

## ДЕФОРМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ НАГРУЖЕНИЯ

Я. Ф. АНДРУСИК, К. Н. РУСИНКО

(Львов)

Проводится аналитическое исследование изменения поверхности нагружения. Рассматривается ортогональная догрузка и знакопеременная деформация. Показано, что при такой деформации не только образуются новые особенности на поверхности нагружения, но и исчезают ранее существующие. Исследования проведены в рамках концепции скольжения.

**1. Исходные соотношения.** Определение формы поверхности нагружения проводится в рамках теории скольжения, сформулированной в понятиях сопротивления пластическому сдвигу — интенсивность скольжений [1].

Примем частный вид сопротивления сдвигу

$$S_{nl} = \tau_s (1 + a\varphi_{nl}) \quad (1.1)$$

где  $\tau_s$  — предел текучести при чистом сдвиге;  $\varphi_{nl}$  — интенсивность скольжений в плоскости с нормалью  $n$  в направлении  $l$ , обуславливающих анизотропное изменение величины  $S_{nl}$ ;  $a$  — постоянная.

Если в плоскости с нормалью  $n$  в направлении  $l$  сдвиги отсутствуют, то  $\varphi_{nl} = 0$ , т. е. при задании  $S_{nl}$  формулой (1.1), теория [1] находится в соответствии с теорией скольжения Батдорфа — Будянского [2].

Вместе с тем в теории Батдорфа — Будянского не сформулировано изменение деформационных свойств тела в направлениях, противоположных скольжениям. В отличие от этого формула (1.1) определяет эти свойства во всех направлениях.

Действительно, пусть  $l$  обозначает направление скольжений в плоскости с нормалью  $n$ . Тогда в направлении  $-l$ , обратном  $l$ , имеем [1]:

$$\varphi_{n, -l} = -\varphi_{nl} \quad (1.2)$$

поэтому

$$S_{n, -l} = \tau_s (1 - a\varphi_{nl}), \quad \varphi_{nl} > 0 \quad (1.3)$$

В области, где в данный момент происходят пластические сдвиги, справедливо равенство

$$S_{nl} = \tau_{nl} \quad (1.4)$$

а вне этой области  $S_{nl} > \tau_{nl}$ . Здесь  $\tau_{nl}$  — составляющая касательного напряжения в системе  $n, l$ , т. е.

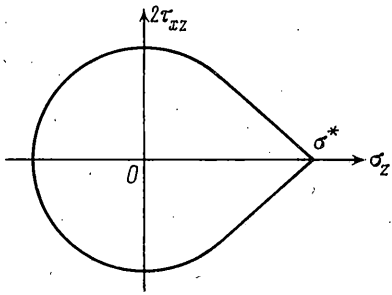
$$\tau_{nl} = \sigma_{ij} l_i n_j \quad (i, j = x, y, z) \quad (1.5)$$

где  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $l_i, n_j$  — направляющие косинусы осей  $l$  и  $n$  относительно фиксированной системы координат  $x, y, z$ .

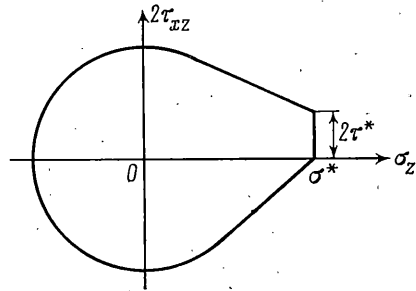
Формулы (1.1) и (1.3) являются исходными для получения уравнения поверхности нагружения. Рассмотрим взаимосвязь между поверхностью нагружения и сопротивлением сдвигу.

Формулы (1.1), (1.2) и (1.4) определяют сопротивление сдвигу за всю историю нагружения. При последующем нагружении, в момент возникновения скользящих, используя равенство (1.4), можно найти  $\tau_{nl}$ . Если задан закон нагружения, то по найденному  $\tau_{nl}$  определится весь тензор напряжений, т. е. точка на поверхности нагружения. Рассмотрев достаточное количество различных путей нагружения, можно построить всю поверхность нагружения.

**2. Изменение поверхности нагружения в процессе ортогональной догрузки.** Известно, что при одноосном растяжении на поверхности нагруже-



Фиг. 1



Фиг. 2

ния образуется угловая точка [3] и поверхность нагружения принимает вид, показанный на фиг. 1.

В плоскости координат растягивающего напряжения  $\sigma_z$  и напряжения кручения  $2\tau_{xz}$  к начальному кругу пластичности

$$\sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2 = 4\tau_s^2 \quad (2.1)$$

касаются две прямые линии

$$\tau_s \sigma_z \pm \tau_{xz} \sqrt{\sigma_z^2 - 4\tau_s^2} = \sigma^* \tau_s \quad (2.2)$$

проходящие через точку  $\sigma_z = \sigma^*$ ,  $\tau_{xz} = 0$ , где  $\sigma^*$  — максимальное напряжение растяжения элемента.

Исследуем изменение этой поверхности в процессе ортогональной догрузки. К предварительно растянутому элементу ( $\sigma_z = \sigma^*$ ) приложим касательное напряжение  $\tau_{xz} = \tau^*$  при  $\sigma_z = \sigma^* = \text{const}$ . При этом, согласно (1.5), касательное напряжение будет определяться формулой

$$\tau_{nl}^* = 1/2 \sigma^* \sin 2\beta \sin \omega + (\sin \alpha \cos \omega \cos 2\beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \omega) \tau^* \quad (2.3)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — углы, характеризующие направление  $n$ ;  $\omega$  — угол, характеризующий направление  $l$ . Их отсчет проводится так же, как и в [4].

Обозначим через  $D_0$  область изменения переменных  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\omega$ , где шли пластические сдвиги при  $\sigma_z = \sigma^*$  и  $\tau_{xz} = \tau^*$ . Для этой области на основании (1.4) можно записать

$$S_{nl} = \tau_{nl}^* \quad (2.4)$$

а вне ее

$$S_{nl} = \tau_s, \quad \varphi_{nl} = 0 \quad (2.5)$$

Для получения аналитического выражения поверхности нагружения образец будем подвергать пробному пропорциональному нагружению при совместном растяжении и кручении. В этом случае на основании (1.5) можно записать

$$\tau_{nl} = 1/2 \sigma_z [\sin 2\beta \sin \omega + k (\cos \alpha \cos 2\beta \sin \omega - \sin \alpha \sin \beta \cos \omega)] \quad (2.6)$$

$$k = 2\tau_{xz} / \sigma_z = \text{const}$$

Пропорциональное нагружение будем осуществлять до момента выхода на поверхность нагружения, т. е. до соприкосновения сопротивления сдвигу  $S_{nl}$  и касательного напряжения  $\tau_{nl}$ .

Сопротивление сдвигу  $S_{nl}$  в четырехмерном пространстве переменных  $\alpha, \beta, \omega, S_{nl}$  изображает некоторую гиперповерхность. Касательное напряжение также изображает гиперповерхность  $\tau_{nl}$ . Внутри области  $D_0$  гиперповерхность  $S_{nl}$  гладкая, поэтому соприкосновение  $S_{nl}$  и  $\tau_{nl}$  запишется так:

$$\tau_{nl}^* = \tau_{nl}, \quad \partial \tau_{nl}^* / \partial u = \partial \tau_{nl} / \partial u \quad (u = \alpha, \beta, \omega) \quad (2.7)$$

В результате получили систему четырех уравнений с неизвестными  $\alpha, \beta, \omega, \sigma_z$ . Решая эту систему, находим

$$\alpha = 0, \quad \operatorname{tg} 2\beta = (2\tau^* - \sigma_z k) / (\sigma_z - \sigma^*), \quad \omega = \pi/2, \quad \sigma_z = \sigma^*$$

Допустим теперь, что гиперповерхности  $S_{nl}$  и  $\tau_{nl}$  соприкасаются на границе области  $D_0$ . Определение координат указанных точек сводится к нахождению максимума функции  $\tau_{nl}$  по переменным  $\alpha, \beta, \omega$  при условии, что эти переменные связаны соотношением  $\tau_{nl}^* = \tau_s$ .

Составим вспомогательную функцию

$$f = \tau_{nl} - \lambda (\tau_{nl}^* - \tau_s) \quad (2.8)$$

где  $\lambda$  — неопределенный множитель Лагранжа; тогда координаты условного экстремума найдутся из уравнений

$$\partial f / \partial u = 0 \quad (u = \alpha, \beta, \omega, \lambda) \quad (2.9)$$

Исключив из уравнений (2.9) параметр  $\lambda$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{nl}}{\partial \alpha} \frac{\partial \tau_{nl}^*}{\partial \beta} - \frac{\partial \tau_{nl}}{\partial \beta} \frac{\partial \tau_{nl}^*}{\partial \alpha} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{nl}}{\partial \omega} \frac{\partial \tau_{nl}^*}{\partial \beta} - \frac{\partial \tau_{nl}}{\partial \beta} \frac{\partial \tau_{nl}}{\partial \omega} &= 0, \quad \tau_{nl}^* = \tau_s \end{aligned} \quad (2.10)$$

К уравнениям (2.10) необходимо присоединить еще равенство  $\tau_{nl} = \tau_s$ . Решением системы этих уравнений являются функции

$$\alpha = 0, \quad \sin 2\beta = (2\tau_{xz} - 2\tau^*) / \sqrt{(\sigma^* - \sigma_z)^2 + (2\tau_{xz} - 2\tau^*)^2}, \quad \omega = \pi/2 \quad (2.11)$$

причем  $\sigma_z$  и  $2\tau_{xz}$  связаны между собой следующим соотношением:

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 (\tau^{*2} - \tau_s^2) + 2\sigma^* \tau_s^2 \sigma_z + \tau_{xz}^2 (\sigma^{*2} - 4\tau_s^2) + 8\tau^* \tau_s^2 \tau_{xz} - 2\sigma^* \tau^* \sigma_z \tau_{xz} - \\ - \tau_s^2 \sigma^{*2} - 4\tau_s \tau^{*2} = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) — это уравнение двух пересекающихся прямых. Уравнение одной из них

$$(2\tau_s \sigma^* - 2\tau^* \sqrt{4\tau^{*2} + \sigma^{*2} - 4\tau_s^2}) \sigma_z + \quad (2.13)$$

$$+ (4\tau_s \tau^* + \sigma^* \sqrt{4\tau^{*2} + \sigma^{*2} - 4\tau_s^2}) 2\tau_{xz} - 2\tau_s (\sigma^{*2} + 4\tau^{*2}) = 0$$

Эта линия проходит через точку  $\sigma_z = \sigma^*, \tau_{xz} = \tau^*$  и касается начального круга пластичности (2.1).

Если гиперповерхности  $S_{nl}$  и  $\tau_{nl}$  касаются вне области  $D_0$ , где  $S_{nl} = \tau_s$ , то условия их касания будут

$$\tau_{nl} = \tau_s, \quad \partial \tau_{nl} / \partial u = 0 \quad (u = \alpha, \beta, \omega) \quad (2.14)$$

Данные условия такие же, как и при отсутствии предварительной нагрузки образца, поэтому из (2.14) следует кривая текучести (2.4).

По полученным уравнениям построена поверхность нагружения (фиг. 2) при  $\sigma_z > 0$ . Данные результаты находятся в соответствии с выводами, приведенными в [5, 6].

**3. Исчезновение угловой точки при знакопеременной деформации.** В [3] построена поверхность нагружения для  $\sigma_z > 0$  (фиг. 1). Рассмотрим ее форму в области  $\sigma_z < 0$  при одноосном растяжении. При этом будем исходить из изменения сопротивления пластическому сдвигу по формуле (1.3).

В момент действия  $\sigma_z = \sigma^*$  касательное напряжение определяется так:

$$\tau_{nl} = 1/2 \sigma^* \sin 2\beta \sin \omega \quad (3.1)$$

Приравняв сопротивление сдвигу (1.1) к касательному напряжению (3.1), получим уравнение  $\tau_s(1 + a\varphi_{nl}) = \tau_{nl}^*$  для определения интенсивности скольжений  $\varphi_{nl}$ . Из этого уравнения следует

$$\varphi_{nl} = (\tau_{nl}^* - \tau_s) / a\tau_s \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (1.3), находим

$$S_{n,-l} = 2\tau_s - \tau_{nl}^* \quad (3.3)$$

Для определения уравнения тыльного участка поверхности нагружения, как и в предыдущем случае, будем подвергать образец пробному пропорциональному нагружению при совместном сжатии и кручении, когда  $\tau_{nl}$  вычисляется по (2.6).

Условие соприкосновения  $S_{n,-l}$  и  $\tau_{nl}$  запишется в виде

$$\tau_{nl} = S_{n,-l} = 2\tau_s - \tau_{nl}^*, \quad \frac{\partial S_{n,-l}}{\partial u} = \frac{\partial \tau_{nl}}{\partial u} \quad (u = \alpha, \beta, \omega) \quad (3.4)$$

Решением системы этих уравнений будут функции

$$\alpha = 0, \quad \sin 2\beta = 1/4(\sigma^* - \sigma_z) / \tau_s, \quad \omega = 1/2\pi \quad (3.5)$$

Уравнение участка поверхности нагружения, где произошло разрушение, следующее:

$$(\sigma_z - \sigma^*)^2 + 4\tau_{xz}^2 = 16\tau_s^2 \quad (3.6)$$

Это уравнение окружности с центром в точке  $\sigma_z = \sigma^*$ ,  $\tau_{xz} = 0$  и радиусом  $4\tau_s$ .

Полный вид поверхности нагружения при одноосном растяжении изображен на фиг. 3. Штриховой линией обозначены контуры первоначального круга пластичности.

Допустим далее, что испытываемый образец после действия одноосного растяжения  $\sigma_z = \sigma^*$  подвергается сжатию до некоторого напряжения  $\sigma_z = \sigma^{**} < 0$ . В момент действия  $\sigma^{**}$  возникает касательное напряжение

$$\tau_{nl}^{**} = 1/2 \sigma^{**} \sin 2\beta \sin \omega \quad (3.7)$$

В направлениях скольжения при сжатии сопротивление сдвигу изменяется следующим образом:

$$S_{nl} = \tau_s(1 - a\varphi_{nl} + a\varphi_{nl}^0) \quad (3.8)$$

где  $\varphi_{nl}^0$  — интенсивность скольжения, обусловленная сжатием.

Приравнявая (3.8) к (3.7), найдем  $\tau_s(1 - a\varphi_{nl} + a\varphi_{nl}^\circ) = \tau_{nl}^{**}$ .  
Подставляя сюда вместо  $\varphi_{nl}$  значение (3.2), получим

$$\varphi_{nl}^\circ = (\tau_{nl}^{**} - 2\tau_s + \tau_{nl}^*) / a\tau_s \quad (3.9)$$

Запишем выражение для сопротивления сдвигу в направлениях, противоположных скольжениям при сжатии

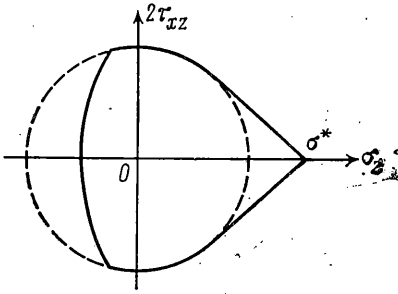
$$S_{n, -l} = \tau_s(1 + a\varphi_{nl} - a\varphi_{nl}^\circ) \quad (3.10)$$

Подставляя сюда вместо  $\varphi_{nl}$  и  $\varphi_{nl}^\circ$  их значения (3.2) и (3.9), найдем

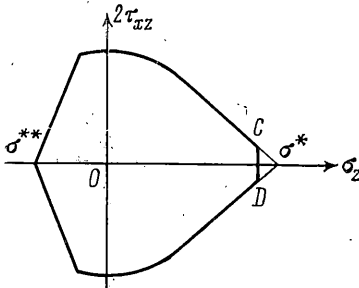
$$S_{n, -l} = 2\tau_s - \tau_{nl}^{**} \quad (3.11)$$

Кроме того, для направлений скольжений при сжатии имеем  $S_{nl} = \tau_{nl}^{**}$ .

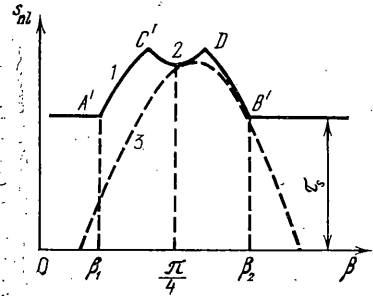
Как и в предыдущих случаях, на основании последнего соотношения и (3.11) можно получить уравнения участков по-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

верхности нагружения. Опуская промежуточные выкладки, запишем уравнения поверхности нагружения

$$-4\tau_s\sigma_z \pm 2\tau_{xz}\sqrt{(\sigma^{**} + \sigma^*)^2 - 16\tau_s^2} = 4\tau_s\sigma^{**} \quad (3.12)$$

$$(\sigma_z + \sigma^{**})^2 + 4\tau_{xz}^2 = 16\tau_s^2$$

Первое уравнение — это уравнение прямых линий, проходящих через точку  $\sigma_z = \sigma^*$ ,  $\tau_{xz} = 0$  и касающихся участка поверхности нагружения (3.6), и второе уравнение — это уравнение окружности с центром в точке  $\sigma_z = \sigma^{**}$ ,  $\tau_{xz} = 0$  и радиусом  $4\tau_s$ .

На основании выражений (3.12), а также полученных ранее соотношений (2.1), (2.2), (3.6) построена поверхность нагружения (фиг. 4).

Из (фиг. 4) видно, что при сжатии, последующем после растяжения, исчезает ранее существующая особенность в точке  $\sigma_z = \sigma^*$ ,  $\tau_{xz} = 0$ . Вместе с тем, возникают новые угловые точки C и D.

Для выяснения причины их возникновения рассмотрим график изменения  $S_{nl}$  (фиг. 5), заданного в виде (2.4), (2.5), (3.11), в зависимости от координаты  $\beta$  для  $\omega = \pi/2$ . Кривая 1 соответствует  $\tau_{nl}^*$ , а кривая 2 —  $S_{n, -l}$ ,  $\beta_1 = 1/2 \arcsin(2\tau_s/\sigma^*)$ ,  $\beta_2 = \pi/2 - \beta_1$ ,  $0 < \beta_1 \leq \pi/4$ .

Наличие особенностей в точках A<sup>1</sup> и B<sup>1</sup> на графике  $S_{nl}$  является причиной возникновения угловой точки  $\sigma_z = \sigma^*$ ,  $\tau_{xz} = 0$  на поверхности нагружения (фиг. 4). Особенности на графике  $S_{nl}$  в точках C<sup>1</sup> и D<sup>1</sup> приводят к появлению угловых точек C и D (фиг. 4).

Как видно из фиг. 5, переход точки касания гиперповерхности  $\tau_{nl}$  (пунктирная кривая 3) с  $S_{nl}$  из участка C<sup>1</sup>D<sup>1</sup>, на участок D'B' (при изменении коэффициента k

формулы (2.6)) всегда осуществляется скачком, что и является причиной появления угловых точек  $C$  и  $D$  на поверхности нагружения. Их возникновение связано с существом модели скольжения и не зависит от принятого закона разупрочнения (1.3).

Поступила 5 VII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов М. Я. Элементы аналитической теории пластичности. Докл. АН СССР, 1972, т. 205, № 2.
2. Batdorf S. B., Budiansky B. A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip. NASA, Techn. Note, 1949, No. 1871. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1962, № 1.)
3. Cicala P. Sulle deformazione plasteiche. Atti Accad. Naz. dei Lincei, Rendiconti, 1950, vol. 8, fsc. 6.
4. Русинко К. Н., Калатинец А. Е., Древалъ С. С. Вопросы концепции скольжения в теории пластичности. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 1.
5. Ключников В. Д. О возможном пути построения соотношений пластичности. ПММ, 1959, т. 23, вып. 2.
6. Ключников В. Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.