МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1979

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ, ИМЕЮЩИЕ МЕСТО ПРИ ДВИЖЕНИИ ШТАМПА ПО ГРАНИЦЕ ВЯЗКОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

А. А. ШМАТКОВА

(Москва)

Дан вывод полной системы уравнений динамической контактной задачи для вязкоупругого тела. Показано, что в общем случае составляющие перемещения выражаются через четыре функции, каждая из которых удовлетворяет одному из конкретных уравнений эллиптического типа. Для некоторых задач оказывается возможным искомые величины выразить только через одну функцию, удовлетворяющую обобщенному гармоническому уравнению. Например, задача о движении с некоторой постоянной скоростью жесткого штампа по границе вязкоупругого полупространства и внедрение в вязкоупругое пространство с некоторой постоянной скоростью тонкого твердого тела, симметричного относительно плоскости $z=0$.

1. Запишем уравнения состояния в случае линейного изотропного вязкоупругого тела (трехосное деформированное состояние)

$$\begin{gathered}
\sigma_x=\lambda^\circ\theta+2\mu^\circ\varepsilon_x \qquad \tau_{xy}=2\mu^\circ\gamma_{xy} \\
\sigma_y=\lambda^\circ\theta+2\mu^\circ\varepsilon_y \qquad \tau_{yz}=2\mu^\circ\gamma_{yz} \\
\sigma_z=\lambda^\circ\theta+2\mu^\circ\varepsilon_z \qquad \tau_{zx}=2\mu^\circ\gamma_{zx} \\
\lambda^\circ=\lambda(1+\Delta^*), \qquad \mu^\circ=\mu(1+M^*)
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь θ — относительное объемное расширение, λ и μ — постоянные Ламэ, а Δ^* и M^* — интегральные операторы, ядра которых находятся экспериментальным путем.

Для многих вязкоупругих материалов [1] объемная деформация чисто упруга. Для выполнения этого условия потребуем, чтобы оператор объемного сжатия был постоянным

$$3\lambda^\circ+2\mu^\circ=\text{const} \tag{1.2}$$

Учитывая (1.2), получаем, что уравнения состояния (1.1) зависят только от одного интегрального оператора, который, согласно работе [2], должен иметь следующий вид:

$$M^*(\ldots)=-\int_{-\infty}^{t}\Gamma(t-\tau)(\ldots)\,d\tau \tag{1.3}$$

Во многих экспериментальных работах, например [3–5], по исследованию механических свойств вязкоупругих материалов при больших скоростях нагружения указывается, что наиболее близкое совпадение с данными опытов можно получить, если принять экспоненциальную зависимость для функции $\Gamma(t-\tau)$:

$$\Gamma(t-\tau)=m\exp\left[-(t-\tau)/t_0\right] \tag{1.4}$$

где m и t_0 — положительные постоянные величины, значения которых выбираются из условий лучшего совпадения с данными экспериментов. В дальнейшем исследование будем производить только для быстро релаксирующих материалов.

Запишем соотношения, связывающие компоненты деформации с перемещениями

$$\varepsilon_x=\partial u/\partial x,\qquad \varepsilon_y=\partial v/\partial y,\qquad \varepsilon_z=\partial w/\partial z$$

$$\gamma_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad \gamma_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad \gamma_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{1.5}$$

Чтобы получить полную систему уравнений, необходимо выписать также уравнения движения

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Массовые силы предполагаются отсутствующими.

Систему уравнений (1.1), (1.5), (1.6) можно свести к трем дифференциальным уравнениям относительно перемещений u, v, w.

С помощью (1.5) исключим из (1.1) компоненты деформации. Затем, благодаря выбранному ядру (1.4), перейдем от интегро-дифференциальной связи напряжений и перемещений к дифференциальной.

Ниже будут исследоваться задачи о подвижных нагрузках и о движении жесткого штампа по границе вязкоупругих сред. Положим, что во всех случаях движение совершается вдоль оси ox с некоторой заданной постоянной скоростью W. При решении задач учитываются инерционные члены в уравнениях движения.

Перейдем к подвижной системе координат, связав ее с движущейся нагрузкой или соответственно со штампом. Тогда новые координаты выразятся через старые следующим образом: $x_1=x-Wt$, $y_1=y$, $z_1=z$.

Напряженное состояние в новой системе координат не будет зависеть от времени. Заметим, что всюду ниже индексы у вновь введенных координат будем опускать.

Тогда полная система уравнений наследственной теории упругости преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}-\rho W^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}-\rho W^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0\\
&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}-\rho W^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\left(1-t_0W\frac{\partial}{\partial x}\right)\sigma_x=\left(1-t_0W\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right]-$$
$$-\frac{2}{3}\mu m t_0\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\left(1-t_0W\frac{\partial}{\partial x}\right)\sigma_y=\left(1-t_0W\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right]-$$
$$-\frac{2}{3}\mu m t_0\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$
$$\left(1-t_0W\frac{\partial}{\partial x}\right)\sigma_z=\left(1-t_0W\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right]-$$
$$-\frac{2}{3}\mu m t_0\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$\left(1-t_0W\frac{\partial}{\partial x}\right)\tau_{xy}=\left(1-t_0W\frac{\partial}{\partial x}\right)\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\mu m t_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$\left(1-t_0W\frac{\partial}{\partial x}\right)\tau_{yz}=\left(1-t_0W\frac{\partial}{\partial x}\right)\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\mu m t_0\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$
$$\left(1-t_0W\frac{\partial}{\partial x}\right)\tau_{zx}=\left(1-t_0W\frac{\partial}{\partial x}\right)\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\mu m t_0\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Введем безразмерные функции и координаты

$$\sigma_x\check{}=\sigma_x/\mu,\ldots,\quad u\check{}=u/x_0,\ldots,\quad x\check{}=x/x_0,\ldots$$

Здесь x_0 — некоторый условный линейный масштаб, например $x_0=ct_0$, где c — скорость распространения звука в данной среде, t_0 характеризует время релаксации вязкоупругого материала. Галочку у безразмерных функций и у вновь введенных координат будем опускать.

Исключим компоненты тензора напряжений, тогда получим систему относительно перемещений

$$\begin{aligned}a_{11}(u)+a_{12}(v)+a_{13}(w)&=0\\ a_{12}(u)+a_{22}(v)+a_{23}(w)&=0\\ a_{13}(u)+a_{23}(v)+a_{33}(w)&=0\end{aligned}\tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}&a_{11}=B_1\Delta+B_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B_3\frac{\partial^2}{\partial x^2},\qquad a_{12}=B_3\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\\ &a_{22}=B_1\Delta+B_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B_3\frac{\partial^2}{\partial y^2},\qquad a_{13}=B_3\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\\ &a_{33}=B_1\Delta+B_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B_3\frac{\partial^2}{\partial z^2},\qquad a_{23}=B_3\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\\ &B_1=1-H-R\frac{\partial}{\partial x},\qquad B_2=\left(-1+R\frac{\partial}{\partial x}\right)N\\ &B_3=-\frac{1}{3}H+\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(1-R\frac{\partial}{\partial x}\right)\end{aligned}\tag{1.9}$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$R=Wt_0/x_0,\quad H=mt_0,\quad N=\rho W^2/\mu\tag{1.10}$$

Предположим теперь, что перемещения u, v и w являются результатом действия некоторых дифференциальных операторов на функции φ_i ($i=1, 2, 3$), относительно которых предполагаем, что они имеют непрерывные частные производные до шестого порядка. Тогда

$$
\begin{aligned}
u&=L_{11}(\varphi_1)+L_{12}(\varphi_2)+L_{13}(\varphi_3)\\
v&=L_{12}(\varphi_1)+L_{22}(\varphi_2)+L_{23}(\varphi_3)\\
w&=L_{13}(\varphi_1)+L_{23}(\varphi_2)+L_{33}(\varphi_3)
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Непосредственной подстановкой в уравнения (1.8) можно убедиться в том, что искомые дифференциальные операторы имеют вид

$$
\begin{aligned}
L_{11}&=B_1\Delta+B_2N\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B_3\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\\
L_{22}&=B_1\Delta+B_2N\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B_3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\\
L_{33}&=B_1\Delta+B_2N\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B_3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

$$
L_{12}=-B_3\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},\quad L_{13}=-B_3\frac{\partial^2}{\partial x\partial z},\quad L_{23}=-B_3\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}
$$

а каждая функция φ_i $(i=1,2,3)$ должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$
\left(B_1\Delta+B_2N\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[(B_1+B_3)\Delta+B_2N\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\varphi_i=0 \tag{1.13}
$$

Произведем оценку порядков безразмерных параметров (1.10). Используя числовые данные [4], получим $R\sim1$, $H\sim10^{-5}$, $N\sim10^{-2}$.

Поскольку, как указывалось выше, для рассматриваемых сред последействие не очень значительно, то можно полагать члены, содержащие параметр H, пренебрежимо малыми по сравнению с остальными.

Введем новые функции для перемещений и компонентов тензора напряжений, которые выражаются через старые следующим образом:

$$
u^\circ=u-R\frac{\partial u}{\partial x},\ldots,\qquad \sigma_x^\circ=\sigma_x-R\frac{\partial\sigma_x}{\partial x},\ldots \tag{1.14}
$$

Сделанное выше предположение дает возможность, учитывая (1.9), (1.11) и (1.12), записать

$$
\begin{aligned}
u^\circ&=\left[\left(2+\frac{\lambda}{\mu}\right)\Delta-N\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\varphi_1-\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)\\
v^\circ&=\left[\left(2+\frac{\lambda}{\mu}\right)\Delta-N\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\varphi_2-\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)\\
w^\circ&=\left[\left(2+\frac{\lambda}{\mu}\right)\Delta-N\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\varphi_3-\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Согласно (1.13), имеем

$$
\left(\Delta-N\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[\left(2+\frac{\lambda}{\mu}\right)\Delta-N\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\varphi_i=0\qquad (i=1,2,3) \tag{1.16}
$$

Из последних шести соотношений системы (1.7) нетрудно получить выражения для определения компонентов тензора напряжений

$$\sigma_x^\circ = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\partial u^\circ}{\partial x}+\frac{\partial v^\circ}{\partial y}+\frac{\partial w^\circ}{\partial z}\right)+2\frac{\partial u^\circ}{\partial x}, \qquad \tau_{xy}^\circ = \frac{\partial u^\circ}{\partial y}+\frac{\partial v^\circ}{\partial x}$$

$$\sigma_y^\circ = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\partial u^\circ}{\partial x}+\frac{\partial v^\circ}{\partial y}+\frac{\partial w^\circ}{\partial z}\right)+2\frac{\partial v^\circ}{\partial y}, \qquad \tau_{yz}^\circ = \frac{\partial v^\circ}{\partial z}+\frac{\partial w^\circ}{\partial y} \qquad (1.17)$$

$$\sigma_z^\circ = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\partial u^\circ}{\partial x}+\frac{\partial v^\circ}{\partial y}+\frac{\partial w^\circ}{\partial z}\right)+2\frac{\partial w^\circ}{\partial z}, \qquad \tau_{xz}^\circ = \frac{\partial w^\circ}{\partial x}+\frac{\partial u^\circ}{\partial z}$$

При нахождении истинных компонентов тензора напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \ldots$ необходимо совершить преобразования, обратные введенным (1.14):

$$\sigma_x = -R^{-1}e^{x/R}\left[\int_{-\infty}^{x} \sigma_x^\circ e^{-x/R}\,dx + f_1(y,z)\right] \qquad (1.18)$$

. . . .

причем функции $f_1(y,z),\ldots$ равны нулю, поскольку необходимо выполнение естественного условия на бесконечности

$$\sigma_x, \sigma_y, \ldots \to 0 \quad \text{при} \quad (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \to \infty$$

Исходя из уравнения (1.16), можно сделать заключение, что решение задачи выражается через шесть функций, три из которых удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{1}{k_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_i^{(1)} = 0 \qquad (i=1,2,3) \qquad (1.19)$$

а другие три

$$\left(\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_i^{(2)} = 0 \qquad (i=1,2,3)$$

$$(k_1^2)^{-1} = 1-N>0, \qquad (k_2^2)^{-1} = 1-N(2+\lambda/\mu)^{-1}>0$$

Пусть

$$\frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_3^{(2)}}{\partial z} = \psi$$

Заметим, что при этом

$$\left(\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = 0 \qquad (1.20)$$

Имея также в виду, что

$$\left(\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_i^{(1)} = \frac{1}{k_3^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_i^{(1)} \qquad (i=1,2,3)$$

$$1/k_3^2 = 1/k_2^2 - 1/k_1^2 > 0$$

получим выражения для компонентов перемещений

$$u^\circ = \left(2+\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{1}{k_3^2}\frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial x^2} - \left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_3^{(1)}}{\partial z}\right)+\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]$$

$$v^\circ=\left(2+\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{1}{k_3^2}\frac{\partial^2\varphi_2^{(1)}}{\partial x^2}-\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3^{(1)}}{\partial z}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]$$

$$w^\circ=\left(2+\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{1}{k_3^2}\frac{\partial^2\varphi_3^{(1)}}{\partial x^2}-\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3^{(1)}}{\partial z}\right)+\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]$$

Таким образом, составляющие перемещения, а следовательно, и компоненты тензора напряжений и деформаций выражаются через четыре произвольные функции, каждая из которых удовлетворяет одному из уравнений (1.19), (1.20). Эти выражения являются в известном смысле аналогом решений Папковича — Нейбера.

Для некоторых задач оказывается возможным величины перемещений, а также компонентов напряжений и деформаций выразить только через одну функцию, удовлетворяющую обобщенному гармоническому уравнению. Рассмотрим две задачи, для решения которых оказывается достаточным подобное представление.

2. Движение жесткого штампа без сил трения по границе вязкоупругого полупространства. Учитывая соотношения (1.14), запишем граничные условия задачи относительно введенных функций σ_z°, τ_{xz}°, τ_{yz}° и w°.

На плоскости $z=0$, вне штампа

$$\sigma_z^\circ=0,\qquad \tau_{xz}^\circ=0,\qquad \tau_{yz}^\circ=0 \tag{2.1}$$

На плоскости $z=0$, на площадке контакта

$$w^\circ=f_1(x,y)=f(x,y)-R\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\qquad \tau_{xz}^\circ=0,\qquad \tau_{yz}^\circ=0 \tag{2.2}$$

При этом $f(x,y)$ — функция, соответствующая поверхности, ограничивающей основание штампа.

Совершая преобразования, такие же, как в приведенном выше общем случае, получаем

$$u^\circ=a\left[\left(\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-b\frac{\partial}{\partial x}\nabla\right]\theta^*$$

$$v^\circ=a\left[\left(\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-b\frac{\partial}{\partial y}\nabla\right]\theta^*$$

$$w^\circ=a\left[\left(\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-b\frac{\partial}{\partial z}\nabla\right]\theta^*$$

$$\sigma_x^\circ=ad\left[\left(\frac{a}{d}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\right.$$
$$\left.-b\left(\frac{a}{d}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\nabla\right]\theta^*$$

$$\sigma_y^\circ=ad\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{a}{d}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\right.$$
$$\left.-b\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{a}{d}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\nabla\right]\theta^* \tag{2.3}$$

$$\sigma_z^\circ=ad\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{a}{d}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\right.$$

$$-b\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{a}{d}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\nabla\Big]\theta^*$$

$$\tau_{xy}{}^\circ=a\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-2b\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\nabla\right]\theta^*$$

$$\tau_{yz}{}^\circ=a\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-2b\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\nabla\right]\theta^*$$

$$\tau_{xz}{}^\circ=a\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-2b\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\nabla\right]\theta^*$$

$$a=2+\lambda/\mu,\qquad b=1-1/a,\qquad d=\lambda/\mu$$

Функция $\theta^*(x, y, z)$ должна удовлетворять уравнению, представляющему собой произведение двух дифференциальных операторов

$$\left(\frac{1}{k_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\theta^*=0 \qquad (2.4)$$

Поэтому, если ввести функции θ_1 и θ_2, удовлетворяющие уравнениям

$$\left(\frac{1}{k_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\theta_1=0$$

$$\left(\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\theta_2=0 \qquad (2.5)$$

то общее решение (2.4) может быть представлено в виде суммы

$$\theta^*=\theta_1+\theta_2 \qquad (2.6)$$

Будем рассматривать случай, когда оба уравнения (2.5) эллиптического типа. Это будет тогда, когда скорость движения штампа не превышает скорости распространения звука в данной вязкоупругой среде.

Последние два условия из (2.1) и соответственно из (2.2) приводят к следующим дифференциальным соотношениям для функции θ^* при $z=0$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\theta^*=2b\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\theta^*$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\theta^*=2b\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\theta^* \qquad (2.7)$$

Продифференцируем первое условие (2.7) по x, второе — по y и вычтем одно из другого, тогда получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{k_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial}{\partial z}\theta^*|_{z=0}=0 \qquad (2.8)$$

Упростим (2.8), воспользовавшись (2.5) и (2.6)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial z}\theta_1|_{z=0}=0 \qquad (2.9)$$

Введем новую переменную $\xi_1=k_1x$. В таком случае первое из уравнений (2.5) будет

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\theta_1^*=0$$

Таким образом, $\theta_1^*(\xi_1, y, z)$ — гармоническая функция. Обратимся теперь к уравнению (2.9). После перехода к переменной ξ_1 получим

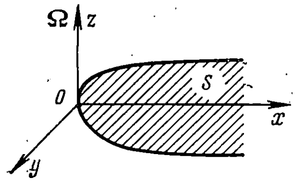
$$k_1^2\left(k_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial^3}{\partial\xi_1^2\,\partial z}\theta_1^*|_{z=0}=\theta_1^{**}|_{z=0}=0 \qquad (2.10)$$

Если к гармонической функции применяется любой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, где дифференцирование происходит по всем переменным, то в результате получается также гармоническая функция. Таким образом, $\Delta\theta_1^{**}=0$.

Из условия (2.10) и из того, что θ_1^{**} всюду регулярна и исчезает на бесконечности, следует, что $\theta_1^{**}=0$ всюду в пространстве, а следовательно, $\theta_1^*=\theta_1=0$.

Таким образом, перемещения, компоненты напряжения и деформации могут быть выражены через одну гармоническую функцию θ_2.

3. Внедрение без сил трения в вязкоупругое пространство тонкого твердого тела, симметричного относительно плоскости $z=0$. Будем полагать форму твердого тела такой, при которой производная для кривой, ограничивающей тело в плане, нигде не равна нулю.



Кроме того, положим, что форма тела в плане представляет собой полубесконечную область. При выполнении этих условий осуществляется такой случай, когда при движении твердого тела разрушение имеет место по всей его кромке. Очевидно, при той форме деформации, о которой здесь идет речь, перед внедряющимся телом будет возникать некоторая область пластических деформаций. Величина этой области будет зависеть от степени заостренности кромки внедряющегося тела. Принимая во внимание симметрию внедряющегося тела, запишем граничные условия для данной задачи относительно функций τ_{xz}°, τ_{yz}° и w°, введенных соотношениями (1.14).

На плоскости $z=0$, в области Ω (фигура):

$$w^\circ=0,\quad \tau_{xz}^\circ=0,\quad \tau_{yz}^\circ=0 \qquad (3.1)$$

На плоскости $z=0$, в области S:

$$w^\circ=F_1(x,y)=F(x,y)-R\frac{\partial F(x,y)}{\partial x},\quad \tau_{xz}^\circ=0,\quad \tau_{yz}^\circ=0 \qquad (3.2)$$

При этом $F(x, y)$ — функция, соответствующая поверхности, ограничивающей внедряющееся тело.

Дальнейшие рассуждения такие же, как и в предыдущем случае. Получаем, что и в этой задаче искомые величины выражаются через одну гармоническую функцию θ_2.

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi=\left(k_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\theta_2^* \qquad (3.3)$$

Согласно (2.5), будем иметь

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\theta_2^*=0,\qquad \xi_2=k_2x$$

Тогда соотношения для перемещений и компонентов напряжений примут вид

$$u^\circ=-abk_2\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2},\qquad v^\circ=-ab\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad w^\circ=-ab\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\sigma_{\xi_2}{}^\circ=-abd\left(\frac{a}{d}k_2{}^2\frac{\partial^2}{\partial\xi_2{}^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi$$

$$\sigma_y{}^\circ=-abd\left(k_2{}^2\frac{\partial^2}{\partial\xi_2{}^2}+\frac{a}{d}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi \qquad (3.4)$$

$$\sigma_z{}^\circ=-abd\left(k_2{}^2\frac{\partial^2}{\partial\xi_2{}^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{a}{d}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi$$

$$\overset{\circ}{\tau}_{\xi_2y}=-2abk_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_2\,\partial y},\qquad \tau_{yz}{}^\circ=-2ab\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z},\qquad \overset{\circ}{\tau}_{\xi_2z}=-2abk_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_2\,\partial z}$$

Отсюда получаем соотношения для $\tau_{yz}{}^\circ$ и $\overset{\circ}{\tau}_{\xi_2z}$ через w°:

$$\tau_{yz}{}^\circ=2\partial w^\circ/\partial y,\qquad \tau_{\xi_2z}{}^\circ=2k_2\partial w^\circ/\partial\xi_2 \qquad (3.5)$$

Так как

$$w^\circ|_{z=0}=-ab\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0}$$

то, учитывая (3.1) и (3.2), получаем следующий случай задачи Неймана: на плоскости $z=0$

$$\partial\varphi/\partial z=-(ab)^{-1}w^\circ=-(ab)^{-1}F_1{}^*(\xi_2,y)\ \text{ в области } S$$

$$\partial\varphi/\partial z=0\ \text{ в области } \Omega \qquad (3.6)$$

Нетрудно убедиться в том, что функция φ — гармоническая. Доказательство проводится аналогично тому, как это было сделано для функции $\theta_1{}^{**}$ в предыдущем случае.

Из теории потенциала известно, что гармоническая функция, удовлетворяющая в рассматриваемой области граничным условиям типа (3.6), может быть представлена в виде потенциала простого слоя. Итак

$$\varphi(\xi_2,y,z)=-\frac{1}{2\pi ab}\iint\limits_S\frac{F_1{}^*(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{[(\xi_2-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{1/2}}$$

Полученное выражение позволяет получить все необходимые величины, в том числе и давление, действующее на внедряющееся тело.

При нахождении истинных компонентов тензора напряжений $\sigma_x,\sigma_y,\ldots$ необходимо совершить преобразования (1.18), обратные введенным.

Поступила 22 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 11, вып. 1.
2. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
3. *Викторов В. В., Добровольский И. П., Шапиро Г. С.* Исследование динамических свойств некоторых полимерных материалов при нагружении и разгрузке. Механика полимеров, 1967, т. 1.
4. *Kolsky H.* An investigation of the mechanical properties of materials at very high rates of loading. Proc. Phys. Soc. Ser. B., 1949, vol. 62, No. 359. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1950, № 4.)
5. *Орленко Л. П.* Поведение материалов при интенсивных динамических нагрузках. М., «Машиностроение», 1964.