МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1979

УДК 539.384

ИЗГИБ ПЛИТЫ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ТОНКОСТЕННЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Д. В. ГРИЛИЦКИЙ, М. С. ДРАГАН, В. К. ОПАНАСОВИЧ

(Львов)

Исследуется напряженное состояние плиты, находящейся под действием равномерно распределенных моментов, с прямолинейным тонкостенным упругим включением конечной длины. Задача сведена к системе двух интегро-дифференциальных уравнений типа Прандтля, решение которой строится методом ортогональных многочленов.

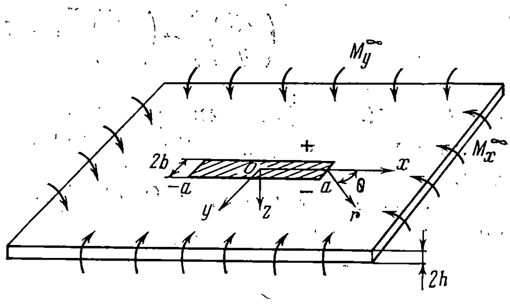
Приведены формулы и графики для коэффициентов интенсивности напряжений. Путем предельного перехода из общего случая получены решения задачи для жесткого включения, разреза и однородной плиты.

1. Рассмотрим упругое равновесие изотропной плиты толщиной $2h$ с тонкостенным упругим включением длины $2a$, ширины $2b$ и толщины $2h$, находящейся под воздействием равномерно распределенных на бесконечности изгибающих моментов M_x^∞, M_y^∞ (фиг. 1). В дальнейшем величинам, характеризующим тонкостенное включение, будем приписывать индекс нуль. Граничное значение функций на верхнем берегу включения будем обозначать знаком плюс, на нижнем — знаком минус. Сегмент действительной оси $[-a, a]$ обозначим через L.

Предположим, что на берегах включения имеют место следующие условия:

$$(M_y)_0^{\pm} = (M_y)^{\pm},\quad \left(N_y + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x}\right)_0^{\pm} = \left(N_y + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x}\right)^{\pm} \tag{1.1}$$

$$W_0^{\pm} = W^{\pm},\quad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0^{\pm} = \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^{\pm}$$



Фиг. 1

При отсутствии внешней нормальной нагрузки упругое состояние плиты можно выразить через две функции комплексного переменного $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ по формулам [1]:

$$\varkappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)} = -\frac{1}{D(1-\nu)} f$$

$$\Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)} = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{1.2}$$

$$f=M_y+i\left(H_{xy}+\int_{-a}^{x}N_y(x)\,dx\right),\qquad g=i\left(\frac{\partial W}{\partial y}+i\frac{\partial W}{\partial x}\right)$$

$$\Omega(z)=\overline{\Phi}(z)+\bar{z}\Phi'(z)+\overline{\Psi}(z),\qquad D=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)},\qquad \varkappa=\frac{3+\nu}{1-\nu}$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Для больших $|z|$ функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ имеют представление

$$\Phi(z)=\Gamma+O\left(\frac{1}{z^2}\right),\qquad \Omega(z)=\Gamma+\Gamma'+O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$
$$\Gamma=-\frac{M_x^\infty+M_y^\infty}{4D(1+\nu)},\qquad \Gamma'=\frac{M_y^\infty-M_x^\infty}{2D(1-\nu)} \tag{1.3}$$

Используя для включения формулы (1.2) и пренебрегая величинами высших порядков малости по сравнению с b, можем записать

$$f_0^+-f_0^-=-2ibD_0(1-\nu_0)M'(x),\quad x\in L \tag{1.4}$$

$$f_0^++f_0^-=-\frac{2D_0(1-\nu_0)}{1+\varkappa_0}[2\varkappa_0K(x)+(\varkappa_0-1)M(x)-$$
$$-2\overline{K(x)}-2\overline{M(x)}],\qquad x\in L$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0^++\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0^-=$$
$$=\frac{2}{(1+\varkappa_0)}[(1-\varkappa_0)K(x)+2M(x)+2\overline{K(x)}+2\overline{M(x)}],\quad x\in L$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0^+-\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0^-=2ibK'(x),\quad x\in L$$

где $M(x)$, $K(x)$ — функции, подлежащие определению.

Для пластинки граничные условия с берегов включения снесем на ось ox.

Используя соотношения (1.1), (1.2) и (1.4), приходим к следующим краевым задачам:

$$[\Phi(x)-\Omega(x)]^+-[\Phi(x)-\Omega(x)]^-=2ibK'(x),\quad x\in L \tag{1.5}$$

$$[\varkappa\Phi(x)+\Omega(x)]^+-[\varkappa\Phi(x)+\Omega(x)]^-=\frac{2\mu_0 ib}{\mu}M'(x),\quad x\in L$$

$$[\Phi(x)+\Omega(x)]^++[\Phi(x)+\Omega(x)]^-=$$
$$=\frac{2}{(1+\varkappa_0)}[(1-\varkappa_0)K(x)+2M(x)+2\overline{K(x)}+2\overline{M(x)}],\quad x\in L \tag{1.6}$$
$$\varkappa[\Phi^+(x)+\Phi^-(x)]-[\Omega^+(x)+\Omega^-(x)]=$$
$$=\frac{2\mu_0}{\mu(1+\varkappa_0)}[2\varkappa_0K(x)+(\varkappa_0-1)M(x)-2\overline{K(x)}-2\overline{M(x)}],\quad x\in L$$

Здесь μ и μ_0 — постоянные Ляме соответственно для материалов плиты и включения.

Решая задачи линейного сопряжения (1.5), получаем

$$
\begin{aligned}
\Phi(z) &= \frac{b}{\pi(1+\varkappa)}\left[\int_{-a}^{a}\frac{K'(t)\,dt}{t-z}+\frac{\mu_0}{\mu}\int_{-a}^{a}\frac{M'(t)\,dt}{t-z}\right]+\Gamma \\
\Omega(z) &= \frac{b}{\pi(1+\varkappa)}\left[-\varkappa\int_{-a}^{a}\frac{K'(t)\,dt}{t-z}+\frac{\mu_0}{\mu}\int_{-a}\frac{M'(t)\,dt}{t-z}\right]+\Gamma+\Gamma'
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Подставляя выражения функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ (1.7) в соотношения (1.6), получаем систему интегро-дифференциальных уравнений типа Прандтля для определения неизвестных функций $K(x)$ и $M(x)$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+\varkappa_0)}[(1-\varkappa_0)K(x)+2M(x)+2\overline{K(x)}+2\overline{M(x)}]-\frac{b(1-\varkappa)}{\pi(1+\varkappa)}\times \\
&\times\int_{-a}^{a}\frac{K'(t)\,dt}{t-x}-\frac{2b\mu_0}{\pi(1+\varkappa)\mu}\int_{-a}\frac{M'(t)\,dt}{t-x}=2\Gamma+\Gamma', \quad x\in L \\
&\frac{\mu_0}{\mu(1+\varkappa_0)}[2\varkappa_0K(x)+(\varkappa_0-1)M(x)-2\overline{K(x)}-2\overline{M(x)}]-\frac{2b\varkappa}{\pi(1+\varkappa)}\times \\
&\times\int_{-a}^{a}\frac{K'(t)\,dt}{t-x}-\frac{\mu_0 b(\varkappa-1)}{\pi\mu(1+\varkappa)}\int_{-a}\frac{M'(t)\,dt}{t-x}=(\varkappa-1)\Gamma-\Gamma', \quad x\in L
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Следуя [2], решения системы уравнений (1.8) будем искать в виде

$$
K'(ax)=(1-x^2)^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}X_mT_m(x),\quad M'(ax)=(1-x^2)^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}Y_mT_m(x)
\tag{1.9}
$$

Откуда находим

$$
K(ax)=K_0+X_0\arcsin x-\sqrt{1-x^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}X_mU_{m-1}(x)
\tag{1.10}
$$

$$
M(ax)=M_0+Y_0\arcsin x-\sqrt{1-x^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}Y_mU_{m-1}(x),\quad |x|\leqslant 1
$$

где $T_m(x)$ и $U_m(x)$ — полиномы Чебышева соответственно первого и второго рода; M_0, K_0, X_m, Y_m — неизвестные коэффициенты.

Подставляя соотношения (1.9) в формулы (1.7), получим

$$
\begin{aligned}
\Phi(z) &= -\frac{b}{a(1+\varkappa)}\sum_{m=1}\left(X_m+\frac{\mu_0}{\mu}Y_m\right)\left[\frac{aT_m(z/a)}{\sqrt{z^2-a^2}}-U_{m-1}\left(\frac{z}{a}\right)\right]+\Gamma \\
\Omega(z) &= \frac{b}{a(1+\varkappa)}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\varkappa X_m-\frac{\mu_0}{\mu}Y_m\right)\left[\frac{aT_m(z/a)}{\sqrt{z^2-a^2}}-U_{m-1}\left(\frac{z}{a}\right)\right]+\Gamma+\Gamma'
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Исходя из разложений (1.3) и учитывая зависимости (1.11), приходим к равенству $X_0=Y_0=0$.

Используя формулы (1.9), (1.10) и следуя [2], на основании соотношений (1.8) получаем бесконечную квазирегулярную систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения X_m, Y_m:

$$\frac{2}{(1+\varkappa_0)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}H(m,n)\left[(1-\varkappa_0)X_m+2Y_m+2\overline{X}_m+2\overline{Y}_m\right]+C_1X_n+C_2Y_n=A_n$$

$$\frac{2\mu_0}{\mu(1+\varkappa_0)}\sum_{m=1}\frac{1}{m}H(m,n)\left[2\varkappa_0X_m+(\varkappa_0-1)Y_m-2\overline{X}_m-2\overline{Y}_m\right]+C_3X_n+C_4Y_n=B_n \qquad (1.12)$$

$$H(m,n)=0, \text{ если } (m+n) \text{ — нечетное}$$

$$H(m,n)=\frac{1}{(m+n-1)(m+n+1)}-\frac{1}{(m-n-1)(m-n+1)}, \text{ если } (m+n) \text{ — четное}$$

$$A_1=-\pi[(2\Gamma+\Gamma')-A_0],\quad B_1=\pi[(\Gamma'-(\varkappa-1)\Gamma)+B_0],\quad A_n=B_n=0 \quad (n\geqslant 2)$$

$$A_0=\frac{1}{(1+\varkappa_0)}\left[(1-\varkappa_0)K_0+2M_0+2\overline{K}_0+2\overline{M}_0\right]$$

$$B_0=\frac{\mu_0}{\mu(1+\varkappa_0)}\left[2\varkappa_0K_0+(\varkappa_0-1)M_0-2\overline{K}_0-2\overline{M}_0\right]$$

$$C_1=\frac{\pi b(1+\varkappa)}{a(1+\varkappa)},\quad C_2=\frac{2\pi b\mu_0}{a\mu(1+\varkappa)}$$

$$C_3=\frac{2\pi b\varkappa}{a(1+\varkappa)},\quad C_4=\frac{\pi b\mu_0(\varkappa-1)}{a\mu(1+\varkappa)}$$

Постоянные A_0 и B_0 примем в виде

$$A_0=(2\Gamma+\Gamma')\frac{\min(\mu_0,\mu)}{\mu_0},\quad B_0=[(\varkappa-1)\Gamma-\Gamma']\frac{\min(\mu_0,\mu)}{\mu}$$

Следуя [3], напряженное состояние в окрестности конца включения a в полярной системе координат r, θ (фиг. 1) можно представить в следующем виде:

$$\left\|\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \tau_{r\theta}\end{matrix}\right\|=-\frac{1}{4\varkappa\sqrt{2\pi r}}\frac{z}{h}\left\{\left\|\begin{matrix}-\cos\frac{3}{2}\theta-\left(\frac{3+5\nu}{1-\nu}\right)\cos\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{3}{2}\theta-\left(\frac{5+3\nu}{1-\nu}\right)\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{3}{2}\theta+\sin\frac{\theta}{2}\end{matrix}\right\|K_1+\right.$$

$$+\left\|\begin{matrix}3\sin\frac{3}{2}\theta+\left(\frac{3+5\nu}{1-\nu}\right)\sin\frac{\theta}{2}\\ -3\sin\frac{3}{2}\theta+\left(\frac{5+3\nu}{1-\nu}\right)\sin\frac{\theta}{2}\\ 3\cos\frac{3}{2}\theta+\cos\frac{\theta}{2}\end{matrix}\right\|K_2+\left\|\begin{matrix}(1+2\varkappa)\cos\frac{3}{2}\theta-\left(\frac{3+5\nu}{1-\nu}\right)\cos\frac{\theta}{2}\\ -(1+2\varkappa)\cos\frac{3}{2}\theta-\left(\frac{5+3\nu}{1-\nu}\right)\cos\frac{\theta}{2}\\ -(1+2\varkappa)\sin\frac{3}{2}\theta+\sin\frac{\theta}{2}\end{matrix}\right\|K_3+$$

$$+\left\|\begin{array}{c}(1-2\varkappa)\sin\frac{3}{2}\theta+\left(\frac{3+5\nu}{1-\nu}\right)\sin\frac{\theta}{2}\\ -(1-2\varkappa)\sin\frac{3}{2}\theta+\left(\frac{5+3\nu}{1-\nu}\right)\sin\frac{\theta}{2}\\ (1-2\varkappa)\cos\frac{3}{2}\theta+\cos\frac{\theta}{2}\end{array}\right\|K_4\Bigg\}+O(1)$$

$$K_1-iK_2=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\frac{\varkappa bEh\mu_0}{\mu(\varkappa-1)}\sum_{m=1}^{\infty}Y_m,\quad K_3-iK_4=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\frac{b\varkappa Eh}{(\varkappa-1)}\sum_{m=1}^{\infty}X_m$$

где K_j $(j=1,2,3,4)$ — коэффициенты интенсивности напряжений.

2. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Плита с трещиной. Переходя в формулах (1.8) к пределу при $\mu_0\to0$, получаем

$$\frac{1}{(1+\varkappa_0)}[(1-\varkappa_0)K(x)+2M(x)+2\overline{K(x)}+2\overline{M(x)}]-$$

$$-\frac{b(1-\varkappa)}{\pi(1+\varkappa)}\int_{-a}^{a}\frac{K'(t)\,dt}{t-x}=2\Gamma+\Gamma',\quad x\in L \tag{2.1}$$

$$\int_{-a}^{a}\frac{K'(t)\,dt}{t-x}=-\frac{\pi(1+\varkappa)}{2b\varkappa}[(\varkappa-1)\Gamma-\Gamma'],\quad x\in L \tag{2.2}$$

Решая сингулярное интегральное уравнение (2.2) и подставляя это решение в формулы (1.7), находим

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\varkappa}\left[\frac{((\varkappa-1)\Gamma-\Gamma')z}{\sqrt{z^2-a^2}}+(\varkappa+1)\Gamma+\Gamma'\right] \tag{2.3}$$

$$\Omega(z)=-\frac{1}{2}\left[\frac{((\varkappa-1)\Gamma-\Gamma')z}{\sqrt{z^2-a^2}}-(\varkappa+1)\Gamma-\Gamma'\right]$$

Выражения для функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ (2.3) совпадают с формулами, приведенными в [1].

2. Случай однородной плиты, т. е. плиты без включения, можно получить двумя путями: либо из формул (1.11), положив в них $b=0$, либо с помощью предельного перехода в системе уравнений (1.12), когда $\mu_0=\mu$. В последнем случае система алгебраических уравнений (1.12) приводит к решению $X_i=Y_i=0$ $(i=1,2,\ldots)$, т. е. $K'(t)=M'(t)=0$, и поэтому, как видно из (1.7), $\Phi(z)=\Gamma$, $\Omega(z)=\Gamma+\Gamma'$.

3. Плита с абсолютно жестким тонким включением. Сделаем в системе уравнений (1.8) замену $M(x)=R(x)/\mu_0$ и перейдем к пределу при $\mu_0\to\infty$; в результате получим

$$\int_{-a}^{a}\frac{R'(t)\,dt}{t-x}=-\frac{\pi(1+\varkappa)\mu}{2b}(2\Gamma+\Gamma'),\quad x\in L,\quad K(x)=0 \tag{2.4}$$

Решая сингулярное интегральное уравнение (2.4) и подставляя его решение в формулы (1.7), после несложных преобразований находим

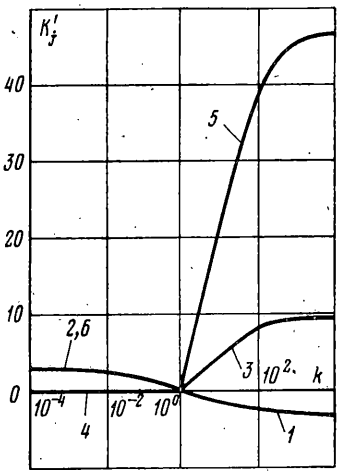
$$\Phi(z)=\frac{(2\Gamma+\Gamma')z}{2\sqrt{z^2-a^2}}-\frac{1}{2}\Gamma',\quad \Omega(z)=\Phi(z)+\Gamma' \tag{2.5}$$

Выражения для функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ (2.5), дают решение задачи для плиты, защемленной по отрезку прямой [1].

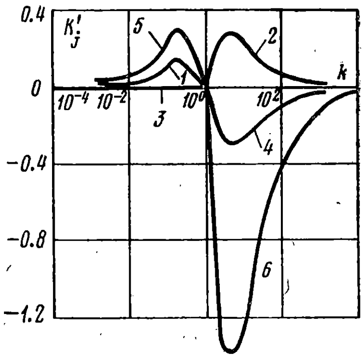
3. На ЭВМ М-222 был проведен численный анализ решения задачи, результаты которого представлены на фиг. 2, 3.

Вычисления проводились при следующих значениях параметров: $a/b=10$, $\nu=\nu_0=1/3$.

На фиг. 2, 3 представлена зависимость коэффициентов интенсивности напряжений $K_j'=h^2K_j/(M\sqrt{a})$ от относительной жесткости $k=\mu_0/\mu$. Кри-



Фиг. 2



Фиг. 3

вые *1*, *2* построены при $M_x^\infty=0$ $(M=M_y^\infty)$, кривые *3*, *4* — при $M_y^\infty=0$ $(M=M_x^\infty)$, а кривые *5*, *6* — при $M_x^\infty/M_y^\infty=5$ $(M=M_y^\infty)$. Четным номерам кривых соответствует значение K_3', нечетным — K_1'. Кривые на фиг. 3 представляют продолжение кривых фиг. 2, но только в другом масштабе. В данном случае нагружения $K_2'=K_4'=0$.

Поступила 12 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прусов И. А.* Метод сопряжения в теории плит. Минск, Изд-во Белорусск. ун-та, 1975.
2. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
3. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.