осциллирующих при  $\beta_*^{(1)} < \beta < \beta_*^{(2)}$  интегралов, затухающих как справа, так и слева от этого промежутка.



Указанное условие имеет вид

$$\int_{\beta_*^{(1)}}^{\beta_*^{(2)}} \frac{|f_1 - f_2|}{2\varepsilon} d\beta = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (10.1)$$

причем это уравнение дает в нулевом приближении частоты колебаний.

Найдем приближенное выражение для наименьшей (при данном  $k$ ) частоты колебаний в предположении, что  $g'(\beta_3) = 0$ ,  $g''(\beta_3) < 0$  ( $g' = dg/d\beta$ ).

Вычисляя приближенные корни  $f_1$  и  $f_2$  уравнения (8.2), из (10.1) при  $m=0$  получаем

$$\mathcal{N} = \frac{2k^2}{g(\beta_3)} \{1 + 2\varepsilon k^{-1/2} g^{-1/4}(\beta_3) [-g''(\beta_3)]^{1/2} h^{1/2}(\beta_3)\}$$

Поступила 18 IV 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
2. Гольденвейзер А. Л. Приближенные методы исследования свободных колебаний тонких оболочек. ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
3. Бергман Р. М. Интегрирование уравнений колебаний некруговой цилиндрической оболочки. Тр. VIII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1973.
4. Бергман Р. М. Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 6.
5. Товстик П. Е. Интегралы уравнений колебаний оболочки вращения с большим числом волн по параллели при наличии кратной точки поворота. В сб.: Исследования по упругости и пластичности, вып. 9. Изд-во ЛГУ, 1973.