МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1979

УДК 531.383

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА С НЕКОНТАКТНЫМ ПОДВЕСОМ ПРИ УГЛОВЫХ ВИБРАЦИЯХ ОСНОВАНИЯ

Т. А. САВЧЕНКО

(Владимир)

Рассматривается гироскоп с шаровым ротором, находящимся в вакууме в регулируемом силовом поле. Ротор предварительно раскручен вспомогательной системой и в рабочем режиме вращается по инерции [1, 2]. В отличие от работы [2], где поведение гироскопа рассматривалось при поступательной вибрации основания, в данной работе исследуются условия устойчивости движения центра масс ротора гироскопа при угловой вибрации.

1. Рассмотрим гироскоп с неконтактным подвесом, основание которого совершает угловые колебания вокруг некоторой оси, сохраняющей неизменное направление в пространстве, по гармоническому закону $\Omega_0 = \mu_0 \cos \Omega t$, где Ω_0 — величина вектора угловой скорости вибрации основания, μ_0, Ω — ее амплитуда и частота.

Предположим, что центр масс ротора совпадает с центром его сферической поверхности, тогда угловые и поступательные движения ротора оказываются независимыми и могут рассматриваться отдельно. Рассмотрим поступательные движения ротора.

В случае консервативного подвеса угловая вибрация основания не оказывает влияния на движение ротора. Однако в реальном подвесе из-за инерционности следящей системы движение центра масс гироскопа при угловой вибрации может стать неустойчивым.

Введем трехгранник ξ, связанный с основанием таким образом, чтобы вектор угловой скорости $\mathbf{\Omega}_0$ имел проекции на оси $\xi_1\xi_2\xi_3$ соответственно $0, 0, \Omega_0$.

В подвижной системе координат, связанной с основанием, уравнения движения центра масс ротора будут иметь вид

$$M\{\mathbf{\Omega}_0\times[\mathbf{\Omega}_0\times\mathbf{R}]+D_t\mathbf{\Omega}_0\times\mathbf{R}+2\mathbf{\Omega}_0\times D_t\mathbf{R}+D_t^2\mathbf{R}\}=\mathbf{F} \tag{1.1}$$

Здесь M — масса ротора, D_t — оператор дифференцирования по времени t, $\mathbf{R}$ — вектор смещения центра масс ротора O_1 относительно центра корпуса O, $\mathbf{F}$ — равнодействующая силового поля подвеса, которая приложена в точке O_1.

В состав следящей системы, обеспечивающей подвес ротора, входят измерители смещения ротора относительного кожуха. Измеряется положение точки O_1 относительно центра кожуха O, которое определяется вектором $\mathbf{R}$. В зависимости от показаний датчиков смещения ротора следящая система изменяет силовое поле подвеса таким образом, чтобы подвес обладал необходимой жесткостью и демпфированием. При малых смещениях ротора внутри кожуха равнодействующая $\mathbf{F}$ силового поля линейно зависит от смещения центра ротора [1]:

$$\mathbf{F}=-Q(D_t)\mathbf{R},\quad Q(D_t)=Q_0A(D_t)\,/\,B(D_t) \tag{1.2}$$

Здесь $Q(D_t)$ — передаточная функция, отвечающая конкретной схеме гироскопа с неконтактным подвесом, Q_0 — «жесткость» подвеса, $A(D_t)$, $B(D_t)$ — полиномы с постоянными коэффициентами

$$A(D_t) = A_0 D_t^n + A_1 D_t^{n-1} + \ldots + A_{n-1} D_t + 1 \qquad (1.3)$$
$$B(D_t) = B_0 D_t^m + B_1 D_t^{m-1} + \ldots + B_{m-1} D_t + 1$$

Передаточная функция $Q(D_t)$ формируется таким образом, чтобы при отсутствии внешних возмущений и отсутствии дебаланса движение центра масс ротора, определяемое дифференциальными уравнениями $MD_t^2\mathbf{R} = \mathbf{F}$, $\mathbf{F} = -Q(D_t)\mathbf{R}$ было асимптотически устойчивым. При этом корни характеристического уравнения

$$MP^2B(P) + Q_0A(P) = 0 \qquad (1.4)$$

будут находиться в левой полуплоскости $\operatorname{Re} P_j < 0$.

Перейдем к безразмерным переменным в (1.1) — (1.3) при помощи замены

$$t = T_0\tau,\ \mathbf{R} = R_0\mathbf{r},\ D_t = DT_0^{-1},\ \mathbf{F} = F_0\mathbf{f},\ \Omega = \omega T_0^{-1}$$

$$\mu_0 = \mu T_0^{-1},\quad A_j = a_j T_0^{n-j},\quad B_j = b_j T_0^{m-j},\quad Q_0 = q_0 M T_0^{-2}$$

Здесь R_0, F_0 — характерные значения соответствующих величин, выбираемые так, чтобы в рассматриваемом движении модули векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{f}$ были порядка единицы, D — оператор дифференцирования по безразмерному времени τ. Из (1.1) следует, что величину F_0 удобно определить соотношением $MR_0T_0^{-2}$, а величину T_0 выберем таким образом, чтобы $\omega = 2$ $(T_0 = 2\Omega^{-1})$.

Выполнив замену, запишем уравнение движения центра масс (1.1) и вспомогательные соотношения (1.2), (1.3) в проекциях на оси ξ_j:

$$\begin{gathered} D^2 r_{\xi_1} - 2\mu\cos 2\tau D r_{\xi_2} + 2\mu\sin 2\tau r_{\xi_2} - \mu^2\cos^2 2\tau r_{\xi_1} = f_{\xi_1} \\ D^2 r_{\xi_2} + 2\mu\cos 2\tau D r_{\xi_1} - 2\mu\sin 2\tau r_{\xi_1} - \mu^2\cos^2 2\tau r_{\xi_2} = f_{\xi_2} \\ D^2 r_{\xi_3} = f_{\xi_3},\quad b(D) f_{\xi_j} = -q_0 a(D) r_{\xi_j} \quad (j=1,2,3) \\ a(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + 1 \\ b(D) = b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \ldots + b_{m-1} D + 1 \end{gathered} \qquad (1.5)$$

Система (1.5) является линейной системой дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Уравнения относительно r_{ξ_3} и f_{ξ_3} отделяются от остальных уравнений, а корни характеристического уравнения, соответствующего переменной r_{ξ_3}, лежат в левой полуплоскости, поэтому возмущения, возникающие за счет угловой вибрации основания, не влияют на движение ротора вдоль оси ξ_3 (оси, совпадающей с направлением вектора угловой скорости $\mathbf{\Omega}_0$).

Рассмотрим два первых уравнения (1.5). Введем переменную $y = r_{\xi_1} + ir_{\xi_2}$, тогда из (1.5) следует, что

$$D^2 y + 2i\mu\cos 2\tau D y - (\mu^2\cos^2 2\tau + 2i\mu\sin 2\tau) y = -q(D) y$$

и после замены $y = z\exp(-i^1/_2\mu\sin 2\tau)$ получим

$$b(D)[D^2 z\exp(-i^1/_2\mu\sin 2\tau)] + q_0 a(D)[z\exp(-i^1/_2\mu\sin 2\tau)] = 0 \qquad (1.6)$$

Исследуем устойчивость тривиального решения уравнения (1.6) при полиномах $a(D)$ и $b(D)$ произвольной степени.

Учитывая строение полиномов $a(D)$, $b(D)$, выполним дифференцирование в (1.6) и, сократив на $\exp(-i^1/_2\mu \sin 2\tau)$, получим

$$\begin{aligned} & c_l D^l z+(c_{l-1}+2i\mu d_{l-1}\cos 2\tau)D^{l-1}z+ \\ & +(c_{l-2}+2i\mu d_{l-2}\cos 2\tau+2i\mu e_{l-2}\sin 2\tau)Dz^{l-2}+\ldots \\ & \ldots+(c_1+2i\mu d_1\cos 2\tau+2i\mu e_1\sin 2\tau)Dz+ \\ & +(c_0+2i\mu d_0\cos 2\tau+2i\mu e_0\sin 2\tau)z=0 \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Отметим, что в реальных системах величина μ имеет порядок 1 угл мин (т. е. $10^{-3}-10^{-4}$), поэтому в (1.7) опущены члены порядка $\sim\mu^2$. Коэффициенты c_j, d_j, e_j $(j=0, 1, \ldots, l)$ выражаются через коэффициенты a_j $(j=0, 1, \ldots, n-1)$, b_j $(j=0, 1, \ldots, m-1)$ из (1.5), а $l=\max\{m+2, n\}$.

Уравнение (1.7) является линейным уравнением с периодическими коэффициентами (с периодом π), причем его коэффициенты представлены в виде

$$c_j^\circ+\mu\sum_{k=1}^{s}[c_j^{-k}\exp(-2ik\tau)+c_j^k\exp(2ik\tau)] \qquad (j=0, 1,\ldots, l)$$

$$k=s=1,\quad c_j^\circ=c_j \quad (j=0, 1,\ldots, l);\quad c_l^{\pm1}=0,\quad c_{l-1}^{\pm1}=id_{l-1}$$

$$c_j^{-1}=id_j-e_j,\quad c_j^{+1}=id_j+e_j \quad (j=0, 1, \ldots, l-2)$$

2. Исследование устойчивости уравнения (1.7) можно провести методом, использованным в работе [3].

В соответствии с теорией Флоке частное решение уравнения можно искать в виде

$$z(\tau)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}J_\nu\exp((g+2i\nu)\tau)$$

Здесь g — характеристический показатель; J — коэффициенты, подлежащие определению, которые находятся из бесконечной системы алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} A_\nu^\circ J_\nu+\mu\sum_{\lambda=1}^{s}(A_\nu^\lambda J_{\nu+\lambda}+A_\nu^{-\lambda}J_{\nu-\lambda})=0 \qquad (\nu=0, \pm1,\ldots) \\ A_\nu^\lambda=[g+2i(\nu+\lambda)]^l c_l^{-\lambda}+\ldots+[g+2i(\nu+\lambda)]c_1^{-\lambda}+c_0^{-\lambda} \end{gathered} \qquad (2.1)$$

Система (2.1) имеет нетривиальное решение, если ее определитель, называемый определителем Хилла, равен нулю: $\Delta(g)=0$. Корни этого уравнения и являются характеристическими показателями решения. Будем искать те из корней, которые при $\mu\to0$ стремятся к корням уравнения

$$A_0^\circ(g)=0 \qquad (2.2)$$

Уравнение (2.2) совпадает с (1.4), записанным в безразмерном виде. Поэтому выполняется условие $\operatorname{Re} g_j<0$ и уравнение (2.2) может быть представлено следующим образом:

$$\begin{gathered} A_0^\circ(g)=c_l(g^2+2h_1g+u_1^2)\ldots(g^2+2h_pg+u_p^2) \quad \text{при } l=2p \\ A_0^\circ(g)=c_l(g^2+2h_1g+u_1^2)\ldots(g^2+2h_pg+u_p^2)(g+\alpha) \quad \text{при } l=2p+1 \\ h_j,\ \alpha>0,\ h_1<h_2<\ldots<h_p \end{gathered}$$

Случаи четного и нечетного l в исследовании особых различий не имеют, поэтому рассмотрим случай четного l.

Приближенно характеристические показатели могут быть вычислены из конечного определителя Δ_{2k+1}, получаемого из исходного бесконечного симметричным вырезанием относительно центра (т. е. элемента A_0°). Отметим, если $g_1^\circ, \ldots, g_l^\circ$ — корни уравнения (2.2) и в системе отсутствуют резонансы, т. е. выполнено условие

$$g_r^\circ - g_p^\circ \neq 2i\nu \quad (\nu=0, \pm 1, \ldots, p, \ r=1, \ldots, l, \ p\neq r) \tag{2.3}$$

то среди корней уравнения $\Delta_{2k+1}(g)=0$ найдутся l, таких, которые при $\mu\to 0$ стремятся к корням $g_1^\circ, \ldots, g_l^\circ$.

В силу условия $\operatorname{Re} g_j^\circ<0$ корни определителя Хилла в нулевом приближении по μ: $\Delta_1(g)=A_0^\circ(g)=0$ лежат в левой полуплоскости. Рассмотрим, могут ли корни определителя Хилла перейти в правую плоскость при вычислении следующего приближения ($k=1$, $\Delta_3(g)=0$) или хотя бы выйти на мнимую ось.

Итак

$$\Delta_3(g)=A_{-1}^\circ A_0^\circ A_1^\circ - \mu^2(A_{-1}^1 A_0^{-1} A_1^\circ + A_{-1}^\circ A_0^1 A_1^{-1})=0 \tag{2.4}$$

где величины A_ν^λ определяются из (2.1)

$$A_{-1}^\circ=[(g+2i)^2+2h_1(g+2i)+u_1^2]\ldots[(g+2i)^2+2h_p(g+2i)+u_p^2]$$

$$A_1^\circ=[(g-2i)^2+2h_1(g-2i)+u_1^2]\ldots[(g-2i)^2+2h_p(g-2i)+u_p^2]$$

$$A_0^{-1}=c_{l-1}^1(g-2i)^{l-1}+\ldots+c_1^1(g-2i)+c_0^1$$

$$A_0^1=c_{l-1}^{-1}(g+2i)^{l-1}+\ldots+c_1^{-1}(g+2i)+c_0^{-1}$$

$$A_{-1}^1=c_{l-1}^{-1}g^{l-1}+\ldots+c_1^{-1}g+c_0^{-1}, \quad A_1^{-1}=c_{l-1}^1 g^{l-1}+\ldots+c_1^1 g+c_0^1$$

Следуя [3], найдем границы зон устойчивости, т. е. случаи, когда корни уравнения (2.4) попадают на мнимую ось. Для этого в определитель Хилла (2.4) подставим значение $g=i\varkappa$ и найдем зависимость параметров u_1^2 и h_1 от μ.

Отметим, что произведение $B_0^\circ B_{-\varkappa}^\circ$ ($B_\nu^\lambda=A_\nu^\lambda|_{g=i\varkappa}$) содержит множителем выражение $[(u_1^2-\varkappa^2)^2+4h_1^2\varkappa^2]$, которое будем искать из (2.4) в виде ряда по степеням μ:

$$[(u_1^2-\varkappa^2)^2+4h_1^2\varkappa^2]=\Lambda_2\mu^2+\Lambda_3\mu^3+\Lambda_4\mu^4+\ldots \tag{2.5}$$

рассматриваемого в окрестности нуля этого выражения (т. е. при $u_1^2=2h_1\varkappa i+\varkappa^2$). После соответствующих преобразований при $\varkappa=1$ из (2.4) получим

$$[(u_1^2-1)^2+4h_1^2]\ldots[(u_p^2-1)^2+4h_p^2]=\mu^2\left.\frac{B_{-1}^1 B_0^{-1} B_1^0+B_{-1}^0 B_0^1 B_1^{-1}}{B_1^0}\right|_{u_1=2h_1 i+1}$$

или

$$(u_1^2-1)^2+4h_1^2=\mu^2\frac{(\Phi+i\Psi)(-\Phi+i\Psi)}{[(u_2^2-1)^2+4h_2^2]\ldots[(u_p^2-1)^2+4h_p^2]} \tag{2.6}$$

$$\Phi=\sum_{j=1}^{p}(-1)^j d_{2j-1}+\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j e_{2j}, \qquad \Psi=\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j d_{2j}+\sum_{j=1}^{p-1}(-1)^j e_{2j-1}$$

Так как левая часть уравнения (2.6) больше нуля, а правая часть меньше нуля при любых значениях входящих параметров, то уравнение (2.6) решения не имеет. Следовательно, корень $g=i$ уравнения (2.4) существовать не может, поэтому из непрерывности характеристических показателей g_j получаем, что $\operatorname{Re} g_j<0$ $(j=1,\ldots,l)$ и нулевое решение уравнения (1.7) в первом приближении устойчиво.

Рассмотрим, как изменится уравнение (2.6) при вычислении следующих приближений определителя Хилла ($k\geqslant 2$) и будет ли оно иметь решение. Из структуры коэффициентов уравнения (1.7) и строения определителя Хилла (Δ_{2k+1}) следует, что в разложении типа (2.5) коэффициент $\Lambda_3=0$ и уравнение (2.6) могут быть записаны в виде

$$(u_1^2-1)^2+4h_1^2+\mu^2\frac{\Phi^2+\Psi^2}{[(u_2^2-1)^2+4h_2^2]\ldots[(u_p^2-1)^2+4h_p^2]}=\Lambda_4\mu^4+\ldots \tag{2.7}$$

Левая часть этого уравнения положительна и имеет порядок $\sim\mu^2$, а правая часть имеет порядок $\sim\mu^4$. Таким образом независимо от знака правой части (2.7) уравнение не имеет решения, так как разница порядков между правой и левой частями $\sim\mu^2$. Следовательно, тривиальное решение уравнения (1.7) устойчиво.

Итак, при отсутствии резонансных соотношений между корнями характеристического уравнения (1.4) и частотой вибрации основания, т. е. при выполнении условия (2.3), движение центра масс ротора гироскопа устойчиво.

3. Исследуем устойчивость тривиального решения уравнения (1.7) в тех случаях, когда условие (2.3) не выполняется. Для этого используем метод осреднения; обоснование применения метода осреднения на бесконечном интервале времени имеется в ряде работ, например в [4, 5].

Поскольку исследование резонансных случаев достаточно сложно, рассмотрим только случай, когда

$$a(D)=a_0D+1,\qquad b(D)=b_0D+1$$

Уравнение (1.7) будет иметь следующий вид:

$$D^3z+(c_2-i\mu\cos 2\tau)D^2z+c_1Dz+(c_0-i\mu c_1\cos 2\tau)z=0 \tag{3.1}$$
$$c_2=1/b_0,\qquad c_1=a_0q_0/b_0,\qquad c_0=q_0/b_0$$

При $\mu=0$ из условия устойчивости характеристического уравнения (1.4) следует, что $q_0>0$, $a_0>b>0$. Исследуем при помощи метода осреднения устойчивость тривиального решения уравнения (3.1)

$$z=0,\qquad Dz=0,\qquad D^2z=0 \tag{3.2}$$

Запишем (3.1) в виде системы

$$Dz=z_1,\qquad Dz_1=z_2$$
$$Dz_2=-c_2z_2-c_1z_1-c_0z+i\mu\cos 2\tau z_2+i\mu c_1\cos 2\tau z \tag{3.3}$$

Корни характеристического уравнения невозмущенной системы (3.3) (при $\mu=0$) лежат в левой полуплоскости. Из теоремы Н. Н. Боголюбова об осреднении на бесконечном интервале времени следует, что при достаточно малом μ $(0<\mu<\mu_*)$ тривиальное решение возмущенной системы будет асимптотически устойчивым [4].

Однако в рассматриваемой задаче величина μ не может быть выбрана произвольно малой. Представляет интерес случай, когда величины μ и β близки, т. е. одного порядка.

Предположим, что корни характеристического уравнения при $\mu=0$ уравнения (3.1) $\Delta(p)=p^3+c_2p^2+c_1p+c_0=0$ имеют вид

$$p_1=-\alpha,\quad p_2=-\beta+i\omega,\quad p_3=-\beta-i\omega,\quad \alpha,\beta>0$$

Случай, когда $p_1=-\alpha$, $p_2=-\beta$, $p_3=-\gamma$ $(\alpha,\beta,\gamma>0)$, не представляет интереса.

Приведем уравнение (3.1) к стандартной форме. Определим замену переменных аналогично [6]:

$$z=H_1+H_2\cos u,\quad Dz=-\alpha H_1-cH_2\cos(u-\zeta)$$
$$D^2z=\alpha^2H_1+c^2H_2\cos(u-2\zeta),\quad H_1=h_1\exp(-\alpha\tau)$$
$$H_2=h_2\exp(-\beta\tau),\quad u=\omega\tau+\varphi,\quad c^2=\omega^2+\beta^2,\quad \zeta=\operatorname{arctg}(\omega/\beta)$$

Запишем уравнение (3.1) в виде системы в стандартной форме

$$DH_1+\alpha H_1=i\mu S/\Delta_1 \tag{3.4}$$
$$DH_2+\beta H_2=-\frac{i\mu}{\omega\Delta_1}S[\omega\cos(\omega\tau+\varphi)+(\alpha-\beta)\sin(\omega\tau+\varphi)]$$
$$D\varphi=\frac{i\mu}{\omega\Delta_1H_2}S[\omega\sin(\omega\tau+\varphi)-(\alpha-\beta)\cos(\omega\tau+\varphi)]$$
$$S=\cos 2\tau[c_1H_1+c_1H_2\cos(\omega\tau+\varphi)+\alpha^2H_1+c^2H_2\cos(\omega\tau+\varphi-2\zeta)]$$
$$\Delta_1=\frac{\partial\Delta(p)}{\partial p}\bigg|_{p=-\alpha}=(\alpha-\beta)^2+\omega^2$$

Между частотой ω и частотой вибрации основания, равной двум, возможны два резонансных соотношения: $\omega\approx1$ и $\omega\approx2$. В силу того, что правые части уравнений (3.4) — полиномы от тригонометрических функций, других резонансных соотношений нет.

Процедура осреднения системы (3.4) зависит от соотношения между величинами α и β. Если α и β одного порядка, то переменные H_1, H_2, φ — «медленные», и после осреднения правых частей (3.4) при $\omega\approx1$ получим

$$DH_1+\alpha H_1=0 \tag{3.5}$$
$$DH_2+\beta H_2=-\frac{i\mu}{2\Delta_1}H_2\beta[(\alpha^2-\beta^2+1)\sin 2\varphi+2\beta\cos 2\varphi]$$
$$D\varphi=-\frac{i\mu}{2\Delta_1}\beta[(\alpha^2-\beta^2+1)\cos 2\varphi-2\beta\sin 2\varphi]$$

Для удобства дальнейшего исследования преобразуем уравнения (3.5) при помощи замены

$$w=H_2\cos\varphi,\quad v=H_2\sin\varphi \tag{3.6}$$

После ряда выкладок перепишем (3.5)

$$DH_1+\alpha H_1=0 \tag{3.7}$$
$$Dw+\beta w=-\frac{i\mu\beta}{2\Delta_1}[(\alpha^2-\beta^2+1)v+2\beta w]$$
$$Dv+\beta v=-\frac{i\mu\beta}{2\Delta_1}[(\alpha^2-\beta^2+1)w-2\beta v]$$

Заметим, что частному решению (3.2) уравнения (3.1) соответствует частное решение системы (3.7) вида

$$H_1=0, \quad w=0, \quad v=0 \tag{3.8}$$

Система (3.7) совпадает с системой уравнений в вариациях относительно решения (3.8), и ее характеристическое уравнение следующее:

$$\Delta(p)=(p+\alpha)\left[p^2+2\beta p+\beta^2+\frac{\mu^2\beta^2}{4\Delta_1^2}(\alpha^2-\beta^2-1)^2+\frac{\mu^2\beta^2}{\Delta_1^2}\right]=0 \tag{3.9}$$

Из уравнения (3.9) следует, что корни имеют отрицательные действительные части при любых значениях параметров, так как $\alpha>0$, $\beta>0$. Следовательно, решение (3.8) асимптотически устойчиво, причем из асимптотической устойчивости решения (3.8) осредненной системы (3.7) вытекает асимптотическая устойчивость решения (3.2) уравнения (3.1) [4].

В случае, когда $\alpha\gg\beta$, переменные H_2, φ — медленные, а переменная H_1 — «быстрая». Следуя [5], подставим значение $H_1=0$ в правые части уравнений для медленных переменных из (3.4) и осредним их. При этом получим два последних уравнения системы (3.5) или (3.7)

$$\begin{aligned} Dw+\beta w &= -\frac{i\mu\beta}{2\Delta_1}[(\alpha^2-\beta^2+1)v+2\beta w] \\ Dv+\beta v &= -\frac{i\mu\beta}{2\Delta_1}[(\alpha^2-\beta^2+1)w-2\beta v] \end{aligned} \tag{3.10}$$

Выпишем характеристическое уравнение для этой системы

$$\Delta(p)=p^2+2\beta p+\beta^2+\frac{\mu^2\beta^2}{4\Delta_1^2}(\alpha^2-\beta^2+1)^2+\frac{\mu^2\beta^4}{\Delta_1^2}=0$$

Корни этого уравнения имеют отрицательные действительные части, так как $\beta>0$, и решение $w=0$, $v=0$ системы (3.10) асимптотически устойчиво. По теореме 1.7 гл. IX работы [5] из асимптотической устойчивости тривиального решения системы (3.10) и условия, что $\alpha>0$, следует асимптотическая устойчивость решения (3.2) уравнения (3.1).

Рассмотрим случай, когда $\omega\approx2$. Если $\alpha\gg\beta$, то аналогично предыдущему случаю получим

$$Dw+\beta w=0, \quad Dv+\beta v=0 \tag{3.11}$$

Очевидно, что решение $w=0$, $v=0$ асимптотически устойчиво. Из замечания, сделанного ранее, вытекает, что решение (3.2) уравнения (3.1) асимптотически устойчиво.

Если $\alpha\sim\beta$, то переменные H_1, H_2, φ — медленные, и после осреднения (3.4) получим

$$\begin{aligned} DH_1+\alpha H_1 &= \frac{i\mu}{\Delta_1}H_2\beta[(\alpha+\beta)\cos\varphi+2\sin\varphi] \\ DH_2+\beta H_2 &= -\frac{i\mu}{4\Delta_1}H_1(\alpha^2+c_1)[(\alpha-\beta)\sin\varphi+2\cos\varphi] \\ D\varphi &= -\frac{i\mu}{4\Delta_1}\frac{H_1}{H_2}(\alpha^2+c_1)[(\alpha-\beta)\cos\varphi-2\sin\varphi] \end{aligned} \tag{3.12}$$

Воспользуемся заменой (3.6), преобразуем (3.12)

$$DH_1+\alpha H_1=\frac{i\mu}{\Delta_1}\beta[(\alpha+\beta)w+2v]$$

$$Dw+\beta w=-\frac{i\mu}{2\Delta_1}H_1(\alpha^2+c_1) \tag{3.13}$$

$$Dv+\beta v=-\frac{i\mu}{4\Delta_1}H_1(\alpha^2+c_1)(\alpha-\beta)$$

Отметим, что частному решению (3.2) соответствует частное решение системы (3.13), приведенное в (3.8). Характеристическое уравнение для системы (3.13) имеет вид

$$\Delta(p)=(p+\beta)[p^2+(\alpha+\beta)p+\alpha\beta-\mu^2\alpha\beta(\alpha^2+c_1)/\Delta_1^2]=0 \tag{3.14}$$

Для того, чтобы корни уравнения (3.14) имели отрицательные действительные части, необходимо, чтобы выполнялось следующее условие: $\alpha\beta-\mu^2\alpha\beta(\alpha^2+c_1)/\Delta_1^2>0$, или

$$\mu^2<[(\alpha-\beta^2)+4]^2/[(\alpha+\beta)^2+4] \tag{3.15}$$

Если условие (3.15) не выполняется и

$$\mu^2>[(\alpha-\beta)^2+4]^2/[(\alpha+\beta)^2+4] \tag{3.16}$$

то один из корней уравнения (3.14) имеет положительную действительную часть, и решение (3.8) будет неустойчивым. Следовательно, при выполнении условия (3.15) решение (3.8) осредненной системы (3.13) будет асимптотически устойчивым, а в силу сделанного ранее замечания решение (3.2) уравнения (3.1) будет также асимптотически устойчивым. Если выполняется условие (3.16), то решение (3.2) уравнения (3.1) будет неустойчивым, что может привести к нарушению устойчивости движения ротора в подвесе.

Поступила 15 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартыненко Ю. Г.* Движение несбалансированного гироскопа с неконтактным подвесом. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 4.
2. *Мартыненко Ю. Г., Савченко Т. А.* Резонансные движения гироскопа с неконтактным подвесом на вибрирующем основании. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 6.
3. *Журавлев В. Ф., Орешников В. Г.* Аналитическое определение характеристических показателей линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В сб.: Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления. М., «Наука», 1975.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз. 1963.
5. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М., «Наука», 1973.
6. *Ройтенберг Я. Н.* Гироскопы. М., «Наука», 1966.