

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ  
И ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПРИМЕРЕ  
ФЕРМЫ МИЗЕСА

И. И. ВОРОВИЧ, Н. И. МИНАКОВА, В. Г. ШЕПЕЛЕВА

(Ростов-на-Дону)

На примере фермы Мизеса анализируются некоторые особенности потери устойчивости вязкоупругих и вязкопластических тонкостенных систем.

Устанавливаются соотношения между используемыми в настоящее время критериями потери устойчивости. Дается общая математическая трактовка проблемы хлопка, охватывающая динамический хлопок упругой системы, хлопок вязкоупругих и вязкопластических систем.

Анализируются особенности появления качественно новых форм деформации (несимметричная потеря устойчивости).

1. В настоящее время в теории устойчивости вязкоупругих и вязкопластических систем центральное место занимает концепция критического времени, которая отражает существо механизма потери устойчивости таких систем. Имеется около шести подходов к введению критического времени  $t_*$ , свodka которых дана ниже

$$\begin{array}{ccccc} t_{*1} & t_{*2} & t_{*3} & t_{*4} & t_{*5} \\ a_{*1} = \infty & a_{*2} = \infty & a_{*3} = \infty & a_{*4} = 0 & a_{*5} = 0 \end{array}$$

Отметим, кроме того, что при численном решении задач устойчивости часто сталкиваются с расходимостью в некоторый момент времени  $t_{*6}$  наиболее употребительных вычислительных алгоритмов, поэтому можно выдвинуть еще одно определение критического времени, когда имеет место это явление. Последний критерий является менее определенным, однако его целесообразно иметь в виду.

Наличие столь большого числа критериев делает весьма актуальной задачу их сравнительного анализа и выявления рациональной области использования каждого из них. При этом в какой-то мере должны проявиться такие факторы, как: взаимодействие геометрической нелинейности и ползучести; особенности и пределы применимости квазистатического подхода.

Обращение к сравнительно простым моделям типа фермы Мизеса оказалось здесь столь же полезным, как и к модели Шенли в соответствующем круге вопросов. Некоторый анализ фермы Мизеса имеется в [1, 2]. Пока исключим из рассмотрения случаи наличия периодических и почти-периодических режимов, когда с очевидностью можно утверждать применимость методологических основ теории устойчивости А. М. Ляпунова.

2. Приведем основные соотношения, характеризующие напряженно-деформированное состояние фермы Мизеса (см. фиг. 1). Для относительных удлинений и напряжений в стержнях имеем

$$\epsilon_1 = 1 - 2 \frac{\sin \alpha \cos(\alpha + \beta_2)}{\sin(2\alpha + \beta_1 + \beta_2)} \quad (1 \Leftrightarrow 2) \quad (2.1)$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_p \sin(\alpha + \beta_2) - \sigma_q \cos(\alpha + \beta_2)}{\sin(2\alpha + \beta_1 + \beta_2)}, \quad \sigma_p = \frac{P}{F}, \quad \sigma_q = \frac{Q}{F}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_p \sin(\alpha + \beta_1) + \sigma_q \cos(\alpha + \beta_1)}{\sin(2\alpha + \beta_1 + \beta_2)} \quad (2.2)$$

Примем вначале, что материал деформируется по закону

$$\left( \alpha_0 \frac{d}{dt} + \alpha_1 \right) \sigma = \left( \beta_0 \frac{d}{dt} + \beta_1 \right) \varepsilon \quad (2.3)$$

$$\left( \frac{d}{d\tau} + 1 \right) \sigma = \left( \frac{d}{d\tau} + n \right) \varepsilon E_0 \quad (2.4)$$

В соотношении (2.4) закон деформирования записан через безразмерное время,  $E_0$  имеет размерность Па. Постоянная  $0 < n < 1$ , как это следует из принципа устойчивости естественного ненапряженного состояния [3]. Используя (2.1)–(2.4), в случае симметричной деформации ( $\sigma_q = 0$ ) получим дифференциальное уравнение, определяющее угол  $\varphi$ :

$$\varphi = \frac{(m_p + m_p) \sin \varphi + n (\sin \alpha - \sin \varphi) \cos \varphi}{\sin \alpha \cos^3 \varphi - m_p \sin^3 \varphi} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$m_p = P/2E_0F, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta, \quad \varphi = \alpha + \beta \quad (2.5)$$

и при постоянной нагрузке

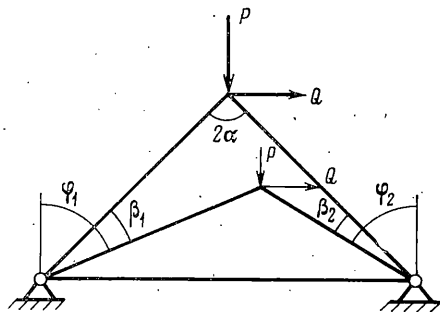
$$\varphi = \frac{m_p \sin \varphi + n (\sin \alpha - \sin \varphi) \cos \varphi}{\sin \alpha \cos^3 \varphi - m_p \sin^3 \varphi} \sin \varphi \cos \varphi \quad (2.6)$$

Уравнения (2.5), (2.6) и определяют симметричную деформацию фермы Мизеса.

Опишем особенности поведения чисто упругой фермы при разных  $\alpha$ . Ее кривая нагружения, определяемая соотношением  $\sigma = E_0 \varepsilon$ , имеет форму характерной кривой нагружения полой оболочки [4, 5] и приведена на фиг. 2.

Для систематизации всех случаев поведения системы при разных нагрузках введем некоторые вспомогательные кривые. Именно, построим характеристику нагружения  $m_p(\varphi)$  для упругой системы с мгновенными модулями в соотношении (2.4), т. е. положим  $\sigma = E_0 \varepsilon$ . Эту характеристику будем называть кривой мгновенных равновесий. Кривая мгновенных равновесий дает положения системы, которые она принимает в момент приложения нагрузки и с которых начинается процесс ползучести.

Далее, введем кривую длительных равновесий. Она дает характеристику  $m_p(\varphi)$  нагружения фермы с длительными модулями, которая получается, если в (2.4) опустить члены с оператором дифференцирования. Кривая мгновенных равновесий и кривая длительных равновесий изображены на фиг. 3. Кривая длительных равновесий получается из кривой мгновенных равновесий умножением на  $n$ . Существенную роль в данных



Фиг. 1

рассуждениях будет играть кривая  $m_p(\varphi)$ , определяемая соотношением

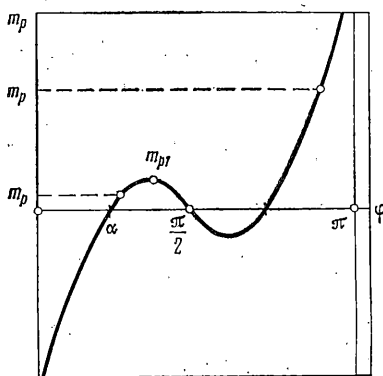
$$m_p \sin^3 \varphi - \sin \alpha \cos^3 \varphi = 0 \quad (2.7)$$

Введем далее величины  $m_{p1}$ ,  $m_{p2}$ , определяемые соотношениями

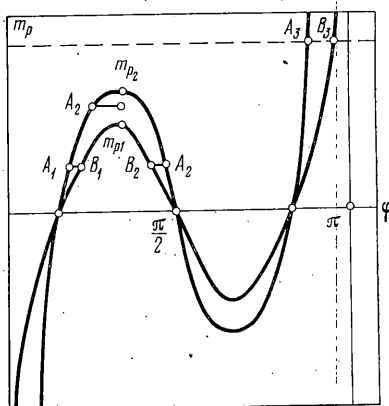
$$m_{p1} = n(1 - (\sin \alpha)^{2/3})^{3/2}, \quad m_{p2} = [1 - (\sin \alpha)^{2/3}]^{3/2} \quad (2.8)$$

Легко устанавливается, что  $m_{p2}$  есть верхняя критическая нагрузка на кривой мгновенных равновесий, а  $m_{p1}$  — верхняя критическая нагрузка на кривой длительных равновесий.

3. Как показывают детальные численные расчеты, в зависимости от начальных данных и уровня нагрузки возможны два типа траекторий нагружения системы. Первый тип характеризуется тем, что решение соответ-



Фиг. 2



Фиг. 3

ствующей краевой задачи существует на всем бесконечном отрезке времени  $0 \leq t \leq \infty$ . Для траекторий второго типа решение существует лишь на некотором отрезке времени  $0 \leq t \leq t_{*1}$ . Приведем более детальные данные по этому поводу. Для простоты примем, что в начальный момент нагружения  $\varphi$  при заданной нагрузке  $m_p$  принимает какое-либо значение на кривой мгновенных равновесий, что наиболее типично. Имеем следующие случаи.

3.1. Траектория первого типа:  $0 < m_p < m_{p1}$ . При изменении  $t$  от 0 до  $+\infty$  происходит перемещение состояния системы из точки  $A_1$  на кривой мгновенных равновесий в некоторую точку  $B_1$  на кривой длительных равновесий (фиг. 3). Следует отметить, что в этих случаях все траектории оказываются асимптотически устойчивыми по отношению к возмущению начальных данных, равно устойчивыми и по отношению к возмущению внешней нагрузки.

3.2. Траектория второго типа  $m_{p1} < m_p < m_{p2}$ . В начальный момент система находится в точке  $A_2$ , из которой и начинается движение. Однако решение (2.6) существует лишь до  $t = t_{*1}$ , когда система выходит на кривую вязкоупругих хлопков и выполняется соотношение  $\beta'(t_{*1}) = 0$ .

Поскольку траектория нагружения непродолжима, то здесь не имеет смысла говорить об асимптотической устойчивости, устойчивости при постоянно действующих возмущениях и так далее. Явление, которое происходит при  $t = t_{*1}$ , ниже будем называть вязкоупругим хлопком.

3.3. В случае  $m_p > m_{p2}$  опять имеет место траектория первого типа. Причем в начальный момент система совершает упругий хлопок и оказывается в прохлопнутом состоянии в точке  $A_3$  на кривой мгновенных равновесий (фиг. 3). В дальнейшем система за бесконечное время переходит из  $A_3$  в  $B_3$  на кривой длительных равновесий. Заметим, что в данном случае

также имеет место как асимптотическая устойчивость, так и ее устойчивость при постоянно действующих возмущениях [6].

Если начальные положения системы отличны от точек кривой мгновенных равновесий, то в этом случае качественно сохраняются описанные выше типы траекторий нагружения системы. Такой характер траекторий при различных  $m_p$  впервые был обнаружен в [7-9].

4. Рассмотрим подробное поведение системы при  $t=t_{*1}$  при постоянной нагрузке. Уравнение (2.6) для этого случая запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \Phi(\varphi)/\Psi(\varphi), \quad \Phi(\varphi) = [m_p \sin \varphi + n(\sin \alpha - \sin \varphi) \cos \varphi] \times \\ &\times \sin \varphi \cos \varphi, \quad \Psi(\varphi) = \sin \alpha \cos^3 \varphi - m_p \sin^3 \varphi \end{aligned} \quad (4.1)$$

причем  $\Phi$  и  $\Psi$  — целые функции. Очевидно, при  $t=t_{*1}$  и  $\varphi=\varphi_{*1}$  функция  $\Psi(\varphi_{*1})=0$ .

Пусть кратность корня  $\varphi_{*1}$  равна  $l$ . В этом случае уравнение (4.1) можно записать в виде

$$\dot{\varphi} = X(\varphi)/(\varphi - \varphi_{*1})^l, \quad X(\varphi_{*1}) \neq 0 \quad (4.2)$$

Из (4.2) вытекает

$$\varphi - \varphi_{*1} \approx [(l+1)X(\varphi_{*1})]^{1/(l+1)} (t - t_{*1})^{1/(l+1)} \quad (4.3)$$

Во всех случаях оказывалось  $l=1$  и  $X(\varphi_{*1}) < 0$ . Поэтому причиной непродолжимости траектории во всех этих случаях является наличие на траектории точки вертикальной касательной. Из (4.1) находим

$$\varphi'' = \frac{\Phi' \Psi - \Phi \Psi'}{\Psi^3} \Phi \quad (4.4)$$

Пусть при  $\varphi=\varphi_{*1}$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) &= (\varphi - \varphi_{*1})^k \Phi_0(\varphi), \quad \Phi_0(\varphi_{*1}) \neq 0 \\ \Psi(\varphi) &= (\varphi - \varphi_{*1})^{l+k} \Psi_0(\varphi), \quad \Psi_0(\varphi_{*1}) \neq 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из (4.4), (4.5) получим

$$\varphi'' = \frac{(\varphi - \varphi_{*1}) (\Psi_0 \Phi_0' - \Phi_0 \Psi_0') - l \Phi_0 \Psi_0'}{(\varphi - \varphi_{*1})^{2l+1} \Psi_0^3} \Phi_0 \quad (4.6)$$

Пусть  $t=t_{*1}$  и тогда должны иметь место соотношения (4.5) при  $k, l > 0$ . Но в этом случае из (4.6) вытекает  $\varphi'' = \infty$ . Наоборот, если при  $t=t_{*1}$  величина  $\varphi'' = \infty$ , то  $2l+1 > 0$ . Легко видеть, что обязательно  $l > 0$ . Действительно, при  $l=0$  из (4.7) вытекает конечность  $\beta''$ . Но если  $l > 0$ , то  $\varphi'' = \infty$ .

Таким образом, доказан следующий факт: в условиях модели Мизеса и материала (2.3), (2.4) имеет место соотношение  $t_{*1} \rightleftharpoons t_{*3}$ .

Из формулы (4.3) также ясна и причина расходимости при  $t=t_{*1}$  традиционных методов расчета, например метода Рунге — Кутты. Поэтому соотношение  $t_{*1} \rightleftharpoons t_{*3}$  можно продолжить следующим образом:  $t_{*1} \rightleftharpoons t_{*3} \rightarrow t_{*6}$ .

Таким образом, на основе всего изложенного выше можно нарисовать такую картину поведения фермы при разных нагрузках: при  $0 < m_p < m_{p1}$  ферма без хлопка деформируется плавно по времени до нового равновесного состояния; при  $m_{p1} \leq m_p \leq m_{p2}$  за конечное время  $t_{*1}$  происходит потеря устойчивости фермы с вязкоупругим механизмом хлопка; при  $m_p > m_{p2}$  происходит мгновенный хлопок фермы с чисто упругим механизмом

хлопка. Критическое время дается формулой

$$t_{*1} = t_{*3} = \int_{\varphi_M}^{\varphi_{1*}} \frac{\Psi(\varphi) d\varphi}{\Phi(\varphi)} \quad (4.7)$$

Из (4.7) вытекает, что  $t_{*1}$  монотонно меняется от бесконечности до нуля, если  $m_p$  растет от  $m_{p1}$  до  $m_{p2}$ .

5. Дадим механическую трактовку критерия  $t_{*1}$ . В первую очередь отметим, что если при  $\varphi = \varphi_{*1}$  величина  $\varphi$  имеет полюс порядка  $l$ , то, как видно из (4.6),  $\varphi''$  имеет полюс порядка  $(2l+1)$ . Таким образом, при  $t \rightarrow t_{*1}$  роль инерционных членов становится весьма существенной. Предположим, что ферма в ключе несет массу  $M$ . Поэтому учет инерции может быть произведен, если в (2.6) вместо  $m_p$  поставить  $m_p - M\Delta''$ , где  $\Delta$  — вертикальное перемещение ключа. В результате получаем уравнение

$$m_0 \varphi'' = \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{\sin \alpha} \left[ \frac{m_p}{\cos \varphi} + \frac{m_p}{\cos \varphi} - n \left( 1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} \right) + \right. \quad (5.1) \\ \left. + \varphi' \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} (\sin \alpha + m_p) - \frac{m_0 \sin \alpha}{\cos \varphi \sin^2 \varphi} \varphi'' + 2\varphi'^2 \frac{\sin \alpha}{\sin^3 \varphi} m_0 \right] - \\ - 6\varphi' \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} + \varphi' \varphi'' \left( 6 \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right)$$

В (5.1)  $m_0$  — безразмерная масса, пропорциональная  $M$ .

Основной факт, характеризующий ситуацию в этом случае, заключается в том, что всякое решение задачи Коши для уравнения (5.1) продолжается на всем бесконечном отрезке времени  $0 \leq t < \infty$ . Приведем только основную идею доказательства.

В силу самой структуры уравнения (5.1) его решения могут быть непродолжимыми, если при некотором  $t_{*2}$  угол  $\varphi \rightarrow \infty$  [10]. Но при этом обязательно при некотором  $t$  угол  $\varphi$  должен пройти через  $\pi$ . Упрощая правую часть в окрестности  $\pi$ , устанавливаем, что  $\varphi \rightarrow \pi$  только при  $t \rightarrow \infty$ . Это противоречие и доказывает теорему.

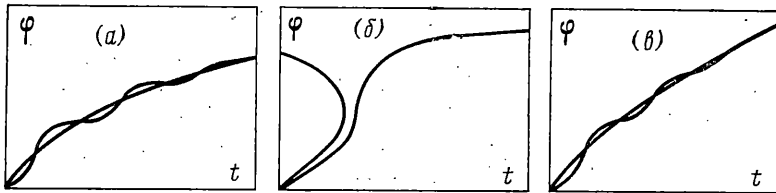
Наиболее важен вопрос о том, насколько инерционные члены искажают траектории. Разумеется, если  $m_0$  велико, то и искажение будет большим. Поэтому имеет смысл рассматривать малую инерцию. Это тем более оправдано, что в случае тонкостенных оболочечных конструкций, прообразом которых является ферма Мизеса, имеет место именно этот случай малой массы.

Подробные расчеты по уравнению (5.1) при разных  $m_p$  и начальных данных показывают, что имеется три типа динамических траекторий, соответствующих случаям п. 3. В случае 3.1 существенное отклонение квазистатической и динамической траектории наблюдается лишь на начальном участке, и оно вызвано начальными условиями. Отклонение носит характер погранслоя по времени, на большей части траектории имеем практическое совпадение (фиг. 4).

Для траектории случая 3.2 характерно совпадение с квазистатической на некотором среднем промежутке времени между начальным и  $t_{*1}$ . При приближении к  $t_{*1}$  наблюдается резкое отклонение динамической траектории от квазистатической и одновременно резкий рост ускорений на динамической траектории (они имеют порядок  $1/m_0$ , что и воспринимается как потеря устойчивости оболочки с вязкоупругим механизмом хлопка).

В случае (3.3), когда происходит начальный упругий перескок на кривую равновесий, динамическая траектория имеет большие ускорения (порядка  $1/m_0$ ) на начальном участке движения, что воспринимается как хлопок с упругим механизмом.

Механические истоки вязкоупругих хлопков можно прояснить и посредством следующей интерпретации. В случае упругой фермы (фиг. 2), если  $m_p < m_{p1}$ , ферма уже в начальный момент нагружения может развивать усилие, соизмеримое с приложенным, и в какой-то мере уравновесить его. Происходит движение массы  $m_0$  в соответствии со случаем 3.1. Если  $m_p > m_{p1}$ , то в случае упругой фермы она не может при малых прогибах развить усилие, сравнимое с приложенным. Поэтому на начальном участке она получает ускорения порядка  $1/m_0$ . В случае вязкоупругой фермы



Фиг. 4

кривая мгновенных равновесий и кривая длительных равновесий дают характеристики нагружения в начальный момент и при  $t = \infty$ . При этом, как указывалось, кривая длительных равновесий идет всегда ниже кривой мгновенных равновесий, и это означает, что ферма в процессе ползучести монотонно теряет жесткость.

В случае 3.1, если  $m_p > m_{p1}$ , то в любой момент деформации фермы ее жесткость достаточна, чтобы уравновесить приложенную нагрузку, и вязкоупругого хлопка не происходит. Если  $m_p > m_{p2}$ , то уже в начальный момент ферма не в состоянии уравновесить нагрузку — появляются большие ускорения, происходит упругий хлопок.

При  $m_{p1} < m_p < m_{p2}$  ферма в течение некоторого времени, пока ее жесткость сильно не упадет, еще может уравновесить внешнюю нагрузку, при этом ее ускорения и скорости равны нулю. Однако наступает момент, когда ее уменьшающаяся вследствие ползучести жесткость не в состоянии уравновесить внешнюю нагрузку — происходит вязкоупругий хлопок.

Приведенные выше рассуждения показывают, что хлопкообразные явления в системе всегда связаны с появлением ускорений порядка  $1/m_0$ . В упругом хлопке такие ускорения появляются на начальном этапе, а вязкоупругом — при достижении  $t_{*1}$ .

6. Рассмотрим случай нагрузки  $m_p(t)$ , зависящей от времени.

*Теорема.* Пусть  $m_p(0) < m_{p1}$ , тогда при  $t \geq t^* > 0$  выполняется неравенство  $m_p(t) > m_{p1}$ .

В этом случае при некотором  $t_{*2}$  имеет место хлопок фермы с вязкоупругим механизмом. При  $m_p(0) > m_{p1}$  имеет место упругий хлопок в начальный момент нагружения.

В частном случае, когда  $m_p(t) = kt$ , критическое время  $t_{*1}$  довольно точно следует закону обратной пропорциональности.

7. Рассмотрим общий случай закона деформирования

$$P_m \left( \frac{d}{dt} \right) \sigma = Q_n \left( \frac{d}{dt} \right) \varepsilon \quad (7.1)$$

где  $P_m$ ,  $Q_n$  — некоторые полиномы оператора дифференцирования. Рассмотрим вначале случай, когда  $m = n$ , и пусть при  $\sigma = \text{const}$  и при  $t \rightarrow \infty$  величина

на  $\varepsilon$  приобретает некоторое значение ( $\varepsilon(\infty) \neq 0$ ). Квазистатические траектории находятся из уравнения

$$\varphi^{(n)} = \Phi(\varphi, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n-1)}) / \Psi(\varphi) \quad (7.2)$$

где  $\Psi(\varphi)$  определяется выражением из (4.1). Как и в п. 2, здесь вводятся кривая мгновенных равновесий и кривая длительных равновесий. На кривой мгновенных равновесий в начальный момент после приложения нагрузки определяется  $\varphi(0)$ . Естественно при этом принять

$$\varphi^{(k)}(0) = 0 \quad (k=1, \dots, n-1) \quad (7.3)$$

Как и ранее, вводятся  $m_{p1}$ ,  $m_{p2}$ . Сохраняется весь анализ п. 3. Однако здесь вязкоупругий хлопок связан уже с выполнением соотношений

$$\varphi^{(n)}(t_*) = \infty, \quad \Psi(\varphi_*) = 0 \quad (7.4)$$

Производные  $\varphi^{(k)}(t_*)$ ,  $k=0, \dots, n-1$  уже конечны. Поэтому при законе вязкоупругий хлопок проявляется в более «мягкой» форме. Учет инерционных членов приводит к уравнению

$$m\varphi^{(n+2)} = X(\varphi, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n+1)}) \quad (7.5)$$

*Теорема.* Все траектории (7.5) являются продолжимыми на всем отрезке  $0 \leq t \leq \infty$ .

Динамические траектории уравнения (7.5) также разбиваются на три типа при малом значении массы. К первому типу относятся траектории, в которых  $\varphi^{(n+2)}$  конечны при  $m_0 \rightarrow 0$ . Это будет иметь место, если  $0 < m_p < m_{p1}$ . Траектории отличаются от квазистатических лишь на начальном участке, и это различие носит характер погранслоя по времени. Для траекторий второго типа характерен резкий рост производных  $\varphi^{(n)}$  при некотором  $t = t_{*1}(m_0)$ . Причем

$$\varphi^{(n)} \rightarrow \infty, \quad t_{*1}(m_0) \rightarrow t_* < \infty, \quad m_0 \rightarrow 0 \quad (7.6)$$

Здесь  $m_{p1} < m_p < m_{p2}$ , и имеет место явление вязкоупругого хлопка. Наконец, траектории третьего типа характеризуются резким ростом производных  $\varphi^{(n)}$  уже в начальный момент нагружения. Они реализуются при  $m_p > m_{p2}$  и связаны с упругим хлопком системы в начальный момент нагружения.

Рассмотрим случай, когда закон (7.1) таков, что выполнено условие

$$\sigma = \text{const}, \quad \varepsilon(t) \rightarrow \infty \quad (7.7)$$

В этом случае невозможно построение кривой длительных равновесий. *Теорема.* Пусть нагрузка такова, что

$$m_p(t) \geq m^* > 0, \quad (0 < t < \infty) \quad (7.8)$$

В этом случае при выполнении (7.7) ферма теряет устойчивость при некотором  $t_{*1}$  с вязкоупругим механизмом хлопка.

8. Приведем некоторые факты, характеризующие явление хлопка для фермы из материалов с ползучестью. Примем следующий закон ползучести материала [1, 11]:

$$\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E} = \kappa \frac{\sigma^m \dot{\sigma}}{\mu^m \mu} + \frac{\sigma^{n-1} |\dot{\sigma}|}{\lambda} \quad (8.1)$$

где  $\kappa=1$ , если имеет место нагрузка, и  $\kappa=0$  в противном случае. В частности, для алюминиевого сплава 24S-T4 при  $T=314$  имеем  $\mu=562$ ,  $m=1$ ,

$n=3$  [1]:

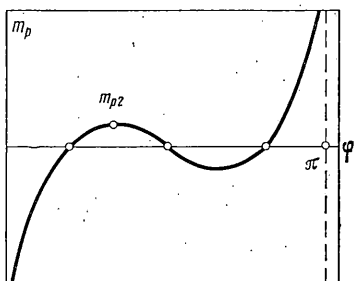
$$\varepsilon - \sigma/E = \sigma \sigma' / (562)^2 + \sigma^2 |\sigma| / 61.5^3 \quad (8.2)$$

$$\varepsilon - \sigma/E = \sigma^2 |\sigma| / 61.5^3 \quad (8.3)$$

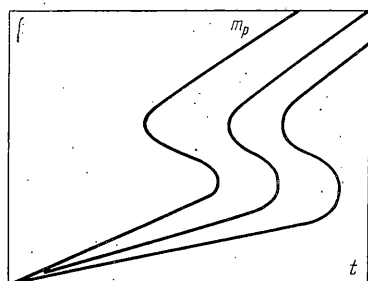
где зависимость (8.2) должна использоваться в процессе нагрузки, а (8.3) — при разгрузке, напряжение  $\sigma$  в (8.2), (8.3) берется в Па. Из (8.2), (8.3) получаем уравнение деформирования

$$\varphi' = \frac{m_p^3 (E/\lambda)^3 \sin^2 \varphi}{\sin \alpha \cos^4 \varphi - m_p \sin^3 \varphi \cos \varphi - \kappa (E/\lambda)^2 m_p^2 \sin^3 \varphi} \quad (8.4)$$

В уравнении (8.4) коэффициент  $\kappa$  выбирается нулем или единицей в зависимости от характера нагружения. И в данном случае можно ввести



Фиг. 5



Фиг. 6

кривую мгновенных равновесий, кривую длительных равновесий, кривую вязкоупругих хлопков. Для кривой мгновенных равновесий получаем соотношения

$$m_p(\varphi) = \cos \varphi \left( \frac{\mu}{E} \right)^2 \left\{ \left[ 1 + 2 \left( \frac{E}{\mu} \right)^2 \left( 1 - \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} \right) \right]^{1/2} - 1 \right\} \quad \left( 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (8.5)$$

$$m_p = \sin \alpha \operatorname{ctg}^3 \varphi \quad \left( \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi \right)$$

Общий вид кривой мгновенных равновесий приведен на фиг. 5. Кривая длительных равновесий здесь вырождается в прямую  $\varphi = \pi$  при любых  $m_p$ . В условиях закона ползучести (8.1) имеем следующие квазистатические траектории при постоянном  $m_p$ .

8.1. График зависимости  $\varphi(t)$  при  $0 \leq m_p < m_{p2}$  показан на фиг. 6. Из него следует, что при некотором  $t = t_{*1}$  имеет место разрыв  $\varphi(t)$ , что можно интерпретировать как потерю устойчивости фермы с вязкопластическим механизмом хлопка. Таким образом, здесь получаем траекторию второго типа.

8.2. Если  $m_{p2} \leq m_p < \infty$ , то имеет место упругий хлопок в начальный момент, и ферма оказывается на кривой мгновенных равновесий в соответствующей точке, после чего начинается вязкопластическая деформация и за бесконечное время ферма приходит в положение  $\varphi = \pi$ . Таким образом, здесь имеем траекторию первого типа.

Характер движения фермы в случаях 8.1 и 8.2 подтверждается также и на основе динамического анализа.



В рассмотренных двух случаях в момент хлопка ферма получает большие ускорения. Таким образом приходим к следующему выводу: при законе (8.1) ферма теряет устойчивость при любом уровне нагрузки  $m_p$ . Ситуации, которые имеют место при переменной нагрузке, дают следующие факты.

*Теорема.* Пусть  $m_p(0) < m_{p2}$  и, кроме того, существуют  $m^* > 0$  и  $t^* > 0$ , такие, что

$$m^* \leq m_p(t) \quad \text{при всех} \quad t \geq t^*.$$

В этом случае ферма теряет устойчивость с вязкопластическим механизмом хлопка. При  $m_p(0) > m_{p2}$  происходит мгновенная упругая потеря устойчивости в начальный момент.

Для прояснения некоторых принципиальных вопросов, связанных с  $t_{*2}$  (критическое время Хоффа [11]), имеет определенное значение утверждение.

*Теорема.* Уравнение (8.4) при любых ограниченных нагрузках и начальных условиях имеет ограниченное решение  $0 < \varphi < \pi$ .

Сформулированное утверждение очевидно по своему геометрическому содержанию, тем не менее оно установлено на основе анализа (8.4). Это имеет смысл, поскольку теорема утверждает, что в геометрически точной постановке задачи критическое время Хоффа отсутствует, точнее равно бесконечности. Построим приближенные теории деформации фермы, аналогичные теории среднего изгиба оболочек Власова — Маргерра — Муштари. Для этого положим

$$\varepsilon = 1 - \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \approx b_1 \beta + b_2 \beta^2, \quad \sigma = \frac{Em_p}{\cos \alpha} (1 + a_1 \beta + a_2 \beta^2) \quad (8.6)$$

$$b_1 = \operatorname{ctg} \alpha, \quad b_2 = -\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha), \quad a_1 = \operatorname{tg} \alpha, \quad a_2 = \frac{1}{2}(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

Если использовать приближения (8.6), то вместо (8.4) получаем уравнение

$$\beta = \left( \frac{m_p}{61.5 \cos \alpha} \right)^3 \frac{(1 + a_1 \beta + a_2 \beta^2)^3}{b_1 + 2b_2 \beta - (a_1 + 2a_2 \beta) [m_p / \cos \alpha + \kappa (m_p E / 562 \cos \alpha)^2 (1 + a_1 \beta + a_2 \beta^2)]} \quad (8.7)$$

*Теорема.* Для каждой траектории уравнения (8.7) существует конечное  $t_{*2}$ , такое, что  $\beta(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow t_{*2}$ .

Иными словами, для приближенного варианта (8.7) всегда существует конечное время Хоффа.

*Теорема.* Пусть при построении приближенной теории в соотношениях (8.6) удержано  $n$  членов,  $n \geq 1$ ; в этом случае  $t_{*2}(n) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Приведенные рассуждения показывают, что критическое время  $t_{*2}$  обладает существенным недостатком: при попытке уточнить теорию само значение  $t_{*2}$  не уточняется и в точной теории  $t_{*2}$  может вообще исчезнуть.

Таким образом, критерий  $a(t_{*2}) = \infty$  сам является неустойчивым. Это обстоятельство в теории тонкостенных конструкций может сказаться в том, что в теории Власова — Маргерра — Муштари оболочка может иметь критическое время  $t_{*2}$ , а в теории Рейсснера оно может отсутствовать, точнее быть равным бесконечности.

Между тем критическое время  $t_{*2}$ , наоборот, устойчиво по отношению к уточнениям. Это вытекает из следующих соображений:  $t_{*1}$  [2] определяется условием обращения в нуль знаменателя правой части выражения

(8.7). Точно так же, если составить уравнения  $n$ -го приближения, то  $t_*(n)$  будет определяться условием  $\Psi_n(\beta) = 0$ , где  $\Psi_n$  — знаменатель выражения для  $\beta$ . Легко видеть, что  $\Psi_n(\beta)$  — разложение в ряд по степеням  $\beta$  целой функции  $\Psi(\beta)$ , введенной формулой (4.1). Известно [12], что корни уравнения  $\Psi_n(\beta) = 0$  при  $n \rightarrow \infty$  приближаются к соответствующим корням целой функции  $\Psi(\beta)$ .

9. Рассмотрим несимметричную деформацию фермы (фиг. 1). Для относительных удлинений стержней и напряжений в них имеем формулу (2.1). Учитывая (2.4), можно получить два дифференциальных уравнения для  $\beta_1, \beta_2$ . Однако более предпочтительно перейти к новым переменным  $\gamma = 1/2(\beta_1 - \beta_2)$ ,  $\xi = 1/2(\beta_1 + \beta_2)$ , характеризующим степень несимметричности и симметричности деформации. Для  $\xi$  и  $\gamma$  получаем уравнения вида  $\xi = D_\xi/D$ ,  $\gamma = D_\gamma/D$ , где  $D_\xi, D_\gamma, D$  — полиномы второй степени относительно  $m_p$  с коэффициентами, являющимися целыми функциями  $\zeta, \gamma, \alpha$ .

Введем, как и ранее, кривую мгновенных равновесий, кривую длительных равновесий и кривую вязкоупругих хлопков. Именно кривую мгновенных равновесий определим соотношениями

$$\begin{aligned} 1 - 2 \frac{\sin \alpha \cos(\alpha + \beta_2)}{\sin(2\alpha + \beta_1 + \beta_2)} &= \frac{m_p \sin(\alpha + \beta_2)}{\sin(2\alpha + \beta_1 + \beta_2)} \\ 1 - 2 \frac{\sin \alpha \cos(\alpha + \beta_1)}{\sin(2\alpha + \beta_1 + \beta_2)} &= \frac{m_p \sin(\alpha + \beta_1)}{\sin(2\alpha + \beta_1 + \beta_2)} \end{aligned} \quad (9.1)$$

которые выражают реакцию системы на мгновенно приложенную нагрузку. Из (9.1) определяются  $m_p(\xi)$  и  $\gamma(\xi)$ . Кривая длительных равновесий строится на основе соотношений  $D_\xi = 0, D_\gamma = 0$ .

Наконец, кривая вязкоупругих хлопков определяется соотношением  $D = 0$ . При фиксированном  $m_p$  оно определяет кривую вязкоупругих хлопков как кривую в плоскости  $\gamma, \xi$ .

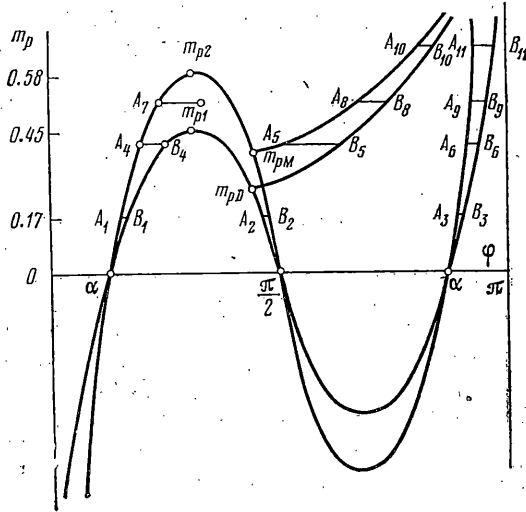
Приведем результаты анализа этих кривых: кривая мгновенных равновесий и кривая длительных равновесий подобны с коэффициентом подобия  $n$ ; при  $\alpha > 21^\circ$  уравнения (9.1) автоматически дают  $\gamma = 0, \xi = \beta_1 = \beta_2$ . В этих условиях возможна при любом  $m_p$  только симметричная форма равновесия фермы, и кривая мгновенных равновесий и кривая длительных равновесий имеют вид фиг. 2. При  $\alpha \leq 21^\circ$  с некоторых значений  $m_p$  имеется и несимметричная форма равновесия.

Общий вид кривой мгновенных равновесий и кривой длительных равновесий в этом случае приведен на фиг. 7. Здесь не приведена ветвь, соответствующая весьма низким нагрузкам  $m_p$ .

Численный анализ уравнений для  $\xi$  и  $\gamma$  показал, что и здесь основным фактом квазистатической теории является наличие двух типов траекторий: продолжимых на  $0 < t < \infty$  и непродолжимых. Непродолжимость траектории означает вязкоупругий хлопок системы. Однако явление здесь протекает значительно многообразней из-за несимметричных форм равновесия. Приведем окончательные результаты исследования ситуаций, которые возникают, если в начальный момент ферма находится на кривой мгновенных равновесий ( $\alpha = 40^\circ$ ). Все обозначения даны на фиг. 7.

9.1. При  $0 < m_p < m_{p,m}$  в одном варианте ферма деформируется в точку  $A_1$  и затем за бесконечное время переходит также в симметричную форму  $B_1$  на кривую длительных равновесий. Таким образом, здесь нет хлопка, а имеется траектория первого типа. Во втором маловероятном варианте в начальный момент произойдет упругий хлопок в точку  $A_2$  на кривой мгновенных равновесий и последующая за бесконечное время деформация в точку  $B_2$  на кривой длительных равновесий. При этом также имеем траекторию первого типа. Остальные варианты анализируются аналогично.

9.2. При  $m_{p,m} \leq m_p \leq m_{p,l}$  уже на начальной стадии имеются четыре ситуации. Однако рассмотрим только некоторые. В первой из них ферма принимает симметричную деформацию  $A_4$  на кривой мгновенных равновесий и за бесконечное время переходит на кривую длительных равновесий в  $B_4$ . Во втором варианте ферма принимает несимметричную деформацию  $A_5$  на кривой мгновенных равновесий в результате первоначального упругого хлопка и за бесконечное время переходит в несим-



Фиг. 7

траектории первого типа. В третьей ситуации ферма совершает упругий хлопок в симметричную форму  $A_9$  и затем за бесконечное время переходит в симметричную форму  $B_9$  (траектории первого типа).

9.4. При  $m_p > m_{p2}$  имеются две начальные ситуации. В первой из них ферма упругим хлопком принимает в начальный момент несимметричную форму  $A_{10}$  и затем за бесконечное время переходит в несимметричную форму  $B_{10}$  на кривой мгновенных равновесий. Во второй — ферма упругим хлопком переходит в симметричную форму  $A_{11}$  и затем за бесконечное время в  $B_{11}$ . Здесь обе траектории первого типа.

Значительный интерес представляет влияние начальных условий на характер движения и потерю устойчивости фермы. Для исследования этого вопроса придется отказаться от предположения, что в начальный момент ферма занимает положения на кривой мгновенных равновесий, и интегрировать или качественно изучать систему  $D=0$  при любых начальных данных. Приведем результаты такого исследования для  $\alpha=10^\circ$  в двух характерных случаях.

9.5. Когда  $0 < m_p = 0.2 < m_{pM}$  на фиг. 8 в плоскости  $\gamma, \zeta$  изображены кривая вязкоупругих хлопков и траектории системы при разных начальных данных. При  $m_p = 0.2$ , как уже указывалось, имеются три точки равновесия  $A_1, A_2, A_3$  на кривой мгновенных равновесий и  $B_1, B_2, B_3$  на кривой длительных равновесий. На фиг. 8 видно, что все три положения  $B_1, B_2, B_3$  являются точками притяжения траекторий нагружения.

Области притяжения  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  для каждой из этих точек намечены приблизительно на фиг. 9. Этот вывод, естественный для  $B_1, B_2$ , является неожиданным для  $B_3$ , поскольку она лежит на ниспадающей ветви характеристики нагружения. Этот парадокс, по-видимому, следует отнести за счет квазистатической трактовки.

Из фиг. 8 также видно, что  $\Pi_1$  содержит траектории, у которых  $\gamma_0$  может быть весьма большим,  $\zeta_0$  не должно превосходить некоторого значения. Далее, замкнутая часть кривой вязкоупругих хлопков проходит в  $\Pi_2$ . Поэтому  $\Pi_2$  также разбивается на две части  $\Pi_{21}, \Pi_{22}$ . Область  $\Pi_{21}$  содержит траекторию первого типа.  $\Pi_{22}$  — траектории второго типа, сопровождаемые вязкоупругим хлопком. Отметим, что  $\Pi_{21}$  содержит точки с достаточно большим  $\gamma_0$ . Таким образом, при малых  $\gamma$  всегда будем иметь траекторию второго типа с вязкоупругим хлопком.

9.6. Когда  $m_{p1} < m_p = 0.5 < m_{p2}$  на фиг. 9 в плоскости  $\gamma, \zeta$  изображены кривая вязкоупругих хлопков и траектории системы при разных начальных данных. Имеются две точки равновесия на кривой длительных равновесий  $B_8, B_9$ , обе являющиеся точками притяжения. Области  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  намечены на фиг. 9; каждая из областей  $\Pi_k$  разбивается на две подобласти  $\Pi_{k1}, \Pi_{k2}$ , порождающие траектории первого и второго типа.

Из фиг. 9 видна одна любопытная закономерность. Несимметричная составляющая  $\gamma$  всегда на начальном отрезке времени движения системы убывает. Для траекторий с большим  $\gamma_0$  это убывание имеет место для всех  $t$ , причем траектории всегда первого типа. Траектории с достаточно малыми  $\gamma_0$  всегда второго типа, им соответствует вязкоупругий хлопок системы.

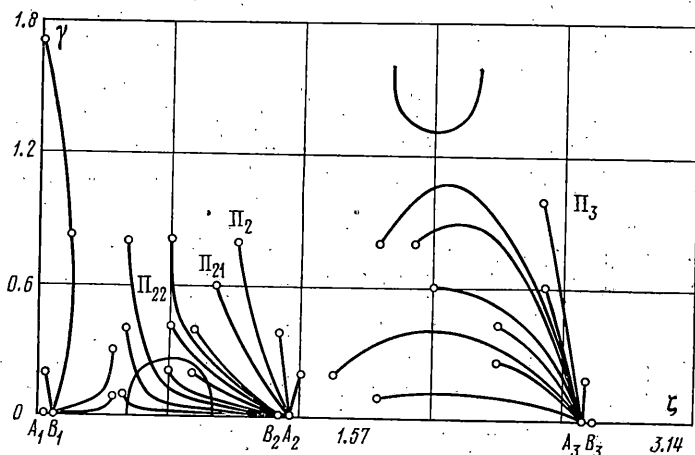
метричную форму  $B_5$  на кривой длительных равновесий. В третьем варианте ферма в начальный момент прохлопывает симметричным образом в точку  $A_6$  и затем за бесконечное время переходит в  $B_6$  на кривой длительных равновесий. Таким образом, в этом случае всегда получаются траектории первого рода.

9.3. Если  $m_{p1} < m_p < m_{p2}$ , то на начальной стадии также имеются четыре ситуации. Рассмотрим некоторые из них. В первой ферма принимает симметричную форму  $A_7$  и затем в течение конечного времени  $t_{*1}$  обязательно выходит на кривую вязкоупругих хлопков и происходит хлопок с вязкоупругим механизмом (таким образом имеем траекторию второго типа).

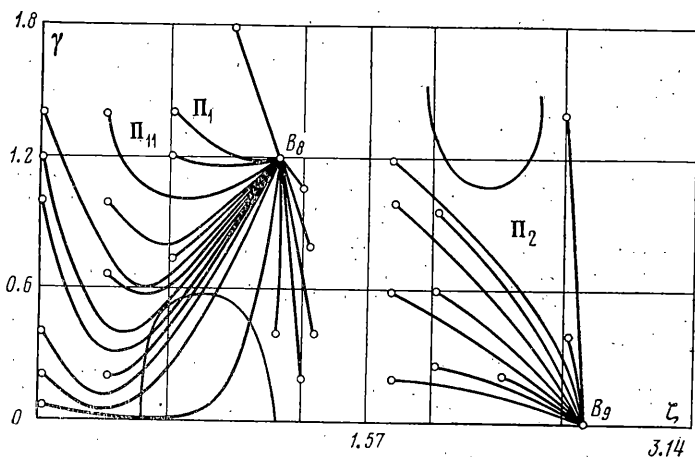
Во второй ситуации ферма в начальный момент совершает упругий хлопок в точку  $A_8$ , причем принимает несимметричную форму и затем за бесконечное время переходит в несимметричную форму  $B_8$ . Здесь

10. На примере фермы Мизеса можно отметить некоторые общие закономерности потери устойчивости тонкостенных вязкоупругих систем. Как видно из приведенных рассмотрений, основным недостатком тех траекторий, которые должны быть отнесены к «неудовлетворительным», является наличие участка движения с большими ускорениями. Такая же картина, впрочем, характерна и для хлопка чисто упругих систем.

С другой стороны, для удовлетворительных траекторий без хлопка характерны конечные ускорения при  $m_0 \rightarrow 0$ . Таким образом, в задачах



Фиг. 8



Фиг. 9

устойчивости вязкоупругих систем (равно как и в динамических задачах хлопка) определенный круг вопросов охватывает следующая схема, характеризующая удовлетворительность устойчивой траектории на конечном отрезке времени  $T$ . Пусть уравнения движения имеют вид

$$m_0 a_*'' = \Phi(a_*, a_*, t) \quad (10.1)$$

Решение уравнения (10.1)  $a_*(t, m_0)$  будем называть устойчивым на отрезке  $[0, T]$ , если  $a_*''(t, m_0)$  ограничена на  $[0, T]$  при  $m_0 \rightarrow 0$ . В противном случае решение  $a_*(t, m_0)$  будем называть неустойчивым. Таким образом, имеем единый критерий устойчивости, общий как для динамических, так и для вязкоупругих систем.

В рассмотренном в п. 3 случае симметричной деформации фермы устойчивыми будут все траектории из 3.1 и второго типа из 3.2, для которых  $t_{*2} > T$ . Неустойчивыми будут траектории второго типа из 3.2, для которых  $t_{*1} < T$ , и все траектории из 3.3. Легко также видеть, что в соответствии с данным определением классифицируются и все случаи несимметричной деформации фермы.

Отметим, что не всегда устойчивые по Ляпунову или даже асимптотически устойчивые траектории будут устойчивыми в приведенном смысле. Более того, традиционный переход к устойчивости при постоянно действующих возмущениях также не дает возможности отделить удовлетворительные траектории от неудовлетворительных в приведенном смысле. Например, траектории из 3.3 все асимптотически устойчивы и устойчивы при постоянно действующих возмущениях, но не устойчивы в приведенном смысле.

Таким образом, встает проблема качественного исследования (10.1) при  $m_0 \rightarrow 0$ . Эти вопросы рассматривались в [13-15]. Значительную помощь могут оказать качественные методы разбиения множества начальных данных на области притяжения и различным решениям на кривой длительных равновесий, которых в механически осмысленных бесконечномерных системах типа пластин и оболочек всегда конечное число. Весьма полезен переход к квазистатической задаче и выделение областей начальных данных, порождающих траектории второго типа. И здесь же возникает проблема оценки  $t_1$  на траекториях второго типа.

Определенный интерес представляет и математическое описание сравнительной картины динамики и квазистатики. Отметим также, что все сформулированные выше теоремы о потере устойчивости фермы, по существу, являются теоремами неустойчивости в приведенном определении.

Заслуживает также более подробного изучения и факт неустойчивости  $t_2$  (критического времени Хоффа). Необходимо определить реальный смысл  $t_{*2}$  и область его приложения. Очень важный аспект развития проблемы по-прежнему представляют статистические методы. Они даже в этом круге задач более важны, чем в чисто упругих задачах. Здесь нет даже простейших ориентиров для сравнительной оценки степени устойчивости отдельных решений, каким в упругих задачах является уровень потенциальной энергии.

Поступила 5 VI 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
2. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., «Наука», 1977.
3. Ворovich И. И. О некоторых свойствах операторов вязкоупругости. Избранные проблемы прикладной механики. М., ВИНТИ, 1974.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.
5. Феодосьев В. И. Упругие элементы точного приборостроения. М., Оборонгиз, 1949.
6. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., «Наука», 1965.
7. Минакова Н. И. Численное исследование задачи устойчивости пологих сферических вязкоупругих оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3.
8. Браунс Я. А., Тетерс Г. А. Закритическое поведение вязкоупругих тонкостенных оболочек. Тр. X Всес. конф. по теории пластин и оболочек, т. 1. Тбилиси, «Мецниереба», 1975.
9. Браунс Я. А., Тетерс Г. А. Деформирование вязкоупругих тонкостенных оболочек в закритической стадии. Механика полимеров, 1976, № 1.
10. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л., Гостехиздат, 1949.
11. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
12. Гурвич А., Курант Р. Теория функций. М., «Наука», 1968.
13. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотика разложений решений сингулярно возмущенных уравнений. М., «Наука», 1973.
14. Понтрягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, т. 21, № 5.
15. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М., «Наука», 1975.