МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1979

УДК 539.3.01

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНОК С КРИВОЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

А. В. ПАВЛЕНКО

(Днепропетровск)

Интенсивное развитие плоской теории упругости для изотропного тела в последние десятилетия связано, в первую очередь, с успешным применением в этой области методов теории аналитических функций [1].

Анизотропия упругой среды обычно приводит к существенным дополнительным трудностям при решении краевых задач. В случае прямолинейной анизотропии приходится рассматривать пару связанных аналитических функций, зависящих от различных комплексных переменных [2]. Для среды с криволинейной анизотропией непосредственное применение методов теории аналитических функций вообще оказывается невозможным.

Эти трудности удается преодолеть в некоторых специальных случаях (малая анизотропия, специальный закон изменения упругих свойств и т. п.), причем соответствующая задача для изотропной среды считается обычно эталоном простоты.

Однако для широкого класса конструкций характеристики анизотропии упругой среды могут быть использованы в качестве параметров асимптотического интегрирования. Асимптотический анализ уравнений равновесия (движения) и граничных условий позволяет расчленить напряженно-деформированное состояние на элементарные составляющие, определение которых является, как правило, более простой задачей, чем расчет изотропной среды.

Этот метод (применительно к среде с прямолинейной анизотропией) разработан и использован для решения ряда конкретных плоских смешанных задач теории упругости в [3–7].

В данной работе идеи указанного асимптотического метода обобщаются на случай произвольной криволинейной анизотропии. Далее рассматривается вопрос о распределении напряжений около отверстий в пластинках с криволинейной анизотропией.

1. Пусть криволинейно-анизотропная пластинка, имеющая в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости $x0y$, занимает конечную или бесконечную область. Пластинка, работающая в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, является в то же время и ортотропной, причем главные направления упругости совпадают с криволинейными изометрическими координатами (ξ, η), которые связаны с декартовыми координатами (x, y) посредством некоторой функции комплексного переменного

$$x=\operatorname{Re}[\omega(\zeta)]=x(\xi,\eta),\ y=\operatorname{Im}[\omega(\zeta)]=y(\xi,\eta)$$
$$z=\omega(\zeta)\quad (z=x+iy,\ \zeta=e^{\xi+i\eta},\ i=\sqrt{-1}) \tag{1.1}$$

Изометрическая система криволинейных координат на плоскости обладает тем свойством, что оба ее параметра Ляме в каждой точке (ξ, η) равны [8]:

$$H_1=H_2=H(\xi,\eta)=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2\right]^{1/2}=\left[\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2\right]^{1/2} \tag{1.2}$$

Вопрос о напряженно-деформированном состоянии упругой анизотропной пластинки сводится к интегрированию уравнений равновесия [9]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau}{\partial\eta}+\Gamma_{11}^{1}(\sigma_{11}-\sigma_{22})+2\Gamma_{22}^{2}\tau=0 \\ &\frac{\partial\tau}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\eta}+\Gamma_{22}^{2}(\sigma_{22}-\sigma_{11})+2\Gamma_{11}^{1}\tau=0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

при соответствующих граничных условиях. Предполагается, что граница области, занимаемой пластинкой, совпадает с линией $\xi=\mathrm{const}$. К уравнениям равновесия (1.3) следует добавить уравнение совместности деформаций [9].

Физические проекции тензора напряжений σ_{11}, σ_{22}, τ через физические компоненты тензора деформаций e_{11}, e_{22}, e_{12} определяются соотношениями

$$\sigma_{11}=E_*(e_{11}+\nu_1 qe_{22}),\quad \sigma_{22}=E_*q(e_{22}+\nu_1 e_{11}),\quad \tau=Ge_{12} \tag{1.4}$$

а физические компоненты тензора деформаций выражаются через физические проекции u_1, u_2 вектора перемещений по формулам

$$\begin{aligned} &e_{11}=\frac{1}{H}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi}+\Gamma_{22}^{2}u_2\right),\qquad E_*=\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} \\ &e_{22}=\frac{1}{H}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\eta}+\Gamma_{11}^{1}u_1\right),\qquad q=\frac{E_2}{E_1},\qquad \nu_2E_1=\nu_1E_2 \\ &e_{12}=\frac{1}{H}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\xi}+\frac{\partial u_1}{\partial\eta}-\Gamma_{11}^{1}u_2-\Gamma_{22}^{2}u_1\right) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь E_1, E_2 — модули упругости вдоль главных направлений ξ, η; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона; G — модуль сдвига; σ_{11} — нормальная компонента напряжений на кривой $\xi=\mathrm{const}$; σ_{22} — нормальная компонента напряжений на кривой $\eta=\mathrm{const}$; τ — касательная компонента на обеих кривых. Символы Кристоффеля Γ_{11}^{1}; Γ_{22}^{2} связаны с параметрами Ляме (1.2) следующим образом [9]:

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial\xi},\qquad \Gamma_{22}^{2}=\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial\eta}$$

При решении той или иной краевой задачи возможны случаи, когда компоненты тензора напряжений во всей области, занимаемой пластинкой, удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(H^2\sigma_{11})=0,\qquad \frac{\partial}{\partial\eta}(H^2\sigma_{22})=0,\qquad \tau=0 \tag{1.6}$$

т. е. касательные напряжения и ковариантная производная [9] компонентов σ_{11}, σ_{22} по координате η обращаются в нуль.

Для данного напряженно-деформированного состояния уравнения равновесия (1.3) и совместности деформаций [9] принимают вид

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi}+\Gamma_{11}^{1}(\sigma_{11}-\sigma_{22})=0,\qquad \Gamma_{22}^{2}(\sigma_{22}+\sigma_{11})=0 \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial^2(H^2e_{22})}{\partial\xi^2}-3\Gamma_{11}^{1}\frac{\partial(H^2e_{22})}{\partial\xi}-\Gamma_{11}^{1}\frac{\partial(H^2e_{11})}{\partial\xi}+2H^2[(\Gamma_{11}^{1})^2+(\Gamma_{22}^{2})^2](e_{11}+e_{22})=0 \tag{1.8}$$

Если $\Gamma_{22}^2 \neq 0$, то из второго уравнения (1.7) имеем $\sigma_{22}=-\sigma_{11}$, а из первого уравнения (с учетом (1.6)) находим $\sigma_{11}=C/H^2$, $C=\text{const}$. При этом уравнение совместности (1.8) обращается в тождество лишь в случае $q=1$.

Следовательно, напряженно-деформированное состояние, удовлетворяющее условиям (1.6), в общих криволинейных координатах ($\Gamma_{22}^2 \neq 0$) возможно лишь при условии равенства модулей упругости вдоль главных направлений ξ, η. В этом случае решения имеют вид

$$\sigma_{11}=-\sigma_{22}=C/H^2, \quad \tau=0 \tag{1.9}$$

Указанное состояние, очевидно, может реализоваться в чистом виде или входить как составная часть в общее напряженно-деформированное состояние. Постоянная C в (1.9) определяется из соответствующих граничных условий.

Если $\Gamma_{22}^2=0$ (параметры Ляме не зависят от координаты η), то второе уравнение (1.7) обращается в тождество. Напряжение σ_{22} выражается через σ_{11} из первого уравнения (1.7), а для определения напряжения σ_{11} необходимо использовать уравнение совместности (1.8). В этом случае при всех значениях q возможно напряженно-деформированное состояние, удовлетворяющее условиям (1.6), но требования равенства нулю ковариантных производных переходят в требования равенства нулю частных производных, а решение имеет вид

$$\sigma_{11}=A+C/H^2, \quad \sigma_{22}=A-C/H^2, \quad \tau=0 \tag{1.10}$$

где A и C — произвольные постоянные.

Это имеет место, например, в полярных координатах, т. е. для пластинки с цилиндрической анизотропией, когда граничные условия и решения не зависят от координаты $\eta=\theta$, т. е. симметричны относительно оси анизотропии [2]. Такие задачи называются «осесимметричными».

Напряженно-деформированное состояние, удовлетворяющее условиям (1.6), будем называть «квазиосесимметричным».

Если граничные условия не удовлетворяют условиям (1.6), то решение основных краевых задач теории упругости как для пластинки с цилиндрической анизотропией, так и для пластинки с общей криволинейной анизотропией сопряжено со значительными трудностями. Эти трудности обусловлены, в первую очередь, невозможностью непосредственного применения эффективных методов, основанных на использовании аппарата теории аналитических функций. Для решения таких краевых задач применим асимптотический метод, разработанный в [3–7] для среды с прямолинейной анизотропией.

2. Будем исходить из уравнений равновесия в перемещениях. Подставляя (1.4) в (1.3) с учетом (1.5), получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2}+\frac{G}{E_*}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2}+m\frac{G}{E_*}\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi\,\partial \eta}-qf_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial \eta}+f_1u_1\right)+ \\
+\frac{\partial}{\partial \xi}(f_2u_2)-\frac{G}{E_*}\left[f_1\frac{\partial u_2}{\partial \eta}-f_2\frac{\partial u_2}{\partial \xi}+(f_1f_2+f_4)u_2+(f_2^2-f_3)u_1\right]+ \\
+\nu_1 q(f_3u_1-f_1f_2u_2)=0
\end{gathered} \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered}
\frac{G}{E_*}\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2}+q\frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2}+m\frac{G}{E_*}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi\,\partial \eta}+q\frac{\partial}{\partial \eta}(f_1u_1)- \\
-f_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi}+f_2u_2\right)-\frac{G}{E_*}\left[f_2\frac{\partial u_1}{\partial \xi}-f_1\frac{\partial u_1}{\partial \eta}+(f_1f_2+f_4)u_1+\right.
\end{gathered}$$

$$+(f_1^2+f_3)u_2\Big]-\nu_1 q(f_3u_2+f_1f_2u_1)=0$$

$$m=1+\mu,\ \mu=\nu_1 qE_*/G=\nu_2E_*/G,\ f_1(\xi,\eta)=\Gamma_{11}^1$$
$$f_2(\xi,\eta)=\Gamma_{22}^2,\quad f_3(\xi,\eta)=\partial f_1/\partial\xi=-\partial f_2/\partial\eta$$
$$f_4(\xi,\eta)=\partial f_1/\partial\eta=\partial f_2/\partial\xi$$

Для конструкций, широко применяемых на практике, характерны следующих три случая:

$$E_1=E_2>G\quad (q=E_2/E_1=1)$$
$$E_1>E_2\sim G\quad (q=\lambda_1 G/E_*,\quad \lambda_1\sim 1)$$
$$E_2>E_1\sim G\quad (q^{-1}=\lambda_2 G/E^*,\quad \lambda_2\sim 1,\quad E^*=E_2/(1-\nu_1\nu_2))$$

Остановимся подробно на анализе первого. Здесь величину $\varepsilon=G/E_*$ можно рассматривать как «малый» параметр при асимптотическом интегрировании системы (2.1).

Введем следующие преобразования координат и искомых функций:

$$\xi_1=n_*\alpha\xi,\quad \eta_1=n_*\varepsilon^{-1/2}\eta,\quad u_1=U^{(1)},\quad u_2=\varepsilon^{1/2}V^{(1)} \tag{2.2}$$
$$\xi_2=n_*\beta\varepsilon^{-1}\xi,\quad \eta_2=n_*\varepsilon^{-1/2}\eta,\quad u_1=\varepsilon^{3/2}U^{(2)},\quad u_2=\varepsilon^{1/2}V^{(2)} \tag{2.3}$$

Здесь параметр n_* выбирается таким образом, чтобы выражение $n_*\varepsilon^{-1/2}$ равнялось целому положительному числу (в рассмотренных ниже примерах $n_*\varepsilon^{-1/2}=2$, так как $\eta_1=\eta_2=2\eta$).

Из (2.2), (2.3) видно, что решения системы, полученной из (2.1) после введения преобразований (2.2), относительно медленнее изменяются вдоль координаты ξ по сравнению с аналогичными решениями системы, полученной из (2.1) после применения преобразований (2.3).

Компоненты вектора перемещений будем представлять в виде суперпозиции решений обоих типов.

Разыскивая функции $U^{(k)}$, $V^{(k)}$ $(k=1, 2)$ в виде рядов по дробным степеням параметра ε, необходимо выбрать соответствующие асимптотические последовательности. Вид асимптотической последовательности определяется структурой уравнений равновесия и порядком по ε невязки в краевых условиях, возникающей после решения задачи в нулевом приближении $(\varepsilon\to 0)$.

Чтобы учесть все возможные случаи, функции $U^{(k)}$, $V^{(k)}$ $(k=1, 2)$ будем определять в виде рядов по параметру $\varepsilon^{1/2}$ (из преобразований (2.2), (2.3) видно, что рядов по меньшим степеням параметра ε возникнуть не может)

$$U^{(k)}=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}U^{k,j},\qquad V^{(k)}=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}V^{k,j}\quad (k=1,2) \tag{2.4}$$

Коэффициенты α, β также представим в виде рядов по параметру $\varepsilon^{1/2}$:

$$\alpha=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}\alpha_j,\qquad \beta=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}\beta_j \tag{2.5}$$

причем $\alpha_0=\beta_0=1$, а коэффициенты α_j, β_j, вычисляемые соответствующим образом в процессе решения, используются в дальнейшем для упрощения уравнений высших приближений.

Кроме того, предполагаем, что функция $z=\omega(\zeta)$ содержит параметр ε, т. е. параметры Ляме H и функции f_1, f_2, f_3, f_4 могут быть представлены следующими рядами:

$$H=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}h_j,\qquad f_k=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}f_{k,j}\quad(k=1,2,3,4)\tag{2.6}$$

в противном случае все коэффициенты при $\varepsilon^{j/2}$ $(j\geqslant1)$ обращаются в нуль.

Подставим (2.2) в (2.1) и используем соответствующие разложения из (2.4) – (2.6). После расщепления полученной системы по параметру $\varepsilon^{1/2}$ придем к бесконечной системе уравнений относительно функций $U^{1,j}$, $V^{1,j}$ $(j=0, 1,\ldots)$, которые определяют решения, сравнительно медленно изменяющиеся вдоль координаты ξ (такое напряженно-деформированное состояние будем называть состоянием первого типа):

$$\begin{aligned}
U^{1,j}_{\xi\xi}+U^{1,j}_{\eta\eta}&=n_*^{-2}\sum_{\nu=0}^{j}(n_*V_\eta^{1,\nu}f_{1,j-\nu}+U^{1,\nu}\varphi_{1,j-\nu})-\\
&-\sum_{\nu=0}^{j-1}[U^{1,\nu}_{\xi\xi}c_{j-\nu}+n_*^{-2}(n_*V_\xi^{1,\nu}A_{j-\nu-1}+V^{1,\nu}f_{4,j-\nu-1})]-\\
&-\sum_{\nu=0}^{j-2}[mV^{1,\nu}_{\xi\eta}\alpha_{j-\nu-2}-n_*^{-1}V_\eta^{1,\nu}f_{1,j-\nu-2}-n_*^{-2}(\varphi_{2,j-\nu-2}-mf_{3,j-\nu-2})U^{1,\nu}]-\\
&-\sum_{\nu=0}^{j-3}[n_*^{-1}V_\xi^{1,\nu}A_{j-\nu-3}-n_*^{-2}(m\varphi_{12,j-\nu-3}+f_{4,j-\nu-3})V^{1,\nu}]
\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
n_*(n_*V_\eta^{1,j}+U^{1,j}f_{1,0})_\eta&=n_*\sum_{\nu=0}^{j-1}[U_\xi^{1,\nu}A_{j-\nu-1}-(U^{1,\nu}f_{1,j-\nu})_\eta]-\\
&-\sum_{\nu=0}^{j-2}(mn_*^2U^{1,\nu}_{\xi\eta}\alpha_{j-\nu-2}+n_*U_\eta^{1,\nu}f_{1,j-\nu-2}-V^{1,\nu}\varphi_{2,j-\nu-2})+\\
&+\sum_{\nu=0}^{j-3}[n_*U_\xi^{1,\nu}A_{j-\nu-3}-(m\varphi_{12,j-\nu-3}+f_{4,j-\nu-3})U^{1,\nu}]-\\
&-\sum_{\nu=0}^{j-4}[n_*^2V^{1,\nu}_{\xi\xi}c_{j-\nu-4}-(\varphi_{1,j-\nu-4}+mf_{3,j-\nu-4})V^{1,\nu}]
\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$c_p=\sum_{s=0}^{p}\alpha_s\alpha_{p-s},\qquad \varphi_{k,p}=\sum_{s=0}^{p}f_{k,p-s}f_{k,s}\quad(k=1,2),\qquad \varphi_{12,p}=\sum_{s=0}^{p}f_{1,s}f_{2,p-s},$$

$$A_p=\sum_{s=0}^{p}\alpha_sf_{2,p-s}$$

Аналогично, после подстановки (2.3) в (2.1) с использованием соответствующих разложений из (2.4) – (2.6) и расщепления по параметру $\varepsilon^{1/2}$ получим бесконечную систему уравнений относительно функций $U^{2,j}$,

$V^{2,j}$ ($j=0, 1, \ldots$), которые определяют решения второго типа

$$n_* (n_* U_\xi^{2,j} + V^{2,j} f_{2,0})_\xi = -\sum_{\nu=0}^{j-1} [n_*^2 U_{\xi\xi}^{2,\nu} d_{j-\nu} + n_* (V^{2,\nu} B_{j-\nu})_\xi +$$

$$+ m n_*^2 V_{\xi\eta}^{2,\nu} \beta_{j-\nu-1} - n_* V_\eta^{2,\nu} f_{1,j-\nu-1}] - n_* \sum_{\nu=0}^{j-2} V_\xi^{2,\nu} B_{j-\nu-2} +$$

$$+ n_* \sum_{\nu=0}^{j-3} V_\eta^{2,\nu} f_{1,j-\nu-3} - n_*^2 U_{\eta\eta}^{2,j-4} + \sum_{\nu=0}^{j-4} [U^{2,\nu} \varphi_{1,j-\nu-4} +$$

$$+ (m\varphi_{12,j-\nu-4} + f_{4,j-\nu-4}) V^{2,\nu}] + \sum_{\nu=0}^{j-6} (\varphi_{2,j-\nu-6} - m f_{3,j-\nu-6}) U^{2,\nu} \qquad (2.9)$$

$$V_{\xi\xi}^{2,j} + V_{\eta\eta}^{2,j} = -\sum_{\nu=0}^{j-1} V_{\xi\xi}^{2,\nu} d_{j-\nu} + n_*^{-2} \sum_{\nu=0}^{j-2} (n_* U_\xi^{2,\nu} B_{j-\nu-2} + V^{2,\nu} \varphi_{2,j-\nu-2}) -$$

$$- \sum_{\nu=0}^{j-3} (m U_{\xi\eta}^{2,\nu} \beta_{j-\nu-3} + n_*^{-1} U_\eta^{2,\nu} f_{1,j-\nu-3}) - \sum_{\nu=0}^{j-4} [n_*^{-2} U^{2,\nu} f_{4,j-\nu-4} -$$

$$- n_*^{-1} U_\xi^{2,\nu} B_{j-\nu-4} - n_*^{-2} (\varphi_{1,j-\nu-4} + m f_{3,j-\nu-4}) V^{2,\nu}] -$$

$$- n_*^{-1} \sum_{\nu=0}^{j-5} U_\eta^{2,\nu} f_{1,j-\nu-5} + n_*^{-2} \sum_{\nu=0}^{j-6} (m\varphi_{12,j-\nu-6} + f_{4,j-\nu-6}) U^{2,\nu} \qquad (2.10)$$

$$d_p = \sum_{s=0}^{p} \beta_s \beta_{p-s}, \quad B_p = \sum_{s=0}^{p} \beta_s f_{2,p-s}$$

Здесь и в дальнейшем принято, что дифференцирование (индексы ξ, η) производится по тем координатам ξ_k, η_k ($k=1, 2$), индексы которых совпадают с первыми верхними индексами функций. Кроме того, следует иметь в виду, что если верхний предел суммирования меньше нижнего или у какой-либо из функций $U^{k,n}$, $V^{k,n}$ ($k=1, 2$) второй верхний индекс отрицателен, то такие суммы и функции необходимо полагать равными нулю.

Так, при $j=0$ из (2.7) – (2.10) получим
напряженное состояние первого типа

$$U_{\xi\xi}^{1,0} + U_{\eta\eta}^{1,0} = 0, \quad n_* V_\eta^{1,0} + U^{1,0} f_{1,0} = 0 \qquad (2.11)$$

напряженное состояние второго типа

$$n_* U_\xi^{2,0} + V^{2,0} f_{2,0} = 0, \quad V_{\xi\xi}^{2,0} + V_{\eta\eta}^{2,0} = 0 \qquad (2.12)$$

Здесь ограничиваемся лишь частными интегралами при интегрировании уравнений (2.8) по η_1 и уравнений (2.9) по ξ_2.

Коэффициенты α_j, β_j ($j=1, 2, \ldots$) в процессе решения будем выбирать таким образом, чтобы уравнения для определения функций $U^{1,j}$, $V^{2,j}$ ($j=1, 2, \ldots$) соответствовали уравнениям (2.11), (2.12). В этом случае все функции $U^{1,j}$, $V^{2,j}$ определяются из уравнений Лапласа, т. е. будут гармоническими функциями. Так как $V^{1,j}$, $U^{2,j}$ выражаются из (2.8), (2.9) простым интегрированием через $U^{1,j}$, $V^{2,j}$, то эти функции также будут гармоническими как частные интегралы от гармонических функций.

Используем преобразования (2.2), (2.3) и разложения (2.4) – (2.6) в выражениях для перемещений и напряжений (при этом учитываем, что компоненты вектора перемещений разыскиваются в виде суперпозиции решений обоих типов) и представим последние рядами

$$u_k=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}u_{k,j},\quad \sigma_{kk}=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}\sigma_{k,j},\quad \tau=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}\tau_j\quad (k=1,2)$$

После расщепления по параметру $\varepsilon^{1/2}$ получим

$$u_{1,j}=U^{1,j}+U^{2,j-3},\quad \varepsilon^{-1/2}u_{2,j}=V^{1,j}+V^{2,j}$$

$$\frac{1}{E_*}\sum_{\nu=0}^{j}\sigma_{1,\nu}h_{j-\nu}=n_*\sum_{\nu=0}^{j}U_\xi^{1,\nu}\alpha_{j-\nu}+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{j-1}[n_*U_\xi^{2,\nu}\beta_{j-\nu-1}+(V^{1,\nu}+V^{2,\nu})f_{2,j-\nu-1}]+$$
$$+\mu\left(n_*V_\eta^{1,j-2}+\sum_{\nu=0}^{j-2}U^{1,\nu}f_{1,j-\nu-2}+n_*V_\eta^{2,j-2}\right)+\mu\sum_{\nu=0}^{j-5}U^{2,\nu}f_{1,j-\nu-5}\tag{2.13}$$

$$\frac{1}{E_*}\sum_{\nu=0}^{j}\sigma_{2,\nu}h_{j-\nu}=n_*V_\eta^{2,j}+\left(n_*V_\eta^{1,j}+\sum_{\nu=0}^{j}U^{1,\nu}f_{1,j-\nu}\right)+$$
$$+\mu n_*\sum_{\nu=0}^{j-2}U_\xi^{1,\nu}\alpha_{j-\nu-2}+\sum_{\nu=0}^{j-3}[U^{2,\nu}f_{1,j-\nu-3}+$$
$$+\mu n_*U_\xi^{2,\nu}\beta_{j-\nu-3}+\mu(V^{1,\nu}+V^{2,\nu})f_{2,j-\nu-3}]$$

$$\frac{\varepsilon^{-1/2}}{E_*}\sum_{\nu=0}^{j}\tau_\nu h_{j-\nu}=n_*\left(\sum_{\nu=0}^{j}V_\xi^{2,\nu}\beta_{j-\nu}+U_\eta^{1,j}\right)-\sum_{\nu=0}^{j-1}U^{1,\nu}f_{2,j-\nu-1}+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{j-2}\left[n_*V_\xi^{1,\nu}\alpha_{j-\nu-2}-(V^{1,\nu}+V^{2,\nu})f_{1,j-\nu-2}\right]+$$
$$+n_*U_\eta^{2,j-3}-\sum_{\nu=0}^{j-4}U^{2,\nu}f_{2,j-\nu-4}$$

Соотношения (2.13) позволяют сформулировать граничные условия для функций $U^{1,j}$, $V^{2,j}$, соответствующие той или иной краевой задаче.

Из (2.7) — (2.13) видно, что напряженно-деформированные состояния первого и второго типов связаны только через граничные условия.

3. Перейдем к анализу граничных условий. В случае первой основной задачи теории упругости на контуре пластинки $\Gamma(\xi=\mathrm{const})$ известны нормальные σ_{11} и касательные τ напряжения

$$\sigma_{11}=\psi_1(\eta),\quad \tau=\psi_2(\eta)\ \text{ на } \Gamma \tag{3.1}$$

Предполагаем, что $\psi_1(\eta)$, $\psi_2(\eta)$ могут быть представлены рядами

$$\psi_1(\eta)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}\psi_{1,j},\quad \psi_2(\eta)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}\psi_{2,j} \tag{3.2}$$

(в противном случае все коэффициенты при $\varepsilon^{j/2}$ ($j\geqslant 1$) обращаются в нуль). Тогда на Γ напряжения $\sigma_{1,j}=\psi_{1,j}$, $\tau_j=\psi_{2,j}$.

Используя результаты п. 2, приходим к интегрированию уравнений напряженного состояния первого типа (2.7), (2.8) при следующих граничных условиях для функций $U^{1,j}$:

$$U_\xi^{1,j}=\frac{1}{n_*E_*}\sum_{\nu=0}^{j}\psi_{1,\nu}h_{j-\nu}-\sum_{\nu=0}^{j-1}[U_\xi^{1,\nu}\alpha_{j-\nu}+U_\xi^{2,\nu}\beta_{j-\nu-1}+$$

$$+n_*^{-1}(V^{1,\nu}+V^{2,\nu})f_{2,j-\nu-1}]-\mu\left(V_\eta^{1,j-2}+n_*^{-1}\sum_{\nu=0}^{j-2}U^{1,\nu}f_{1,j-\nu-2}+\right.$$

$$\left.+V_\eta^{2,j-2}\right)-\mu n_*^{-1}\sum_{\nu=0}^{j-5}U^{2,\nu}f_{1,j-\nu-5}\quad (j=0,1,2,\ldots) \tag{3.3}$$

и уравнений напряженного состояния второго типа (2.9), (2.10) с краевыми условиями для функций $V^{2,j}$:

$$V_\xi^{2,j}=\frac{\varepsilon^{-1/2}}{n_*E_*}\sum_{\nu=0}^{j}\psi_{2,\nu}h_{j-\nu}-U_\eta^{1,j}-\sum_{\nu=0}^{j-1}(V_\xi^{2,\nu}\beta_{j-\nu}-n_*^{-1}U^{1,\nu}f_{2,j-\nu-1})-$$

$$-\sum_{\nu=0}^{j-2}[V_\xi^{1,\nu}\alpha_{j-\nu-2}-n_*^{-1}(V^{1,\nu}+V^{2,\nu})f_{1,j-\nu-2}]- \tag{3.4}$$

$$-U_\eta^{2,j-3}+n_*^{-1}\sum_{\nu=0}^{j-4}U^{2,\nu}f_{2,j-\nu-4}\quad (j=0,1,2,\ldots)$$

Для второй основной краевой задачи на контуре заданы смещения

$$u_1=u^\circ(\eta)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}u_j^\circ,\quad u_2=v(\eta)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}v_j \tag{3.5}$$

Тогда на контуре Γ смещения $u_{1,j}=u_j^\circ$, $u_{2,j}=v_j$ и из (2.13) граничные условия для функций $U^{1,j}$, $V^{2,j}$ запишутся соответственно

$$U^{1,j}=u_j^\circ-U^{2,j-3},\quad V^{2,j}=\varepsilon^{-1/2}v_j-V^{1,j}\quad (j=0,1,2,\ldots)\ \text{ на } \Gamma \tag{3.6}$$

Используя (3.3), (3.4), (3.6), получим краевые условия для функций $U^{1,j}$, $V^{2,j}$ в случае основной смешанной задачи.

Анализ граничных условий показывает, что для основных краевых задач граничные условия в нулевом приближении ($j=0$) напряженного состояния первого типа не зависят ни от более высоких приближений, ни от решений уравнений напряженного состояния второго типа. Поэтому первое уравнение (2.11) решается независимо от остальных, а решение второго уравнения (2.11) находится простым интегрированием. После этого полностью определяются граничные условия для второго уравнения (2.12). Решив это уравнение и проинтегрировав первое уравнение (2.12), определим граничные условия для уравнения (2.7) напряженного состояния первого типа в первом приближении ($j=1$) и т. д.

Следовательно, решение основных краевых задач сводится к последовательному интегрированию уравнений (2.7), (2.8) напряженного состояния первого типа и уравнений (2.9), (2.10) напряженного состояния второго типа.

Так как коэффициенты α_j, β_j выбираются таким образом, чтобы в каждом приближении уравнения для определения функций $U^{1,j}$, $V^{2,j}$ соответствовали уравнениям нулевого приближения, то на каждом этапе процесса та или иная краевая задача теории упругости сводится к последовательному интегрированию двух краевых задач теории потенциала. Это позволяет применять мощные методы теории аналитических функций, что в сочетании с методом конформных отображений открывает новые перспективы при исследовании многих практических важных задач, возникающих в современной технике, которые до сих пор не нашли эффективного решения.

Аналогично могут быть решены основные краевые задачи теории упругости для ортотропных пластинок, у которых $E_1 \neq E_2$.

4. Остановимся на решении некоторых конкретных задач. Пусть криволинейно-анизотропная пластинка занимает бесконечную область с отверстием, ограниченным простым гладким замкнутым контуром Г, совпадающим с линией $\xi=\text{const}$. Рассмотрим первую основную задачу, когда контур отверстия Г свободен от внешних усилий, а на бесконечности пластинка растягивается усилиями интенсивности p_1 и p_2 соответственно вдоль и поперек оси Ox.

Соотношения (1.1) использовались выше для определения вида криволинейных координат. Теперь удобно принять иную, хотя и близкую по смыслу геометрическую интерпретацию этой функции как конформного отображения. Причем (1.1) выбирается таким образом, чтобы единичная окружность $\xi=0$ на плоскости ζ отображалась на кривую Г плоскости z, а область (ζ) вне единичного круга γ — на область (z) вне криволинейного отверстия.

В сплошной пластинке без отверстия

$$\sigma_{11}^{\circ}=p_1\cos^2\lambda+p_2\sin^2\lambda, \qquad \sigma_{22}^{\circ}=p_1\sin^2\lambda+p_2\cos^2\lambda$$
$$\tau^{\circ}=-(p_1-p_2)\sin\lambda\cos\lambda \tag{4.1}$$

где λ — угол, образованный направлением увеличения координаты ξ с положительным направлением оси Ox:

$$\cos\lambda=\frac{1}{H}\frac{\partial x}{\partial\xi}, \qquad \sin\lambda=\frac{1}{H}\frac{\partial y}{\partial\xi}$$

Образование в загруженной пластинке отверстия равносильно приложению к его контуру усилий $\sigma_{11}=-\sigma_{11}^{\circ}$, $\tau=-\tau^{\circ}$. При этом к первому полю напряжений (4.1) добавится второе поле, возникшее в пластинке за счет появления в ней отверстия. Для определения второго поля необходимо решить задачу при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{11}=-p_1\cos^2\lambda-p_2\sin^2\lambda,\quad \tau=(p_1-p_2)\sin\lambda\cos\lambda\quad \text{при } \xi=0$$
$$\sigma_{11}\to 0,\quad \tau\to 0\quad \text{при } \xi\to\infty \tag{4.2}$$

Если материал пластинки такой, что $q=E_2/E_1=1$, то при определении второго поля прежде всего выделяем квазиосесимметричное решение (1.9) (либо (1.10), где $A=0$ в силу условия $\sigma_{11}\to 0$ при $\xi\to\infty$). Постоянная C в (1.9) находится из части граничных условий (4.2), удовлетворяющей требованию $\partial(H^2\sigma_{11})/\partial\eta=0$.

Для решения задачи при оставшейся части граничных условий (4.2) используем метод, предложенный в п. 2, 3.

5. Рассмотрим более подробно ортотропную пластинку, обладающую цилиндрической анизотропией, ослабленную круговым отверстием радиуса R (начало декартовой системы координат помещено в центре отверстия, эта же точка является и полюсом анизотропии). В этом случае: $\omega(\zeta)=R\zeta$, $x=Re^\xi\cos\eta$, $y=Re^\xi\sin\eta$, $H=Re^\xi$, $\cos\lambda=\cos\eta$, $\sin\lambda=\sin\eta$.

В сплошной пластинке

$$\sigma_{11}{}^\circ={}^1/_2(p_1+p_2)+{}^1/_2(p_1-p_2)\cos 2\eta$$
$$\sigma_{22}{}^\circ={}^1/_2(p_1+p_2)-{}^1/_2(p_1-p_2)\cos 2\eta$$
$$\tau^\circ=-{}^1/_2(p_1-p_2)\sin 2\eta$$

Для определения второго поля напряжений граничные условия (4.2) принимают вид на контуре отверстия ($\xi=0$):

$$\sigma_{11}=-{}^1/_2\,(p_1+p_2)-{}^1/_2(p_1-p_2)\cos 2\eta,\quad \tau={}^1/_2(p_1-p_2)\sin 2\eta$$

и на бесконечности ($\xi\to\infty$) $\sigma_{11}\to 0$, $\tau\to 0$.

Постоянная C в (1.9) находится из условия

$$\sigma_{11}=-{}^1/_2(p_1+p_2)\quad \text{при } \xi=0$$

а осесимметричное решение запишется так:

$$\sigma_{11}=-\sigma_{22}=-{}^1/_2(p_1+p_2)e^{-2\xi},\quad \tau=0$$

Остается решить задачу при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{11}=-{}^1/_2(p_1-p_2)\cos 2\eta,\quad \tau={}^1/_2(p_1-p_2)\sin 2\eta\quad \text{при } \xi=0$$
$$\sigma_{11}\to 0,\quad \tau\to 0\quad \text{при } \xi\to\infty$$

Для этого используем результаты п. 2, 3. В рассматриваемом случае $f_1=1$, $f_2=f_3=f_4=0$, т. е. $h_0=\mathrm{Re}^\xi$, $f_{1,0}=1$, все остальные h_j, $f_{1,j}$ $(j\geqslant 1)$, а также $f_{2,j}$; $f_{3,j}$; $f_{4,j}$ $(j\geqslant 0)$ в формулах (2.6) равны нулю

$$\psi_{1,0}=-{}^1/_2(p_1-p_2)\cos 2\eta,\ \psi_{2,0}={}^1/_2(p_1-p_2)\sin 2\eta$$

все остальные $\psi_{1,j}$; $\psi_{2,j}$ $(j\geqslant 1)$ в (3.2) равны нулю, $\eta_1=\eta_2=2\eta$.

Учитывая это и используя результаты п. 2, 3, на каждом этапе процесса приходим к интегрированию уравнений (2.7), (2.8) с граничными условиями для функций $U^{1,j}$ $(j=0, 1,\ldots)$ и уравнений (2.9), (2.10) с граничными условиями для функций $V^{2,j}$ $(j=0, 1,\ldots)$, которые в данном случае принимают вид

напряженное состояние первого типа

$$U^{1,0}_{\xi\xi}+U^{1,0}_{\eta\eta}=0,\qquad n_*V^{1,0}_\eta+U^{1,0}=0$$

$$U^{1,0}_\xi=-{}^1/_2R(n_*E_*)^{-1}(p_1-p_2)\cos\eta_1\quad \text{при } \xi_1=0$$

$$U_{\xi\xi}^{1,1}+U_{\eta\eta}^{1,1}=-2\alpha_1 U_{\xi\xi}^{1,0}, \qquad n_* V_\eta^{1,1}+U^{1,1}=0$$

$$U_\xi^{1,1}=-\alpha_1 U_\xi^{1,0}-U_\xi^{2,0} \quad \text{при } \xi_1=0$$

$$U_{\xi\xi}^{1,2}+U_{\eta\eta}^{1,2}=-(2\alpha_2+\alpha_1^2)U_{\xi\xi}^{1,0}-2\alpha_1 U_{\xi\xi}^{1,1}-$$

$$-mn_*^{-1}U_\xi^{1,0}-n_*^{-2}U^{1,0}-mV_{\xi\eta}^{1,0}+n_*^{-1}V_\eta^{1,0}$$

$$n_* V_\eta^{1,2}+U^{1,2}=-mn_* U_\xi^{1,0}-U^{1,0}$$

$$U_\xi^{1,2}=-\alpha_2 U_\xi^{1,0}-\alpha_1 U_\xi^{1,1}-\beta_1 U_\xi^{2,0}-U_\xi^{2,1}-\mu V_\eta^{2,0} \quad \text{при } \xi_1=0$$

напряженное состояние второго типа

$$n_* U_\xi^{2,0}=0, \qquad V_{\xi\xi}^{2,0}+V_{\eta\eta}^{2,0}=0$$

$$V_\xi^{2,0}={}^1/_2 R(n_* E_*)^{-1}\varepsilon^{-1/2}(p_1-p_2)\sin\eta_2-U_\eta^{1,0} \quad \text{при } \xi_2=0$$

$$n_* U_\xi^{2,1}=-mn_* V_\eta^{2,0}+\int V_\eta^{2,0}\,d\xi_2, \qquad V_{\xi\xi}^{2,1}+V_{\eta\eta}^{2,1}=-2\beta_1 V_{\xi\xi}^{2,0}$$

$$V_\xi^{2,1}=-U_\eta^{1,1}-\beta_1 V_\xi^{2,0} \quad \text{при } \xi_2=0$$

$$n_* U_\xi^{2,2}=-\beta_1\int V_\eta^{2,0}\,d\xi_2-\beta_1 n_* U_\xi^{2,1}-mn_* V_\eta^{2,1}+\int V_\eta^{2,1}\,d\xi_2$$

$$V_{\xi\xi}^{2,2}+V_{\eta\eta}^{2,2}=-(2\beta_2+\beta_1^2)V_{\xi\xi}^{2,0}-2\beta_1 V_{\xi\xi}^{2,1}$$

$$V_\xi^{2,2}=-U_\eta^{1,2}-\beta_2 V_\xi^{2,0}-\beta_1 V_\xi^{2,1}-V_\xi^{1,0}+n_*^{-1}(V^{1,0}+V^{2,0}) \quad \text{при } \xi_2=0$$

Аналогично строятся следующие приближения. Все функции $U_\xi^{1,j}$, $V_\xi^{2,j}$ на бесконечности стремятся к нулю.

Используя схему, указанную в конце п. 3, на каждом этапе приходим к задаче Неймана, если коэффициенты α_j, β_j ($j=1, 2, \ldots$) выбирать следующим образом: $\alpha_1=\beta_1=0$; $\alpha_2=-n_*^{-2}$, $\beta_2=0; \ldots$. При этом разложения фактически строятся по целым степеням параметра ε, так как граничные условия для функций с нечетным вторым индексом являются нулевыми (соответствующие функции также обращаются в нуль).

Полное решение задачи о растяжении ортотропной пластинки с цилиндрической анизотропией, ослабленной круговым отверстием, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}={}&{}^1/_2(p_1+p_2)(1-\exp[-2\xi])+{}^1/_2(p_1-p_2)\{1-\exp[-(1+n_*)\xi]-\\
&-\varepsilon(1+\varepsilon^{-1/2})(1+n_*^{-1})(\exp[-(1+n_*-n_*^{-1}\varepsilon)\xi]-\\
&-\exp[-(1+n_*\varepsilon^{-1})\xi])+O(\varepsilon^2)\}\cos 2\eta \qquad (5.1)\\
\sigma_{22}={}&{}^1/_2(p_1+p_2)(1+\exp[-2\xi])-\\
&-{}^1/_2(p_1-p_2)\{1+(1+\varepsilon^{-1/2})\exp[-(1+n_*\varepsilon^{-1})\xi]+\\
&+\varepsilon((1+\varepsilon^{-1/2}-n_*^{-1})\exp[-(1+n_*\varepsilon^{-1})\xi]-\\
&-(1-n_*^{-1})\exp[-(1+n_*-n_*^{-1}\varepsilon)\xi])+O(\varepsilon^2)\}\cos 2\eta\\
\tau={}&-{}^1/_2(p_1-p_2)\{1-\varepsilon^{1/2}[(1+\varepsilon^{-1/2})\exp[-(1+n_*\varepsilon^{-1})\xi]-\\
&-\exp[-(1+n_*)\xi]+\varepsilon(1+(1+n_*^{-1})\varepsilon^{-1/2})(\exp[-(1+n_*\varepsilon^{-1})\xi]-\\
&-\exp[-(1+n_*-n_*^{-1}\varepsilon)\xi])+O(\varepsilon^2)]\}\sin 2\eta
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\eta_1=\eta_2=2\eta$, $\xi_1=n_*\alpha\xi$, $\xi_2=n_*\beta\varepsilon^{-1}\xi$, $\alpha=1-n_*^{-2}\varepsilon+O(\varepsilon^2)$, $\beta=1+O(\varepsilon^2)$.

При растяжении пластинки в одном направлении в формулах (5.1) следует положить $p_2=0$ (либо $p_1=0$), при всестороннем растяжении равными условиями — $p_1=p_2$, при напряженном состоянии простого сдвига — $p_1=-p_2$.

Отметим, что в рассматриваемом случае может быть получено точное решение в замкнутой форме, которое при $q=E_2/E_1=1$ запишется так:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{11}={}^1/_2(p_1+p_2)(1-\exp[-2\xi])+{}^1/_2(p_1-p_2)\{1-\\
-{}^1/_2(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})^{-1}((3+\sqrt{t_1})(1+\sqrt{t_2})\exp[-(1+\sqrt{t_1})\xi]+\\
+(3+\sqrt{t_2})(1+\sqrt{t_1})\exp[-(1+\sqrt{t_2})\xi])\}\cos 2\eta\\
\sigma_{22}={}^1/_2(p_1+p_2)(1+\exp[-2\xi])-{}^1/_2(p_1-p_2)\{1+\\
+{}^1/_2(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})^{-1}(\sqrt{t_1}(1-\sqrt{t_1})(1+\sqrt{t_2})\exp[-(1+\sqrt{t_1})\xi]+\\
+\sqrt{t_2}(\sqrt{t_2}-1)(1+\sqrt{t_1})\exp[-(1+\sqrt{t_2})\xi])\}\cos 2\eta\\
\tau=-{}^1/_2(p_1-p_2)\{1+(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})^{-1}(\sqrt{t_1}(1+\sqrt{t_2})\exp[-(1+\sqrt{t_1})\xi]-\\
-\sqrt{t_2}(1+\sqrt{t_1})\exp[-(1+\sqrt{t_2})\xi])\}\sin 2\eta\\
t_1=(1+2a)-[(1+2a)^2-9]^{1/2}\\
t_2=(1+2a)+[(1+2a)^2-9]^{1/2}\\
a=\varepsilon^{-1}(1-\nu_1^2-2\nu_1\varepsilon)
\end{gathered}
\tag{5.2}
$$

Формулы (5.1) представляют собой первые члены разложения в ряд по степеням ε точного решения (5.2).

Для изотропной пластинки ($\varepsilon=(1-\nu)/2$, $a=2$, $t_1=1$, $t_2=9$) решение (5.2) переходит в известное решение [1] ($e^{\xi}=\rho/R$).

Если ограничиться первыми двумя приближениями в (5.1), то погрешность при вычислении максимального напряжения $[(\sigma_{22})_{\max}]$ на контуре отверстия ($\xi=0$) не превышает одного процента при $\varepsilon={}^1/_4$ и 0.3% при $\varepsilon={}^1/_9$ (сравнения проводились для одноосного растяжения и простого сдвига; при всестороннем растяжении формулы (5.1) дают точное решение).

Даже в самом неблагоприятном с точки зрения применяемого метода случае изотропной пластинки (в этом случае параметр ε имеет максимальное значение) указанная погрешность не превышает 5—7% при $\nu=0.3$ (ν — коэффициент Пуассона).

6. Аналогично могут быть решены более сложные задачи, не поддающиеся точному решению в замкнутом виде. Остановимся кратко на некоторых из них и приведем лишь окончательные формулы для определения напряжений σ_{22}, действующих на площадках, нормальных к контуру отверстия ($\xi=0$), которые представляют наибольший интерес (напряжения σ_{11} и τ на контуре отверстия равны нулю).

1. Анизотропная пластинка, ослабленная эллиптическим отверстием. В этом случае функция (1.1) имеет вид

$$
\begin{gathered}
\omega(\zeta)=R(\zeta+c\zeta^{-1}),\quad R={}^1/_2a(1+b/a)\\
c=(1-b/a)(1+b/a)^{-1},\quad b/a=1-\varkappa\varepsilon\quad(\varkappa\sim1)
\end{gathered}
$$

где a, b — полуоси эллиптического отверстия.

На контуре отверстия

$$
\begin{gathered}
\sigma_{22}={}^1/_2(1-2c\cos 2\eta+c^2)^{-1}(2(1+c^2)(p_1+p_2)-\\
-[(1+c)^2p_1-(1-c)^2p_2]\cos 2\eta)-{}^1/_2(1+\varepsilon^{-1/2})(p_1-p_2)\cos 2\eta-\\
-\varepsilon\{{}^1/_2(p_1-p_2)\varepsilon^{-1/2}\cos 2\eta-{}^1/_2\varkappa[(p_1+p_2)\cos 2\eta-\\
-{}^1/_4(1+\varepsilon^{-1/2})(p_1-p_2)(1+2\cos 4\eta)]\}+O(\varepsilon^2)
\end{gathered}
\tag{6.1}
$$

Если $c=0$ ($\varkappa=0$), то (6.1) переходит в решение соответствующей задачи для пластинки с круговым отверстием.

Сравнение $(\sigma_{22})_{\max}$, вычисленного по формуле (6.1) для изотропной пластинки с учетом первых двух приближений, с точным решением [1] показывает, что, например, при $b/a=0.65$ погрешность для различных случаев нагружения не превышает 5–10%.

2. Анизотропная пластинка, ослабленная гипотрохоидным отверстием

$$\omega(\zeta)=R(\zeta+ck^{-1}\zeta^{-k}) \qquad (0<c<1)$$

При $k=1$ возвращаемся к случаю эллипса, при целых $k>1$ получаем кривые, представляющие правильные криволинейные многоугольники со скругленными углами: треугольник при $k=2$, квадрат при $k=3$ и т. д.

На контуре отверстия

$$\begin{aligned}\sigma_{22}={}&{}^1/_2(1-2c\cos(k+1)\eta+c^2)^{-1}[2(1+c^2)(p_1+p_2)-\\&-(p_1-p_2)\cos 2\eta+2c(p_1-p_2)\cos(k-1)\eta-\\&-2c(p_1+p_2)\cos(k+1)\eta-c^2(p_1-p_2)\cos 2k\eta]-\\&-{}^1/_2(1+\varepsilon^{-1/2})(p_1-p_2)\cos 2\eta-\varepsilon\{{}^1/_2(p_1-p_2)\varepsilon^{-1/2}\cos 2\eta+\\&+{}^1/_2\varkappa[(2\varepsilon^{-1/2}-1)(p_1-p_2)\cos(k-1)\eta-2(p_1+p_2)\cos(k+1)\eta+\\&+(1+\varepsilon^{-1/2})(p_1-p_2)\cos(k+3)\eta]\}+O(\varepsilon^2)\qquad (k=2,3,\ldots)\end{aligned} \tag{6.2}$$

При решении задачи предложенным методом предполагалось, что $c=\varkappa\varepsilon$ ($\varkappa\sim1$). Для изотропной пластинки имеется возможность провести сравнение полученного решения с точным [10]. Погрешность при вычислении $(\sigma_{22})_{\max}$ (в частности при $k=3$, $c={}^1/_3$) по формуле (6.2) с учетом первых двух приближений даже в этом, самом неблагоприятном с точки зрения применяемого метода, случае не превышает 5–10% при различных видах нагружения.

Таким образом, предложенный метод может быть с успехом использован и в исследовании краевых задач теории упругости для изотропных пластинок.

Автор благодарен Л. И. Маневичу за помощь и постоянное внимание к работе.

Поступила 7 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
3. *Маневич Л. И., Павленко А. В., Шамровский А. Д.* К решению плоской задачи теории упругости для ортотропной среды. В сб.: Вопросы прочности, надежности и разрушения механических систем. Изд-во Днепропетр. ун-та, 1969.
4. *Маневич Л. И., Павленко А. В., Шамровский А. Д.* Применение методов теории групп к решению динамических задач для ортотропных пластин. Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1970.
5. *Маневич Л. И., Павленко А. В.* К решению контактных задач теории упругости для ортотропной полосы с учетом сил трения. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 6.
6. *Маневич Л. И., Павленко А. В.* Передача продольной динамической нагрузки, действующей на ребра жесткости, к упругой ортотропной пластине. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2.
7. *Коблик С. Г., Маневич Л. И.* Контактная задача для ортотропной полосы при наличии в области контакта участков сцепления и скольжения. В сб.: Гидроаэромеханика и теория упругости, 1976, вып. 20.
8. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
9. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. М., «Высшая школа», 1971.
10. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.