

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО БАКА С ЖИДКОСТЬЮ

Е. И. ОБРАЗЦОВА, Ф. Н. ШКЛЯРЧУК

(Москва)

Рассматриваются колебания тонкостенного цилиндрического бака с упругим днищем в виде произвольной оболочки вращения, который частично заполнен идеальной сжимаемой жидкостью.

Определены амплитуды нелинейных колебаний при главном параметрическом резонансе по одной из неосесимметричных форм, которая возникает вследствие динамической неустойчивости цилиндрической оболочки при продольных гармонических колебаниях бака.

Области динамической неустойчивости цилиндрической оболочки с жестким плоским дном при продольном возбуждении для случая полного заполнения жидкостью определялись в [1], а для случая частичного заполнения — в [2]. В [3] определялись области динамической неустойчивости несущего цилиндрического бака, частично заполненного жидкостью и имеющего произвольное упругое днище.

Нелинейные параметрические колебания цилиндрической оболочки с жидкостью, имеющей плоское жесткое дно, изучались экспериментально в [1, 4, 5] и теоретически — в [1, 6].

Экспериментальные исследования [1, 4, 5], а также теоретические решения в линеаризованной постановке [1-3] показывают, что при гармонических осесимметричных колебаниях жидкости в тонких цилиндрических оболочках, не подкрепленных кольцевыми ребрами жесткости, в диапазоне низших собственных частот упругих колебаний легко возбуждаются различные субгармонические неосесимметричные формы колебаний с большими амплитудами. Из них доминирующими являются формы главного параметрического резонанса, близкие к формам собственных неосесимметричных колебаний оболочки с жидкостью и возникающие при частотах возбуждения, близких к удвоенным собственным частотам.

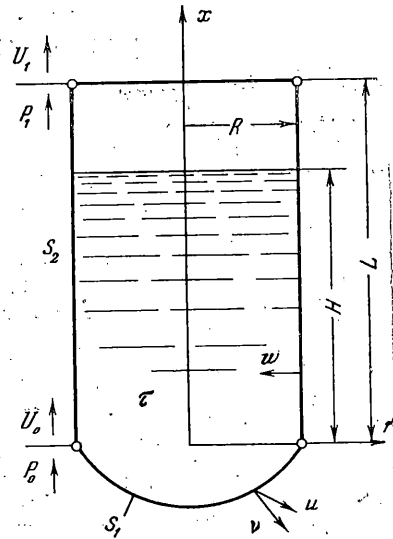
Основной причиной возникновения параметрических колебаний являются периодические во времени окружные усилия в срединной поверхности цилиндрической оболочки, вызванные изменением гидродинамического давления при продольных колебаниях бака. При этом определенную роль играют и осевые усилия, которыми несущая цилиндрическая оболочка нагружается по торцам при продольных колебаниях системы. Эти усилия, с одной стороны, непосредственно сами представляют параметрическую нагрузку и, с другой стороны, за счет эффекта Пуассона они вызывают дополнительные нормальные перемещения оболочки, что приводит к изменению гидродинамического давления и окружных усилий.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим тонкостенный цилиндрический бак с упругим днищем в виде произвольной оболочки вращения, который частично заполнен идеальной сжимаемой жидкостью (фиг. 1). На нижнем и верхнем торцах цилиндрическая оболочка бака нагружается продольными реакциями  $P_0(t)$  и  $P_1(t)$  со стороны несущего тела, совершающего вместе с баком продольные колебания. Продольные перемещения торцов бака обозначим через  $U_0(t)$  и  $U_1(t)$ .

В случае динамической неустойчивости цилиндрической оболочки бака при осесимметричных колебаниях появляется неосесимметричная форма колебаний, амплитуда которой быстро возрастает и затем вследствие нелинейности системы устанавливается на режиме предельного цикла. При этом основную роль играет геометрическая нелинейность тонкой оболочки, которая проявляется при амплитудах нормальных перемещений по неосесимметричной форме, имеющих порядок толщины оболоч-

ки. Для жидкости такие перемещения являются малыми и поэтому гидродинамическую задачу можно рассматривать в линейной постановке [1, 6].

Будем считать, что нижний и верхний шпангоуты являются абсолютно жесткими и цилиндрическая оболочка соединена с ними шарнирно. При этих условиях взаимодействие между цилиндрической оболочкой и оболочкой днища осуществляется только за счет жидкости и для неосесимметричных форм при  $n \geq 2$  ( $n$  — число



Фиг. 1

волн в окружном направлении) оно мало, поскольку при колебаниях по этим формам движение жидкости происходит в основном в слоях, прилегающих к поверхности оболочки. Вследствие этого неосесимметричные формы колебаний бака при  $n \geq 2$  разделяются на формы преимущественных колебаний цилиндрической оболочки и формы преимущественных колебаний оболочки днища с прилегающими к ним слоями жидкости. При этом, если оболочки имеют толщины одного порядка, то низшим частотам соответствуют неосесимметричные формы преимущественных колебаний цилиндрической оболочки бака.

Будем полагать, что при динамической неустойчивости бака при осесимметричных колебаниях возбуждается только одна из неосесимметричных форм колебаний его цилиндрической оболочки. В результате цилиндрическая оболочка бака совершает нелинейно-связанные осесимметричные колебания, а оболочка днища — в основном осесимметричные колебания. Далее будем считать амплитуду осесимметричных колебаний малой, а амплитуду неосесимметричных колебаний конечной, но не превышающей порядок толщины оболочки.

Рассматривая колебания в диапазоне низших собственных частот осесимметричных и неосесимметричных форм упругих колебаний, пренебрегаем влиянием гравитации и инерцией цилиндрической оболочки в тангенциальном направлении. Это допущение является следствием того, что низшие частоты гравитационных колебаний значительно меньше, а низшие частоты преимущественно тангенциальных колебаний оболочки значительно больше рассматриваемых частот упругих колебаний.

Уравнение малых осесимметричных колебаний упругого днища в виде произвольной тонкой оболочки вращения запишем в векторной форме

$$L_1(\mathbf{u}) + \rho_0 h_1 \mathbf{u}'' + \nu_1 \rho \Phi'' |_{s_1} = 0 \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{u}$  и  $\Phi$  — вектор перемещений срединной поверхности оболочки и потенциал перемещений жидкости;  $L_1(\dots)$  — линейный самосопряженный дифференциальный тензор — оператор уравнений оболочки;  $\rho_0$ ,  $h_1$  — плотность и толщина оболочки днища;  $\rho$  — плотность жидкости;  $S_1$  и  $\nu_1$  — поверхность оболочки днища и внешняя единичная нормаль к ней; точкой обозначена производная по времени.

Нелинейные уравнения теории пологой цилиндрической оболочки [7] с учетом гидродинамического давления можно представить в виде

$$L_2(w, \Phi) + \rho_0 h w'' - \eta \rho \Phi'' |_{s_2} = 0$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (1.2)$$

$$L_2(w, \Phi) = D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - N_x \circ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \circ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$y = R\theta, \quad \nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2, \quad D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$$

Здесь  $w(x, y, t)$ ,  $\Phi(x, y, t)$  — нормальные перемещения цилиндрической оболочки и функция усилий в ее срединной поверхности;  $S_2, h, \rho_0, E, \nu$  — поверхность, толщина, плотность, модуль упругости и коэффициент Пуассона цилиндрической оболочки;  $N_x^0(x), N_y^0(x)$  — статические усилия в ее срединной поверхности;  $\eta=1$  при  $x \leq H$  и  $\eta=0$  при  $x > H$  (фиг. 1).

Граничные условия шарнирного опирания на краях оболочки и кинематическое условие для продольных перемещений оболочки записываются в виде

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x=0, L \tag{1.3}$$

$$U_1 = U_0 + \frac{1}{2\pi R} \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left[ \frac{1}{Eh} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dy dx$$

Если верхний край оболочки свободен в продольном направлении, то вместо последнего условия (1.3) следует использовать динамическое граничное условие

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy = 0 \quad \text{при } x=L \tag{1.4}$$

Кроме того, должно выполняться условие периодичности окружных перемещений оболочки [7]:

$$\int_0^{2\pi R} \left[ \frac{1}{Eh} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{w}{R} \right] dy = 0 \tag{1.5}$$

К этим уравнениям добавляем уравнение для потенциала перемещений идеальной сжимаемой жидкости с граничными условиями

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_1} = u \nu_1 \quad \text{на } S_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -w \quad \text{на } S_2, \quad \varphi = 0 \quad \text{при } x=H$$

где  $c$  — скорость звука в жидкости.

**2. Перемещения оболочки и потенциал перемещений жидкости.** В случае, когда бак заполнен жидкостью более чем на три четверти ( $H/L > 0.75$ ), неосесимметричные собственные формы колебаний цилиндрической оболочки при шарнирном закреплении ее на краях достаточно хорошо описываются функциями  $\sin(m\pi x/L) \cos n\theta$  при  $m=1, 2, \dots, n=2, 3, \dots$  [8].

Будем считать, что при динамической неустойчивости цилиндрической оболочки бака возникает неосесимметричная форма  $\sin(m\pi x/L) \cos n\theta$  и она не меняет свой вид при нелинейных колебаниях. При конечных перемещениях по этой форме появляется дополнительная осесимметричная погибь цилиндрической оболочки по форме  $\sin^2(m\pi x/L)$ , направленная внутрь [1, 7].

Перемещения оболочки бака при нелинейных колебаниях представим в виде разложения по заданным функциям

$$u = U_0 i + \sum_k q_k u_k$$

$$w = \sum_k q_k W_k(x) + f \sin(\alpha_m x/R) \cos n\theta + f_0 \sin^2(\alpha_m x/R), \quad \alpha_m = m\pi R/L \quad (2.1)$$

Здесь  $i$  — единичный орт оси  $x$ ;  $u_k$ ,  $W_k$  — собственные формы осесимметричных колебаний закрепленного бака с жидкостью при  $U_0 = U_1 = 0$  (или при  $U_0 = 0$ , если верхний край свободен);  $q_k(t)$  при  $k=1, 2, \dots$ ,  $f(t)$  и  $f_0(t)$  наряду с  $U_0(t)$  и  $U_1(t)$  рассматриваются как обобщенные координаты.

Следует заметить, что в силу полноты системы функций  $W_k(x)$ , последний член в выражении  $w$  можно было не учитывать. Однако здесь есть смысл его учесть, поскольку он хорошо отражает нелинейное взаимодействие осесимметричных и неосесимметричных колебаний [1, 6, 7].

Соответственно разложению перемещений оболочки (2.1) потенциал перемещений жидкости представим в виде

$$\varphi = U_0(x-H) + \sum_k q_k \psi_k + f \varphi_n + f_0 \varphi_0 \quad (2.2)$$

Здесь  $\psi_k(x, r)$  являются потенциалами перемещений сжимаемой жидкости для собственных форм осесимметричных колебаний закрепленного бака ( $k=1, 2, \dots$ )

$$\Delta \psi_k + \frac{\omega_k^2}{c^2} \psi_k = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial v_1} \Big|_{s_1} = uv_1, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial r} \Big|_{s_2} = -W_k, \quad \psi_k|_{x=H} = 0 \quad (2.3)$$

где  $\tau$  — объем жидкости,  $\omega_k$  — собственные частоты осесимметричных колебаний.

Сжимаемость тяжелой жидкости типа воды, спирта может оказывать существенное влияние на низшие собственные частоты осесимметричных колебаний не слишком тонких металлических оболочек ( $R/h < 200$ ) при больших уровнях заполнения ( $H/R > 2$ ) [2]. Влияние сжимаемости тяжелой жидкости на низшие частоты неосесимметричных колебаний цилиндрической оболочки весьма мало [2] и при их определении жидкость можно считать несжимаемой. На основании этого потенциал перемещений для рассматриваемой неосесимметричной формы определяется из уравнений

$$\Delta \varphi_n = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial v_1} \Big|_{s_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} \Big|_{s_2} = -\sin\left(\alpha_m \frac{x}{R}\right) \cos n\theta, \quad \varphi_n|_{x=H} = 0 \quad (2.4)$$

Потенциал  $\varphi_0(x, r)$  является решением следующей задачи:

$$\Delta \varphi_0 = 0 \text{ в } \tau, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial v_1} \Big|_{s_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \Big|_{s_2} = -\sin^2\left(\alpha_m \frac{x}{R}\right), \quad \varphi_0|_{x=H} = 0 \quad (2.5)$$

При глубине заполнения  $H \geq 2R$  потенциал  $\varphi_n$  для цилиндрической части бака можно определить приближенно, удовлетворяя граничным условиям на поверхности дна и на свободной поверхности жидкости только

«в среднем». Тогда при  $x \geq 0$ :

$$\varphi_n = -R \frac{I_n(\alpha_m r/R)}{\alpha_m I_n'(\alpha_m)} \sin\left(\alpha_m \frac{x}{R}\right) \cos n\theta \quad (2.6)$$

Если при определении потенциала  $\varphi_n$  воспользоваться гипотезой плоских сечений для жидкости, на основании которой  $\partial\varphi_n/\partial x = 0$ , то получим

$$\varphi_n = -\frac{R}{n} \frac{r^n}{R^n} \sin\left(\alpha_m \frac{x}{R}\right) \cos n\theta \quad (0 \leq x \leq H)$$

$$\varphi_n = 0 \quad (x < 0) \quad (2.7)$$

Оценку точности потенциала (2.7) можно получить, сравнивая его с потенциалом (2.6) при  $r=R$  и используя асимптотическую формулу

$$\frac{I_n(\alpha_m)}{\alpha_m I_n'(\alpha_m)} \approx \frac{1}{n} \left[ 1 - \frac{\alpha_m^2}{2n(n+1)} \right] \quad (\alpha_m^2 \ll n^2)$$

При  $\alpha_m^2 \ll n^2$  выражения (2.6) и (2.7) дают близкие результаты, на основании чего следует, что при этом условии влияние дна и свободной поверхности жидкости на значение потенциала  $\varphi_n$  на поверхности цилиндрической оболочки не существенно.

**3. Функция усилий.** Подставим разложение для прогиба цилиндрической оболочки (2.1) в уравнение совместности (1.2). Интегрируя это уравнение, найдем функцию усилий в срединной поверхности оболочки

$$\frac{1}{Eh} \Phi = - \sum_k q_k \frac{1}{R} \int_0^x \int_0^x W_k dx dx + fR \frac{\alpha_m^2}{(\alpha_m^2 + n^2)^2} \sin \frac{\alpha_m x}{R} \cos \frac{ny}{R} -$$

$$- f^2 \frac{\alpha_m^2}{32n^2} \cos \frac{2ny}{R} + \frac{R}{8\alpha_m^2} \left( f^2 \frac{n^2}{4R} - f_0 \right) \cos \frac{2\alpha_m x}{R} +$$

$$+ ff_0 \alpha_m^2 n^2 \left[ \frac{\sin(3\alpha_m x/R)}{(9\alpha_m^2 + n^2)^2} - \frac{\sin(\alpha_m x/R)}{(\alpha_m^2 + n^2)^2} \right] \cos \frac{ny}{R} + C_1 \frac{y^2}{2} + C_2 \frac{x^2}{2} \quad (3.1)$$

При этом считаем, что осесимметричные перемещения оболочки, представленные собственными формами  $W_k$ , малы. На основании этого допущения в выражении (3.1) и далее сохраняются только линейные члены с обобщенными координатами  $q_k$ .

Общее решение однородного бигармонического уравнения для функции усилий в выражении (3.1) представлено последними двумя членами с произвольными функциями  $C_1(t)$  и  $C_2(t)$ . Остальная часть общего решения однородного уравнения, представляющая неосесимметричное напряженное состояние оболочки, обусловленное стеснением деформаций на ее краях и имеющее характер краевого эффекта, здесь не учитывается (так же, как в задачах устойчивости оболочки в нелинейной постановке).

Произвольные функции  $C_1$  и  $C_2$  найдем, удовлетворяя кинематическому граничному условию для продольных перемещений (1.3) и условию периодичности окружных перемещений (1.5)

$$C_1 = \frac{\nu}{2R(1-\nu^2)} \left( f^2 \frac{n^2}{4R} - f_0 \right) + \frac{U_1 - U_0}{L(1-\nu^2)} - \frac{\nu}{RL(1-\nu^2)} \sum_k \int_0^L q_k \int_0^L W_k dx +$$

$$+ f^2 \frac{\alpha_m^2}{8R^2(1-\nu^2)} \quad (3.2)$$

$$C_2 = \frac{1}{2R} \left( f^2 \frac{n^2}{4R} - f_0 \right) + \nu C_1$$

Если верхний край оболочки свободен, то вместо кинематического условия (1.3) следует использовать динамическое условие (1.4). Тогда получим

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{2R} \left( f^2 \frac{n^2}{4R} - f_0 \right) \quad (3.3)$$

Выражение для функций усилий (3.1) и, как следствие этого, уравнения равновесия (1.2) существенно упрощаются, если обобщенную координату  $f_0(t)$  считать зависимой от  $f(t)$  и положить

$$f_0 = f^2 n^2 / (4R) \quad (3.4)$$

Это условие соответствует тому, что осесимметричная погибь оболочки при конечных перемещениях по неосесимметричной форме определяется так, как если бы оболочка была нерастяжимой в окружном направлении.

**4. Уравнения в обобщенных координатах.** С учетом зависимости (3.4) нелинейные колебания цилиндрического бака с жидкостью описываются обобщенными координатами  $U_0, U_1, f$  и  $q_k, k=1, 2, \dots$ . Для составления уравнений в обобщенных координатах воспользуемся вариационным принципом Лагранжа для тонкостенной упругой оболочки, частично заполненной сжимаемой жидкостью [9]. Учтем все принятые ранее допущения и условия, которым подчинены заданные координатные функции для перемещений оболочки бака, функция усилий и потенциал перемещений жидкости.

Уравнения принципа возможных перемещений для рассматриваемой системы можно привести к виду

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} [L_1(\mathbf{u}) + \rho_0 h_1 \mathbf{u}'' + \nu_1 \rho \varphi''] \mathbf{u}_k dS_1 + \int_{S_2} [L_2(w, \Phi) + \\ & + \rho_0 h w'' - \eta \rho \varphi''] W_k dS_2 + \rho \int \int \int [c^2 \Delta \varphi - \varphi''] \Delta \psi_k d\tau = 0 \quad (k=1, 2, \dots) \\ & \int_{S_2} [L_2(w, \Phi) + \rho_0 h w'' - \eta \rho \varphi''] \sin \left( \frac{\alpha_m x}{R} \right) \cos n\theta dS_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$P_0 - M_0 U_0'' - \int_{S_1} [\rho_0 h_1 \mathbf{u}'' + \nu_1 \rho \varphi''] i dS_1 + \int_0^{2\pi R} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right]_{x=0} dy = 0$$

$$P_1 - M_1 U_1'' - \int_0^{2\pi R} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right]_{x=L} dy = 0$$

Здесь  $M_0$  и  $M_1$  — масса нижнего шпангоута и масса верхнего шпангоута с учетом приведенных масс цилиндрической оболочки (инерция последней в тангенциальном направлении ранее не учитывалась). Второе уравнение системы (4.1) упрощено, поскольку в силу первого уравнения (4.1) и полноты системы собственных функций  $\mathbf{u}_k, W_k, \psi_k$  для осесимметричного поля перемещений работа всех сил на возможном перемещении, соответствующем осесимметричной составляющей при вариации  $\delta f$ , равна нулю.

Будем одновременно рассматривать два случая граничных условий на верхнем краю цилиндрической оболочки (1.3) и (1.4); для них функции  $C_1(t)$  и  $C_2(t)$  определяются по формулам (3.2) и (3.3). В дальнейшем эти два случая будем различать признаком  $\alpha$ , полагая  $\alpha=1$  в первом случае, когда продольное перемещение верхнего края  $x=L$  равно  $U_1$ , и  $-\alpha=0$  во втором случае, когда верхний край свободен в продольном направлении и  $M_1=0$ .

Условия ортогональности собственных форм осесимметричных колебаний закрепленного бака, содержащего сжимаемую жидкость, без учета гравитации записываются в виде [9]:

$$\int_{S_1} \int (\rho_0 h_1 u_j + v_1 \rho \psi_j) u_k dS_1 + \int_{S_2} \int (\rho_0 h W_j - \eta \rho \psi_j) W_k dS_2 -$$

$$- \rho \int \int \int \psi_j \Delta \psi_k d\tau = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ m_k, & j = k \end{cases}$$

$$\int_{S_1} \int L_1(u_j) u_k dS_1 + \int_{S_2} \int L_2^\circ(W_j, \Phi_j) W_k dS_2 +$$

$$+ \rho c^2 \int \int \int \Delta \psi_j \Delta \psi_k d\tau = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ k_k, & j = k, \quad k_k = m_k \omega_k^2 \end{cases} \quad (4.2)$$

Здесь  $m_k, k_k$  — коэффициенты обобщенной массы и обобщенной жесткости  $k$ -й собственной формы;  $L_2^\circ(\dots)$  представляет линеаризованный оператор  $L_2(\dots)$ . На основании (3.1) с учетом (3.2), (3.3) найдем функцию усилий  $\Phi_j$  для формы колебаний  $W_j$  и затем, подставляя  $w=W_j$  и  $\Phi=\Phi_j$  в выражение (1.2) для  $L_2(w, \Phi)$  и линеаризуя его, получим

$$L_2^\circ(W_j, \Phi_j) = D \frac{d^4 W_j}{dx^4} - N_x^\circ \frac{d^2 W_j}{dx^2} + \frac{Eh}{R^2} W_j + \frac{\alpha v^2 E h}{R^2 L (1 - v^2)} \int_0^L W_j dx \quad (4.3)$$

Подставим выражения для перемещений оболочки (2.1), потенциала перемещений жидкости (2.2) и функции усилий (3.1) с учетом (3.2), (3.3), условия (3.4) и условий ортогональности (4.2) в уравнения (4.1). При этом пренебрегаем в уравнениях для  $q_k$  нелинейными членами выше второго порядка и в уравнениях для  $f$  — нелинейными членами выше третьего порядка. Такое упрощение основано на том, что исходные нелинейные уравнения теории полой цилиндрической оболочки (1.2) записаны в квадратичном приближении и справедливы при амплитудах прогиба, не превышающих порядок толщины оболочки. При таких ограничениях на амплитуду, как показывают оценки, отброшенные нелинейные члены высокого порядка весьма малы по сравнению с оставленными нелинейными членами.

Упрощенные нелинейные уравнения имеют вид

$$m_k \ddot{\xi}_k + k_k \xi_k + \varepsilon k_{2k} \xi^2 + \varepsilon m_{2k} (\xi^2)'' + k_{0k} (u_0 - u_1) m_{0k} \ddot{u}_0 = 0 \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$\mu \ddot{\xi} + \kappa \xi + \varepsilon^2 \kappa_3 \xi^3 + \varepsilon \xi \sum_k \kappa_{1k} \xi_k - \varepsilon \kappa_1 \xi (u_0 - u_1) = 0$$

(4.4)

$$\frac{1}{h} P_0 = k_{00} (u_0 - u_1) + \sum_k k_{0k} \xi_k - \varepsilon \kappa_2 \xi^2 + m_{00} \ddot{u}_0 + \sum_k m_{0k} \ddot{\xi}_k + \varepsilon \mu_0 (\xi^2)''$$

$$\frac{1}{h} P_1 = -k_{00}(u_0 - u_1) - \sum_k k_{0k} \xi_k + \varepsilon \kappa_2 \zeta^2 + M_1 u_1''$$

$$\xi_k = q_k/h, \quad \zeta = f/h, \quad u_0 = U_0/h, \quad u_1 = U_1/h, \quad \varepsilon = h/R$$

Коэффициенты уравнений (4.4) определяются по формулам

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\pi \rho R^2 L}{2} \left[ \frac{\rho_0 h}{\rho R} + \frac{I_n(\alpha_m)}{\alpha_m I_n'(\alpha_m)} \left( \frac{H}{L} - \frac{R}{2\alpha_m L} \sin \frac{2\alpha_m H}{R} \right) \right] \\ \kappa_4 &= \frac{\pi E h L}{2R} \left[ \frac{h^2}{R^2} \frac{(\alpha_m^2 + n^2)^2}{12(1-\nu^2)} + \frac{\alpha_m^4}{(\alpha_m^2 + n^2)^2} + \frac{1}{Eh} (N_x \alpha_m^2 + N_y n^2) \right] \\ m_{0k} &= \iint_{S_1} (\rho_0 h_1 u_k + v_1 \rho \psi_k) i dS_1 \\ k_{00} &= \alpha \frac{2\pi E h R}{(1-\nu^2)L}, \quad k_{0k} = \alpha \frac{2\pi E h \nu}{(1-\nu^2)L} \int_0^L W_k dx \\ m_{2k} &= \frac{n^2}{4} \iint_{S_2} (\rho_0 h W_k - \eta \rho \psi_k) \sin^2 \left( \alpha_m \frac{x}{R} \right) dS_2 \\ k_{2k} &= \frac{\pi E h}{R} \left\{ \alpha_m^4 n^2 \left[ \frac{2}{(\alpha_m^2 + n^2)^2} - \frac{h^2/R^2}{3(1-\nu^2)} \right] \int_0^L W_k \cos \frac{2\alpha_m x}{R} dx - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \frac{\alpha_m^2 \nu}{4(1-\nu^2)} \int_0^L W_k dx \right\} \\ \kappa_3 &= \frac{\pi E h L}{4R} \alpha_m^2 \left[ \frac{\alpha_m^2}{8} - \frac{\alpha_m^2 n^4}{(\alpha_m^2 + n^2)^2} + \alpha \frac{\alpha_m^2 + \nu n^2}{4(1-\nu^2)} \right] \\ \kappa_{1k} &= -\frac{\pi E h}{2R} \left[ 2n^2 \int_0^L W_k \sin^2 \left( \alpha_m \frac{x}{R} \right) dx + \alpha \frac{\nu(\alpha_m^2 + \nu n^2)}{1-\nu^2} \int_0^L W_k dx \right] \\ \kappa_1 &= \alpha \frac{\pi E h}{2} \frac{\alpha_m^2 + \nu n^2}{1-\nu^2}, \quad \kappa_2 = \alpha \frac{\pi E h \alpha_m^2}{4(1-\nu^2)} \\ \mu_0 &= \pi \rho R^3 \frac{n^2}{8} \left( \frac{H^2}{R^2} - \frac{1}{\alpha_m^2} \sin^2 \frac{\alpha_m H}{R} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $m_{00}$  — масса бака с жидкостью.

При вычислении коэффициента  $\mu_0$  была использована формула Грина для преобразования интеграла от гармонической функции  $\varphi_0$  с учетом граничных условий для нее (2.5).

$$\mu_0 = \rho \frac{n^2}{4} \iint_{S_1} \varphi_0 v_1 i dS_1 = \rho \frac{n^2}{4} \iint_{S_2} (x-H) \sin^2 \left( \alpha_m \frac{x}{R} \right) dS_2$$

Отсюда следует, что при вычислении гидродинамических коэффициентов нет необходимости определять потенциал  $\varphi_0$ .

Если цилиндрическая оболочка была динамически устойчива, то несимметричная форма колебаний отсутствует ( $\zeta=0$ ) и уравнения (4.4) становятся линейными. В этом случае они совпадают с уравнениями продоль-



ных колебаний несущего цилиндрического бака с жидкостью, полученными в [10].

**5. Решение уравнений.** На основании уравнений (4.4) можно рассматривать различные задачи, связанные с нелинейным взаимодействием осесимметричных и неосесимметричных колебаний бака с жидкостью.

Наибольший практический интерес представляет задача о нелинейных параметрических колебаниях бака при продольном возбуждении. Получим решение для этого случая, полагая, что гармонические продольные колебания бака возбуждаются кинематически за счет продольных перемещений его торцов

$$u_0(t) = u_0^\circ \cos \omega t, \quad u_1(t) = u_1^\circ \cos \omega t \quad (5.1)$$

где  $u_0^\circ$ ,  $u_1^\circ$  и  $\omega$  — заданные безразмерные амплитуды и частота возбуждения.

Дифференциальные уравнения (4.4) содержат в качестве множителя при нелинейных членах малый параметр  $\varepsilon = h/R$ , поэтому их решение можно получить по методу возмущений в виде разложений по степеням  $\varepsilon$ . При этом в качестве порождающего решения системы (4.4) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  будем рассматривать решение, представляющее свободные колебания по неосесимметричной форме. Для этого необходимо, чтобы продольные перемещения торцов бака, возбуждающие осесимметричные колебания и создающие параметрическую нагрузку для неосесимметричной формы, были достаточно малыми. Поэтому выражения (5.1) запишем в виде

$$u_0(t) = \varepsilon u_0^* \cos \omega t, \quad u_1(t) = \varepsilon u_1^* \cos \omega t, \quad u_0^\circ = \varepsilon u_0^*, \quad u_1^\circ = \varepsilon u_1^* \quad (5.2)$$

где  $u_0^*$ ,  $u_1^*$  считаются конечными величинами.

Согласно структуре уравнений (4.4) с малым параметром  $\varepsilon$ , решение в области главного параметрического резонанса можно представить в виде

$$\begin{aligned} \xi_k &= \varepsilon \xi_{k,0} + \varepsilon^3 \xi_{k,1} + \dots \\ \zeta &= \zeta_0 + \varepsilon^2 \zeta_1 + \varepsilon^4 \zeta_2 + \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\kappa/\mu = (\omega/2)^2 + \varepsilon^2 \eta_1 + \varepsilon^4 \eta_2 + \dots$$

где  $\xi_{k,0}(t)$ ,  $\xi_{k,1}(t)$ , ... и  $\zeta_0(t)$ ,  $\zeta_1(t)$ ,  $\zeta_2(t)$ , ... — неизвестные функции, а  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ , ... — неизвестные числа.

Последнее соотношение (5.3) записано на основании того, что в области главного параметрического резонанса частота возбуждения  $\omega$  считается достаточно близкой к удвоенной собственной частоте неосесимметричной формы колебаний, которая при малых колебаниях равна  $\omega_m = \sqrt{\kappa/\mu}$ .

Подставим разложения (3.3) для  $\xi_k$ ,  $\zeta$ ,  $\kappa$  и выражения (5.2) в систему (4.4). Сгруппируем все члены, содержащие в качестве множителя одинаковые степени параметра  $\varepsilon$  и каждую из полученных групп приравняем нулю. Таким образом система нелинейных уравнений (4.4) сводится к «зацепляющейся» системе линейных дифференциальных уравнений

$$\zeta_0'' + (\omega/2)^2 \zeta_0 = 0$$

$$m_k \xi_{k,0}'' + k_k \xi_{k,0} + k_{2k} \zeta_0^2 + m_{2k} (\zeta^2)'' + [k_{0k} (u_0^* - u_1^*) - \omega^2 m_{0k} u_0^*] \cos \omega t = 0 \quad (k=1,2,\dots)$$

$$\mu [\zeta_1'' + (\omega/2)^2 \zeta_1] + \mu \eta_1 \zeta_0 + \kappa_3 \zeta_0^3 + \zeta_0 \sum_k \kappa_{1k} \xi_{k,0} - \kappa_0 \zeta_0 (u_0^* - u_1^*) \cos \omega t = 0 \quad (5.4)$$

Последующие уравнения здесь не выписываем, ограничиваясь первым приближением метода возмущений.

Следует заметить, что если в уравнениях (4.4) сохранить нелинейные члены более высокого порядка (которые были отброшены как малые по сравнению с оставленными нелинейными членами), то они бы не вошли в уравнения первого приближения метода возмущений (5.4).

Запишем решения уравнений (5.4) для установившихся периодических колебаний на режиме предельного цикла с периодом  $T=2\pi/\omega$  для обобщенных координат  $\xi_k$  и с периодом  $2T$  для обобщенной координаты  $\zeta$ . При этом значения амплитуды колебаний  $\zeta(t)$  в моменты времени  $t=0$  и  $t=T/2$  обозначим через  $b$  и  $a$ , т. е.

$$\zeta(0)=b, \quad \zeta(T/2)=a \quad (5.5)$$

Первое уравнение (5.4) с учетом (5.5) дает порождающее решение

$$\zeta_0 = a \sin(\omega t/2) + b \cos(\omega t/2) \quad (5.6)$$

Установившееся решение второго уравнения (5.4) с учетом (5.6) записывается в виде

$$\xi_{k,0} = \frac{k_{0k}(u_1^* - u_0^*) + \omega^2 m_{0k} u_0^*}{k_k - \omega^2 m_k} \cos \omega t - \frac{a^2 + b^2}{2} \frac{k_{2k}}{k_k} - \frac{k_{2k} - \omega^2 m_{2k}}{k_k - \omega^2 m_k} \left( ab \sin \omega t + \frac{b^2 - a^2}{2} \cos \omega t \right) \quad (5.7)$$

Подставим выражения (5.6), (5.7) в третье уравнение (5.4). Получим

$$\begin{aligned} \mu [\ddot{\xi}_1 + (\omega/2)^2 \xi_1] + \{ [\mu \eta_1 + (b^2 + a^2)E - (u_0^* F_0 + u_1^* F_1)] a \sin(\omega t/2) + \\ + [\mu \eta_1 + (b^2 + a^2)E + (u_0^* F_0 + u_1^* F_1)] b \cos(\omega t/2) \} + \\ + [(3b^2 - a^2)N + (u_0^* F_0 + u_1^* F_1)] a \sin(3\omega t/2) + \\ + [(b^2 - 3a^2)N + (u_0^* F_0 + u_1^* F_1)] b \cos(3\omega t/2) = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$E(\omega) = \frac{1}{4} \left[ 3\kappa_3 - \sum_k \kappa_{1k} \left( 2 \frac{k_{2k}}{k_k} + \frac{k_{2k} - \omega^2 m_{2k}}{k_k - \omega^2 m_k} \right) \right]$$

$$F_0(\omega) = -\frac{1}{2} \left[ \kappa_1 + \sum_k \kappa_{1k} \frac{k_{0k} - \omega^2 m_{0k}}{k_k - \omega^2 m_k} \right]$$

$$F_1(\omega) = \frac{1}{2} \left[ \kappa_1 + \sum_k \frac{\kappa_{1k} k_{0k}}{k_k - \omega^2 m_k} \right]$$

$$N(\omega) = \frac{1}{4} \left[ \kappa_3 - \sum_k \kappa_{1k} \frac{k_{2k} - \omega^2 m_{2k}}{k_k - \omega^2 m_k} \right]$$

Чтобы решение уравнения (5.8) не имело «вековых» членов и было периодическим, выражение, стоящее в фигурных скобках уравнения (5.8), должно равняться нулю. Для этого должно выполняться одно из следующих трех условий:

$$\begin{aligned} a=0, \quad b=0 \\ \mu \eta_1 + a^2 E - (u_0^* F_0 + u_1^* F_1) = 0, \quad b=0 \\ \mu \eta_1 + b^2 E + (u_0^* F_0 + u_1^* F_1) = 0, \quad a=0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Решение уравнения (5.8) с учетом условий (5.2), (5.10) записывается в виде

$$\begin{aligned} \xi_1 = & \frac{a}{3\mu\omega^2} [(3b^2 - a^2)N + (u_0^*F_0 + u_1^*F_1)] \left( \sin \frac{\omega t}{2} + \sin \frac{3\omega t}{2} \right) - \\ & - \frac{b}{3\mu\omega^2} [(b^2 - 3a^2)N + (u_0^*F_0 + u_1^*F_1)] \left( \cos \frac{\omega t}{2} - \cos \frac{3\omega t}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Первое условие (5.10) является тривиальным. Из двух других условий (5.10) поочередно определим параметр  $\mu\eta_1$  и подставим в последнее уравнение (5.3). Тогда с учетом обозначений (5.2)  $\varepsilon u_0^* = u_0^\circ$ ,  $\varepsilon u_1^* = u_1^\circ$  в первом приближении получим уравнения для определения амплитуд  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned} \kappa - (\omega/2)^2 \mu + \varepsilon^2 a^2 E - \varepsilon (u_0^\circ F_0 + u_1^\circ F_1) &= 0, & b &= 0 \\ \kappa - (\omega/2)^2 \mu + \varepsilon^2 b^2 E + \varepsilon (u_0^\circ F_0 + u_1^\circ F_1) &= 0, & a &= 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Из уравнений (5.12) следуют два решения ( $a \neq 0, b = 0$  и  $a = 0, b \neq 0$ ), одно из которых описывает устойчивые нелинейные колебания на режиме предельного цикла и другое — неустойчивые колебания. Из двух амплитуд  $a$  и  $b$ , отличных от нуля, к устойчивым колебаниям относится та амплитуда, которая больше по величине [11].

Если для решения нелинейных уравнений (4.4) использовать метод гармонического баланса и в первом приближении принять  $\xi = \xi_0$ , где  $\xi_0$  определяется выражением (5.6), то в этом случае решения для осесимметричных форм  $\xi_k$  и для амплитуд  $a, b$  неосесимметричной формы полностью совпадают с решениями (5.7) для  $\xi_k = \varepsilon \xi_{k,0}$  и (5.12) для  $a, b$ , полученными в первом приближении по методу возмущений.

Границы области динамической неустойчивости определяются из уравнений (5.12) при  $a = b = 0$ :

$$\kappa - (\omega/2)^2 \mu \pm \varepsilon (u_0^\circ F_0 + u_1^\circ F_1) = 0 \quad (5.13)$$

Если в уравнениях (5.12) при  $\alpha = 1$  положить  $u_0^\circ = u_1^\circ = 0$  или при  $\alpha = 0$  принять  $u_0^\circ = 0$ , то получим уравнения для амплитудно-частотной характеристики неосесимметричной формы при свободных нелинейных колебаниях закрепленного бака с жидкостью

$$\kappa - (\omega/2)^2 \mu + \varepsilon A^2 E(\omega) = 0 \quad (5.14)$$

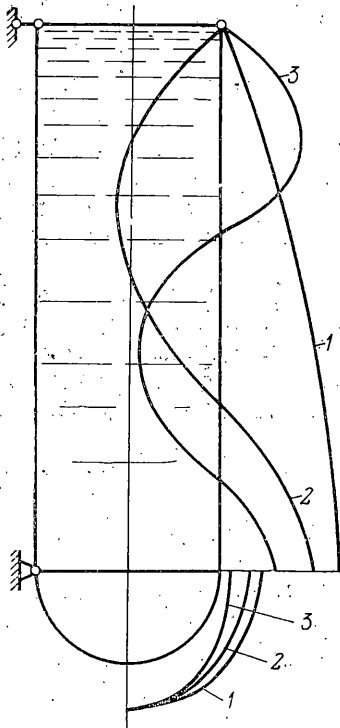
где  $A = a$  или  $A = b$ ,  $\omega/2$  — частота колебаний неосесимметричной формы и  $\omega$  — частота сопровождающих осесимметричных колебаний.

Продольные реакции  $P_0$  и  $P_1$ , действующие на краях бака при параметрическом резонансе, определим по формулам (4.4) с учетом (5.3), (5.6), (5.7), сохраняя в первом приближении члены, содержащие  $\varepsilon$  в степени не выше первой

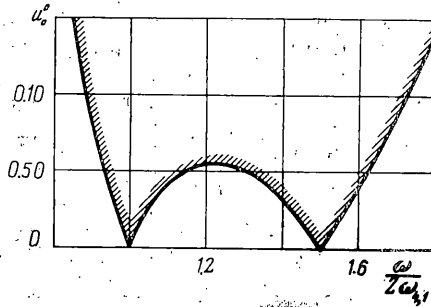
$$\begin{aligned} \frac{P_0}{h} + \frac{P_1}{h} = & -\omega^2 \left\{ (u_1^\circ - u_0^\circ) \sum_k \frac{k_{0k} m_{0k}}{k_k - \omega^2 m_k} + u_0^\circ \left[ m_{00} + \omega^2 \sum_k \frac{m_{0k}^2}{k_k - \omega^2 m_k} \right] + \right. \\ & \left. + \varepsilon \frac{b^2 - a^2}{2} \left[ \mu_0 + \sum_k m_{0k} \frac{k_{2k} - \omega^2 m_{2k}}{k_k - \omega^2 m_k} \right] \right\} \cos \omega t \\ \frac{P_1}{h} = & \left\{ (u_1^\circ - u_0^\circ) \left[ k_{00} - \sum_k \frac{k_{0k}^2}{k_k - \omega^2 m_k} \right] - \omega^2 u_0^\circ \sum_k \frac{k_{0k} m_{0k}}{k_k - \omega^2 m_k} + \right. \end{aligned}$$

$$+\varepsilon \frac{b^2 - a^2}{2} \left[ \kappa_2 + \sum_k k_{0k} \frac{k_{2k} - \omega^2 m_{2k}}{k_k - \omega^2 m_k} \right] \cos \omega t + \varepsilon \frac{a^2 + b^2}{2} \left[ \kappa_2 + \sum_k \frac{k_{0k} k_{2k}}{k_k} \right] \quad (5.15)$$

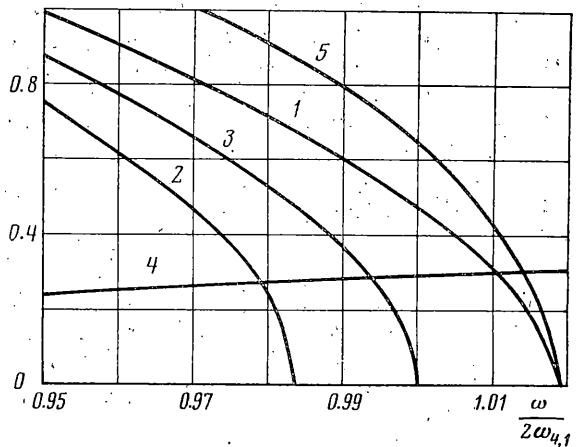
Из этих формул следует, что при динамической неустойчивости цилиндрической оболочки бака возникают дополнительные нелинейные реакции, пропорциональные квадрату амплитуды неосесимметричной формы.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Эти нелинейные реакции могут действовать как в фазе, так и в противофазе с линейными составляющими реакций в зависимости от того, какая из амплитуд ( $a \neq 0, b = 0$  или  $a = 0, b \neq 0$ ) реализуется при установившихся колебаниях на режиме устойчивого предельного цикла.

**6. Пример.** В качестве примера рассмотрим цилиндрический бак с полусферическим дном, полностью заполненный несжимаемой жидкостью. Примем следующие параметры бака:  $L/R=6$ ,  $H/L=1$ ,  $R/h=200$ ,  $h_1=h$ ,  $\nu=0.3$ ,  $\rho_0/\rho=2.7$ ,  $c=\infty$ ,  $N_x=N_y=0$ ; верхний край цилиндрической оболочки считаем свободным в продольном направлении ( $\alpha=0$ ).

Собственные формы осесимметричных колебаний закрепленного бака при  $U_0=0$  определялись по методу Ритца; при этом оболочка бака считалась безмоментной, а движение жидкости рассматривалось на основе гипотезы плоских сечений [10]. Нормальные перемещения цилиндрической оболочки и сферической оболочки дна для трех нижних форм колебаний ( $k=1, 2, 3$ ) показаны на фиг. 2 (кривые 1-3). Три нижние собственные частоты  $\omega_k \sqrt{\rho R^3 / (Eh)}$  при  $k=1, 2, 3$  равны 0.1742, 0.5075, 0.8015.

Рассмотрим параметрический резонанс бака по неосесимметричной форме колебаний цилиндрической оболочки  $W_{mn} = \sin(m\pi x/L) \cos n\theta$  при  $m=1, n=4$ . Соб-

ственная частота малых колебаний по этой форме равна  $\omega_{1,4}\sqrt{\rho R^3/(Eh)}=0.0580$ . При этом в уравнениях учитываем три низшие формы осесимметричных колебаний бака ( $k=1, 2, 3$ ).

На фиг. 3 показана граница области динамической неустойчивости (заштрихована) при главном параметрическом резонансе, вычисленная по формуле (5.13).

На фиг. 4 при  $u_0=0.01$  показаны: амплитуда  $a$  ( $b=0$ ) устойчивых параметрических колебаний неосесимметричной формы (кривая 1); амплитуда  $b$  ( $a=0$ ) неустойчивых параметрических колебаний (кривая 2); амплитудно-частотная характеристика  $A$  для свободных нелинейных колебаний по неосесимметричной форме (кривая 3); безразмерные компоненты  $X_0$  (кривая 4) и  $X_n$  (кривая 5), характеризующие продольную реакцию  $P_0=-\pi Eh^3 R^{-1}(X_0-X_n)\cos\omega t$  из которых  $X_0(\omega)$  представляет линейную составляющую и  $X_n(\omega)$  — нелинейную составляющую (последняя в рассматриваемом случае действует в противофазе). Нелинейная составляющая продольной силы, которая появляется при динамической неустойчивости цилиндрической оболочки бака, по величине значительно превосходит линейную составляющую.

В случае пустой цилиндрической оболочки с параметрами  $L/R=1.92$ ,  $R/h=1820$ ,  $\nu=0.3$  амплитудно-частотная характеристика свободных нелинейных колебаний по неосесимметричной форме  $W_{1,10}$  ( $m=1$ ,  $n=10$ ), вычисленная по формуле (5.14), совпадает с экспериментальной характеристикой [12].

Результаты для амплитуды  $a$  неосесимметричной формы  $W_{1,4}$  ( $m=1$ ,  $n=4$ ) и продольной реакции  $P_0$  при главном параметрическом резонансе цилиндрической оболочки с плоским жестким дном, полностью заполненной жидкостью ( $L/R=10.67$ ,  $H/L=1$ ,  $R/h=150$ ,  $\nu=0.3$ ,  $\alpha=0$ ,  $\rho_0/\rho=7.8$ ,  $\sqrt{E/(\rho_0 c^2)}=3.4$ ,  $u_0=0.00142$ ), близки к теоретическим результатам [6] и согласуются с результатами эксперимента [1].

Отметим, что при выборе неосесимметричной формы для расчета параметрических колебаний следует учитывать следующие два обстоятельства. Во-первых, удвоенная частота неосесимметричной формы должна быть близка к частоте возбуждения. Во-вторых, наибольшие нелинейные продольные реакции возникают тогда, когда неосесимметричная форма имеет одну полуволну в продольном направлении,  $m=1$ .

Расчеты показывают, что в случае длинных цилиндрических баков, полностью или почти полностью заполненных жидкостью, при  $\alpha_m=\pi L/R < 1$  из всех нелинейных членов в уравнениях (4.4) основное влияние оказывают члены с коэффициентами  $\kappa_{1k}$ ,  $m_{2k}$  и  $\mu_0$ ; остальными нелинейными членами в этом случае можно пренебречь.

#### ЛИТЕРАТУРА

Поступила 19 VI 1978

1. Kana D. D., Graig R. R. Parametric oscillations of a longitudinally excited cylindrical shell containing liquid. J. Spacecraft and Rockets, 1968, vol. 5, No. 1.
2. Шклярчук Ф. Н. Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью, при продольных колебаниях. Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: «Наука», 1970.
3. Шклярчук Ф. Н. О параметрических колебаниях цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью, при продольном возбуждении. В кн. Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск, Изд-во Новосиб. электротехн. ин-та, 1973.
4. Абрамсон Х. Н., Кана Д. Д. Некоторые экспериментальные исследования динамической устойчивости тонких оболочек, содержащих жидкость. В кн.: Проблемы механики твердого деформируемого тела. Л.: «Судостроение», 1970.
5. Маневич Л. И., Прокопало Е. Ф., Шукуров А. Х. Исследование параметрических колебаний оболочки, заполненной жидкостью. В кн.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. М., Центр. бюро научно-техн. информ. «Волна», 1976.
6. Образцова Е. И. Нелинейные параметрические колебания цилиндрической оболочки с жидкостью при продольном возбуждении. Изв. вузов. Авиационная техника, 1976, № 3.
7. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., «Наука», 1972.
8. Швейко Ю. Ю., Кулешов В. Б. Исследование собственных колебаний цилиндрических оболочек с жидкостью. В кн.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск, Изд-во Новосиб. электротехн. ин-та, 1973.
9. Григоров Э. И., Шклярчук Ф. Н. Уравнения возмущенного движения тела с тонкостенной упругой оболочкой, частично заполненной жидкостью. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
10. Шклярчук Ф. Н. О приближенном методе расчета осесимметричных колебаний оболочек вращения с жидким заполнением. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 6.
11. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
12. Olson M. D. Some experimental observations on the non-linear vibration of cylindrical shells. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 9.