

## О КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ, ОСНОВАННОМ НА НАКОПЛЕНИИ ПОВРЕЖДЕННОСТИ, И ЕГО ПРИЛОЖЕНИИ К КОМПОЗИТАМ

Ю. В. СУВорова

(Москва)

В механике деформируемых тел известны два типа критериев прочности. Наиболее распространенными являются критерии, устанавливающие определенное соотношение между компонентами тензоров напряжений и деформаций, при котором наступает разрушение. Эти критерии часто дают удовлетворительные результаты, но не могут предсказать реакцию материала, например, при повторном деформировании и, естественно, непригодны, если материал обладает вязкостью.

Второй тип критериев прочности основан на понятии повреждаемости. Как правило, вводится мера поврежденности материала, т. е. некоторая величина, характеризующая процесс разрушения, протекающий во времени. Окончательное разрушение произойдет тогда, когда величина поврежденности достигнет определенного значения.

Анализ этих двух типов критериев, описание их достоинств и недостатков можно найти, например, в [1-3].

Предлагаемый ниже критерий использует оба подхода: с одной стороны, он основывается на накоплении поврежденности в материале, с другой стороны, за момент разрушения принимается такой, при котором истинное напряжение в поперечном сечении достигает некоторой предельной величины.

1. Обозначим через  $\sigma_0$  истинное напряжение в материале. Если бы материал не разрушался, то именно это напряжение и определяло бы диаграмму деформирования  $\sigma_0 = \varphi(\varepsilon)$ . Процесс разрушения приводит к тому, что измеряемое напряжение  $\sigma$  оказывается меньше на величину  $\Delta\sigma$ :

$$\sigma = \sigma_0 - \Delta\sigma \quad (1.1)$$

Поэтому диаграмма деформирования, которую можно зафиксировать в эксперименте,  $\sigma = \varphi(\varepsilon) - \Delta\sigma$  будет расположена ниже диаграммы, соответствующей неразрушенному материалу. Происходящий постепенно процесс разрушения или накопления поврежденности, т. е. изменение величины  $\Delta\sigma$ , можно представить и описать некоторым оператором, например наследственного типа [4]  $\Delta\sigma = M * \sigma$ .

Из выражения (1.1) следует

$$\sigma + M * \sigma = \sigma_0 = \varphi(\varepsilon) \quad (1.2)$$

Это уравнение описывает процесс деформирования, т. е. диаграмму  $\sigma \sim \varepsilon$  с учетом накопления поврежденности. Если за критерий разрушения принять условие достижения истинным напряжением своего предельного значения, т. е.  $\sigma_0 = \sigma_0^*$ , то критерий разрушения запишется следующим образом:

$$\sigma + M * \sigma = \sigma_0^* \quad (1.3)$$

Положим в уравнении (1.3)  $\sigma = \text{const} = \sigma^*$ . В этом случае оно устанавливает зависимость между величиной приложенного напряжения и временем до разрушения, т. е. позволяет описать кривые длительной прочно-

сти. Из уравнения (1.3) следует

$$\sigma^* = \sigma_0^* / (1 + M^*) = \sigma_0^* (1 - L^*) \quad (1.4)$$

Здесь  $L^*$  — резольвентный оператор.

В зависимости от вида выбранного оператора  $M^*$  (или  $L^*$ ) получают разные выражения для описания кривых длительной прочности. Наиболее разумно, по-видимому, подходить к этому вопросу таким образом, чтобы исходная формула (1.2) позволила правильно описать и процесс деформирования материала. Если  $M^*$  выбрать в виде интегрального оператора наследственного типа, а ядро его в виде экспоненты  $\exp[-\beta(t-\tau)]$ , то из (1.4) получаем для кривой длительной прочности

$$\sigma^* = \sigma_0^* / [1 + (1 - e^{-\beta t}) / \beta] \quad (1.5)$$

Выражение (1.5) имеет два предельных значения

$$\sigma_0^* / (1 + 1/\beta) \leq \sigma^* \leq \sigma_0^*$$

соответствующих бесконечно быстрому нагружению  $t=0$ , когда практически реализуется теоретическая прочность, и малым уровням нагрузок, которые материал может выдерживать бесконечно долго.

Если ядро наследственности выбрать в виде ядра Абеля,  $k(1-\alpha)(t-\tau)^{-\alpha}$ , то

$$\sigma^* = \sigma_0^* / (1 + kt_*^{1-\alpha}) \quad (1.6)$$

Нижний предел прочности в (1.6) равен нулю; при таком выборе ядра даже самое малое напряжение  $\sigma$ , отличное от нуля, может привести к разрушению через достаточно большой промежуток времени.

Критерий (1.3) дает возможность связать процесс деформирования материала с его предельными характеристиками, т. е. с разрушающим напряжением, вообще при любом законе нагружения, а не только в том случае, когда напряжение постоянно (длительная прочность).

2. Предлагаемый подход может быть применен и к таким материалам, как композиты. Композиты — это существенно неоднородные материалы, и исследование процессов их разрушения связано с определенными трудностями; даже один и тот же материал может разрушаться по-разному при соответствующих условиях. Однако при анализе работы конструкции не всегда бывает легко определить, какой именно механизм работает. Поэтому построение критериев прочности идет обычно или путем обобщения известных соотношений для однородных материалов, или упрощением анализа на основе микромеханики разрушения.

К первому типу относятся, например, критерии [5-7]. Они имеют довольно сложное выражение, требуют определения большого количества экспериментальных констант, применения вычислительной техники в расчетах, но дают возможность учесть влияние различных факторов на процесс разрушения, например анизотропию, и не связаны с дополнительным выяснением механизма разрушения.

В качестве примера критериев второго типа можно привести работы [8, 9]. Они ограничиваются исследованием двух различных механизмов разрушения: от нормальных и касательных напряжений в плоскости, в которой расположены волокна одного из направлений армирования. Известны и другие критерии подобного типа.

Предлагаемая в данной работе модель позволяет связать процесс деформирования и разрушения композита с происходящим постепенно процессом разрушения хрупких волокон.

Обычно армирующие волокна изготавливаются из высокопрочного материала, они ведут себя упруго вплоть до разрушения и диаграмма деформирования их линейна  $\varphi(\varepsilon) = E\varepsilon$ . Если бы они не разрывались в процессе растяжения образца, то и диаграмма деформирования композита также была бы линейной. За счет постепенного разрушения волокон и нарушения их адгезионной связи с матрицей некоторые участки волокон перестают нести нагрузку частично или даже полностью, вследствие этого и наблюдается отклонение от линейной диаграммы  $\sigma \sim \varepsilon$ . Таким образом, по степени и характеру нелинейности можно судить о повреждаемости материала.

$V_b$	$r_1$	$N_p/\sigma_b$	$t_*$	$V_b/(1+kt_*^{1-\alpha})$	$r_2$
0.45	0.9	0.226	25	0.197	0.87
0.45	0.8	0.226	89	0.185	0.81
0.45	0.7	0.226	1776	0.16	0.71
0.3	0.9	0.148	28	0.13	0.88
0.3	0.8	0.148	97	0.12	0.81
0.3	0.7	0.148	1854	0.106	0.71
0.15	0.9	0.072	28	0.065	0.90
0.15	0.8	0.072	108	0.0612	0.85
0.15	0.7	0.072	1925	0.05	0.70

Вполне естественно для композита за истинное напряжение  $\sigma_0$  принять напряжение в волокне, поскольку, как известно, роль матрицы сводится лишь к перераспределению нагрузки между волокнами, и теоретическая прочность композита  $\sigma_b^*$  (если волокна в процессе деформирования не разрушаются) равна  $\sigma_b^* = \sigma_b V_b$ , где  $V_b$  — объемное содержание волокон в композите, а  $\sigma_b^*$  — предельное напряжение в волокне. Тогда процесс деформирования в соответствии с (1.2) может быть записан следующим образом:

$$\sigma + M^* \sigma = E \varepsilon V_b = \sigma_b V_b \quad (2.1)$$

а критерий разрушения в соответствии с (1.3) будет иметь вид

$$\sigma + M^* \sigma = \sigma_b^* V_b \quad (2.2)$$

Эта формула показывает, что предельное напряжение, соответствующее разрушению, будет пропорционально объемному содержанию волокон в композите, но только тогда, когда режим нагружения такой, при котором можно считать значения  $t^*$  (время до разрушения) одинаковыми [10, 11].

Соответственно формула (1.6), описывающая зависимость предельного напряжения от времени в условиях длительной прочности, принимает форму

$$\sigma^* = \sigma_b^* V_b / (1 + kt_*^{1-\alpha}) \quad (2.3)$$

В [11] подчеркивается, что при одном и том же объемном содержании волокон не слишком большое уменьшение напряжения  $\sigma^*$  (в пределах 20%) приводит к существенному росту долговечности, т. е.  $t_*$  (примерно, в 70 раз). Это свидетельствует о том, что показатель степени  $(1-\alpha)$  в формуле (2.3) должен быть мал. Этот вывод согласуется с результатами [4].

3. По данным, приведенным в [11], были осуществлены вычисления. Параметры  $k$  и  $\alpha$  определялись по значениям долговечностей, полученным при объемном содержании волокон в 45%. Были найдены следующие значения  $k=1 \text{ час}^{-(1-\alpha)}$ ,  $\alpha=0.92$ . Далее эти значения использовались при расчетах длительной прочности для других значений объемного содержания при разных уровнях напряжений.

Перепишем выражение (2.3) в обозначениях [11]:

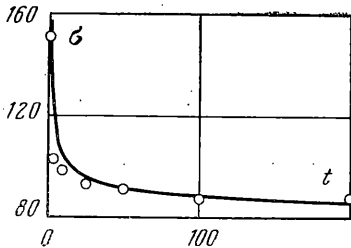
$$r N_p / \sigma_b^* = V_b / (1 + kt_*^{1-\alpha})$$

где  $r$  — безразмерный параметр, характеризующий нагрузку,  $N_p$  — значения кратковременной прочности. В таблице приведены экспериментальные данные, взятые из [11] и рассчитанные с использованием параметров, определенных в данной работе.

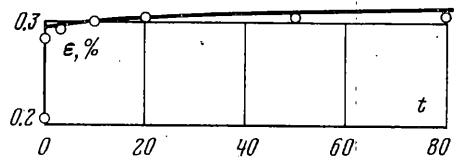
Сопоставление расчетных значений  $r_2$  и полученных в эксперименте  $r_1$  показывает, что приведенные в [11] данные достаточно хорошо описываются уравнением (2.3).

В качестве второго примера приведем сопоставление кривой длительной прочности с кривой ползучести для боропластика (кривые приведены в [11]) (фиг. 1, 2). По кривой длительной прочности (напряжения в паскалях, а время в днях) могут быть определены параметры материала в соответствии с формулой (2.3). Было найдено:  $1-\alpha=0.05$ ,  $k=0.54$  день<sup>-(1- $\alpha$ )</sup>. На фиг. 1 точками отмечены значения, рассчитанные по формуле (2.3) с использованием указанных параметров.

Далее полученные значения использовались для расчетов кривой ползучести (фиг. 2) по формуле (2.1). Здесь также точками нанесены вычис-



Фиг. 1



Фиг. 2

ленные значения. Видно, что соответствие везде достаточно хорошее, за исключением первой точки, т. е. мгновенной деформации. К сожалению, в [11] не приведены сведения о начальном участке кривой ползучести, поэтому нельзя было сопоставить эти величины.

Если в выражении (2.2) положить  $\sigma = \text{const}$ , то при использовании оператора Абея получим следующую зависимость между предельным напряжением  $\sigma^*$  и скоростью нагружения:

$$\sigma^{*(1-\alpha)} = k_1 \sigma^{*(2-\alpha)} / (\sigma_b^* V_b - \sigma^*), \quad k_1 = k / (2 - \alpha)$$

или в более простом виде — зависимость  $\sigma^*$  от времени до нагружения  $t_* = \sigma^* / \sigma^*$ :

$$\sigma^* = \sigma_b^* V_b / (1 + k_1 t_*^{(1-\alpha)}) \quad (3.1)$$

Если предположить, что предельная деформация постоянна и не зависит ни от времени до разрушения, ни от объемного содержания волокон, то из (3.1) следует, что разрушающее напряжение  $\sigma^*$  будет тем больше, чем выше скорость нагружения. Это соответствует известным представлениям о прочности волокнистых композитов [10-12].

Макроанализ процесса разрушения позволяет не только предсказать прочность всего композита, но и сделать некоторые качественные выводы о необходимых свойствах его компонент в тех или иных условиях работы элемента конструкции. Так, например, волокна с большим коэффициентом вариации начнут разрываться уже при очень низких напряжениях, так что нелинейность начального участка диаграммы деформирования будет сильнее, чем для волокон с малым коэффициентом вариации, хотя предельные значения прочности могут и не отличаться. Поэтому композит с волокнами первого типа будет обладать хорошими противоударными свойствами, так как способен поглощать энергию удара, но при многоцикловом нагружении накопление поврежденности приведет к более быстрому его разрушению, чем композита, волокна которого более равнопрочны и разрушаются почти одновременно.

Таким образом, анализ диаграмм деформирования дает некоторые сведения о характере процесса разрушения, и сопоставление его с микроанализом может оказаться полезным при изготовлении материала.

Критерий (2.2) может быть далее развит и обобщен, во-первых, учетом прочностных свойств матрицы, а во-вторых, статистическим анализом процесса разрушения.

Поступила 2 XI 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
2. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории вязкоупругости. М., «Наука», 1970.
3. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М., «Наука», 1974.
4. Суворова Ю. В. Нелинейные эффекты при деформировании наследственных сред. Механика полимеров, 1977, № 6.
5. Гольденблат И. И., Копнов В. А. Прочность стеклопластиков при сложном напряженном состоянии. Механика полимеров, 1965, № 2.
6. Малмейстер А. К. О геометрии теорий прочности. Механика полимеров, 1966, № 4.
7. Tsai S. W., Wu E. N. A general theory of strength for anisotropic materials. J. Composite Materials, 1971, vol. 5, No. 1.
8. Rabotnov Yu. N., Polilov A. N. Strength criteria for fibereinforced plastics. Fracture, 1977, vol. 3. ICF4, Waterloo, Canada, 1977.
9. Hasin Z., Rotem A. A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials. J. Composite Materials, 1973, vol. 7, p. 448-464.
10. Lifshitz J. M. Time-dependent fracture of fibrous composites. Composite Materials, vol. 5. Acad. Press, N. Y.—London, 1974, p. 249-311. (Рус. перев.: М., «Мир», 1978.)
11. Скудра А. М., Булавс Ф. Я., Роценс К. А. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков. Рига, «Зинатне», 1971.
12. Рабинович А. Л. Введение в механику армированных полимеров. М., «Наука», 1970.