МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1979

УДК 539.3.01

К РЕШЕНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

В. И. ЛАВРЕНЮК

(Киев)

На основании теорий обобщенных функций предлагается способ решения квазистатических задач пространственной термоупругости для кусочно-однородных тел. Термомеханические характеристики рассматриваемых тел записываются при помощи характеристических функций области в виде, едином для всей области. Для решения краевых задач теории упругости в перемещениях используется метод возмущения. Решение полученной рекуррентной последовательности краевых задач записывается в виде потенциалов, плотность которых зависит от формы включений, вида нагрузки. Вид записи термомеханических характеристик таков, что на поверхностях включений автоматически выполняются условия идеального контакта.

Рассмотрен конкретный пример о напряженном состоянии упругого пространства с конечным числом включений, имеющих форму параллелепипеда (грани которого параллельны координатным осям), при нагреве до постоянной температуры. В первом приближении решение получено в аналитическом виде.

1. Пространственная квазистатическая задача термоупругости для неоднородных сред сводится к нахождению трех функций $u_i(\mathbf{x})$ в объеме V (объем ограничен поверхностью Ляпунова S), занимаемом телом, которые удовлетворяют системе уравнений [1]:

$$(\lambda+\mu)u_{k,ki}+\mu u_{i,kk}+\lambda_{,i}u_{k,k}+\mu_{,j}(u_{i,j}+u_{j,i})+\rho F_i'=0,\ x\in V \quad {\scriptstyle (i,\,j,\,k=1,\,2,\,3)} \tag{1.1}$$

При заданных условиях на границе S:

$$[\lambda\theta\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})]n_j=g'(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in S_\sigma$$

$$u_i(x)=\varphi_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in S_u, \quad F_i'=F_i-\frac{1}{\rho}[\gamma T^*]_{,i}, \quad \gamma=3K\alpha \tag{1.2}$$

$$g_i'=q_i+\gamma T^* n_i, \quad T^*=T-T_0, \quad \theta=u_{k,k} \quad {\scriptstyle (k=1,\,2,\,3)}$$

где T_0 — температура начального состояния, при котором напряжения в объеме отсутствуют; K — модуль объемного сжатия; α — коэффициент линейного расширения; S_σ — часть поверхности S, на которой заданы напряжения; S_u — часть поверхности, на которой заданы перемещения.

Здесь и далее, если не оговорено противное, примем правило суммирования по повторяющимся индексам. Нижний индекс после запятой обозначает дифференцирование по соответствующей координате.

Термомеханические характеристики кусочно-однородного упругого тела (фиг. 1) запишем в виде

$$\lambda_j=\langle\lambda_j\rangle+\lambda_j', \quad \lambda_1=\lambda, \quad \lambda_2=\mu$$

$$\lambda_j'=\lambda_{jp}S(V_p)+\lambda_{j0}[1-1^i S(V_p)] \tag{1.3}$$

Здесь $S(V_p)$ — характеристическая функция области V_p (включения), ограниченной поверхностью S_p, уравнение которой $V_p(\mathbf{x})=0$ (причем $V_p(\mathbf{x})\geqslant 0$ при $\mathbf{x}\in V_p$); $\langle\lambda_j\rangle+\lambda_{jp}$ — термомеханические характеристики объемов V_p, $p\geqslant 1$ и V_0, $p=0$ (матрицы); $\langle\lambda_j\rangle$ — усредненные значения соответствующих упругих характеристик; $S(V_p)=0$ при $V_p<0$ и $S(V_p)=1$ при $V_p\geqslant 0$ $(p=1, 2, 3, \ldots, N)$.

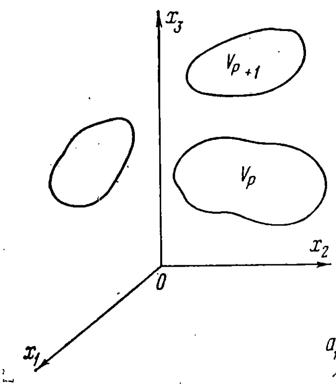
Для решения краевой задачи (1.1), (1.2) применим метод возмущения [2]; для этого введем безразмерный малый параметр $\varkappa$:

$$\lambda_j=\langle\lambda_j\rangle+\varkappa\lambda_j' \tag{1.4}$$

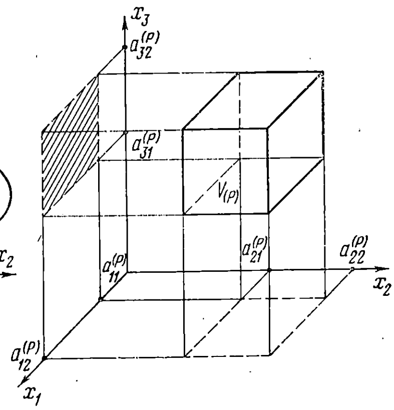
Перемещения представим в виде

$$u_i(\mathbf{x})=\varkappa^k u_i^{(k)}(\mathbf{x}) \tag{1.5}$$

Решение получаем при $\varkappa=1$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Подставляя (1.4), (1.5) в (1.1) и краевые условия (1.2) на S, получим для определения $u_i^{(0)}(\mathbf{x})$ краевую задачу

$$\begin{gathered}\Delta^* u_i^{(0)}(\mathbf{x})+\rho F_i'=0, \quad \mathbf{x}\in V\\ \sigma_{ij}^{(0)}n_j=g_i'(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in S_\sigma\\ u_i^{(0)}(\mathbf{x})=\varphi_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in S_u\\ \Delta^* u_i=(\langle\lambda_1\rangle+\langle\lambda_2\rangle)u_{k,ki}+\langle\lambda_2\rangle u_{i,kk}\\ \sigma_{ij}^{(k)}=\langle\lambda_1\rangle u_{k,k}^{(k)}\delta_{ij}+\langle\lambda_2\rangle(u_{i,j}^{(k)}+u_{j,i}^{(k)})\end{gathered} \tag{1.6}$$

а для определения $u_i^{(k)}(\mathbf{x})$ — рекуррентную последовательность краевых задач

$$\begin{gathered}\Delta^* u_i^{(k)}(\mathbf{x})=\eta_i^{(k-1)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in V\\ \sigma_{ij}^{(k)}n_j=g_i^{(k-1)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in S_\sigma\\ u_i^{(k)}(\mathbf{x})=0, \quad \mathbf{x}\in S_u\\ \eta_i^{(k)}=(\lambda_1'+\lambda_2')u_{l,li}^{(k)}+\lambda_2' u_{i,ll}^{(k)}+\lambda_{2,j}'(u_{i,j}^{(k)}+u_{j,i}^{(k)})\\ g_i^{(k)}=[\lambda_1' u_{l,l}^{(k)}\delta_{ij}+\lambda_2'(u_{i,j}^{(k)}+u_{j,i}^{(k)})]n_j\end{gathered} \tag{1.7}$$

Представим перемещения в виде суммы

$$u_i^{(k)}=u_{i1}^{(k)}+u_{i2}^{(k)} \tag{1.8}$$

где $u_{i1}^{(k)}$ — частное решение систем (1.6) при $k=0$ и (1.7) при $k\geqslant 1$. Частное решение $u_{i1}^{(0)}$ удобно искать в виде суммы $u_{i1}^{(0)}=u_{it}^{(0)}+u_{if}^{(0)}$, где $u_{if}^{(0)}$ — частное решение системы уравнений (1.6) при отсутствии температурного члена и $u_{it}^{(0)}$ — частное решение той же системы при отсутствии массовых сил.

Для нахождения $u_{it}^{(0)}(\mathbf{x})$ по аналогии с однородной упругостью [3] введем потенциал термоупругих перемещений $\Phi(\mathbf{x})$ соотношением $u_{it}^{(0)}=\Phi_{,i}$. Подставляя $\Phi(\mathbf{x})$ в (1.6), при отсутствии массовых сил получим

$$[(\langle\lambda_1\rangle+2\langle\lambda_2\rangle)\Phi_{,jj}-\gamma T^*]_{,i}=0$$

Представим γ в виде

$$\gamma=\langle\gamma\rangle+\gamma_p S(V_p)=\langle\gamma\rangle+\gamma', \quad \langle\gamma\rangle=\gamma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in V_0 \tag{1.9}$$

Напряжения, соответствующие потенциалу $\Phi(\mathbf{x})$, определяются соотношением

$$\sigma_{ij}^{(0)}=2\langle\lambda_2\rangle[\Phi_{,ij}-\delta_{ij}\Phi_{,kk}] \tag{1.10}$$

Выражение для потенциала $\Phi(\mathbf{x})$ дается интегралом Пуассона

$$\Phi(\mathbf{x})=\frac{-1}{4\pi(\langle\lambda_1\rangle+2\langle\lambda_2\rangle)}\int_V \frac{T^*\gamma'}{R(\mathbf{x},\xi)}dv_\xi \tag{1.11}$$

или, подставляя (1.9) в (1.11), будем иметь

$$\Phi(\mathbf{x})=\frac{\gamma_p}{4\pi(\langle\lambda_1\rangle+2\langle\lambda_2\rangle)}\int_{V_p} \frac{T^*(\xi)}{R(\mathbf{x},\xi)}dv_\xi$$

$$R(\mathbf{x},\xi)=[(\xi_i-x_i)(\xi_i-x_i)]^{1/2} \quad (i=1,2,3) \tag{1.12}$$

Перемещения $u_{i2}^{(k)}(\mathbf{x})$ определяются как решение краевых задач: при $k=0$

$$\Delta^* u_{i2}^{(0)}(\mathbf{x})=0, \quad \mathbf{x}\in V$$

$$\sigma_{ij2}^{(0)}n_j=g_i'(\mathbf{x})-\sigma_{ij1}^{(0)}n_j, \quad \mathbf{x}\in S_\sigma \tag{1.13}$$

$$u_{i2}^{(0)}(\mathbf{x})=\varphi_i(\mathbf{x})-u_{i1}^{(0)}(\mathbf{x}), \quad x\in S_u$$

при $k=0$

$$\Delta^* u_{i2}^{(k)}(\mathbf{x})=0, \quad \mathbf{x}\in V$$

$$\sigma_{ij2}^{(k)}n_j=g_i^{(k-1)}(\mathbf{x})-\sigma_{ij1}^{(k)}n_j, \quad \mathbf{x}\in S_\sigma \tag{1.14}$$

$$u_{i2}^{(k)}(\mathbf{x})=-u_{i1}^{(k)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in S_u$$

Перемещения $u_{i1}^{(0)}, u_{if}^{(0)}, u_{i1}^{(k)}$ определяются через известное решение Кельвина [3]:

$$u_i^{(k)}(\mathbf{x})=\int_V F_j^{(k)}(\xi)U_j^i(\mathbf{x},\xi)dv_\xi$$

$$
\begin{gathered}
U_j^i(\mathbf{x},\xi)=A\left[BR^{-1}(\mathbf{x},\xi)\delta_{ij}-(R(\mathbf{x},\xi))_{,ij}\right]\\
A=\frac{\langle\lambda_1\rangle+\langle\lambda_2\rangle}{8\pi\langle\lambda_2\rangle(\langle\lambda_1\rangle+2\langle\lambda_2\rangle)},\qquad B=\frac{\langle\lambda_1\rangle+2\langle\lambda_2\rangle}{\langle\lambda_1\rangle+\langle\lambda_2\rangle}
\end{gathered}\tag{1.15}
$$

$$
F_j^{(0)}=\rho F_j',\qquad F_j^{(k)}=\eta_j^{(k-1)},\quad k\geqslant1
$$

Краевые задачи (1.13), (1.14) описывают напряженное состояние однородного упругого тела, занимающего объем V при заданных на границах области S условиях.

Пусть $G_i^j(\mathbf{x},\xi)$ – тензор Грина, являющийся решением системы уравнений: $\Delta^*G_i^j(\mathbf{x},\xi)+\delta(\mathbf{x}-\xi)\delta_{ij}=0$, $\mathbf{x}$, $\xi\in V$.
с граничными условиями

$$
\begin{gathered}
G_i^j(\mathbf{x},\xi)=0,\quad \xi\in S_u,\quad \mathbf{x}\in V\\
\sigma_{ki}^j(\mathbf{x},\xi)n_k=0,\quad \xi\in S_\sigma,\quad \mathbf{x}\in V\\
\sigma_{ki}^j=\langle\lambda_1\rangle G_{l,l}^j\delta_{ki}+\langle\lambda_2\rangle(G_{k,i}^j+G_{i,k}^j)
\end{gathered}\tag{1.16}
$$

Тогда решение краевых задач для определения $u_{i2}^{(k)}(\mathbf{x})$ запишется в виде [3]:

$$
\begin{gathered}
u_{i2}^{(k)}(\mathbf{x})=\int\limits_{S_\sigma}P_{l1}^{(k)}(\xi)G_i^l(\mathbf{x},\xi)ds_\xi-\int\limits_{S_u}P_i^{\nu l}(\mathbf{x},\xi)u_{l2}^{(k)}(\xi)ds_\xi\\
P_{l1}^{(0)}(\xi)=g_l'(\xi)-\sigma_{lj1}^{(0)}n_j,\qquad \xi\in S_\sigma\\
u_{l2}^{(0)}(\xi)=\varphi_l(\xi)-u_{l1}^{(0)}(\xi),\qquad \xi\in S_u\\
P_{l1}^{(k)}(\xi)=g_l^{(k-1)}(\xi)-\sigma_{lj1}^{(k)}n_j,\qquad \xi\in S_\sigma\ (k\geqslant1)\\
u_{l2}^{(k)}(\xi)=-u_{l1}^{(k)}(\xi)\quad(k\geqslant1),\qquad \xi\in S_u\\
P_i^{\nu l}(\mathbf{x},\xi)=\sigma_{ij}^l(\mathbf{x},\xi)n_j,\qquad \xi\in S_\sigma
\end{gathered}\tag{1.17}
$$

Исследуем поведение решений $u_{i1}^{(k)}(\mathbf{x})$ для случая, когда термомеханические свойства объема V имеют вид (1.3) и (1.9). Частные решения $u_{it}^{(0)}$ представляют [4] собой первые производные от объемных потенциалов (1.12), которые при существовании интегрируемых производных от T^* непрерывны вместе с тангенциальными (к каждой из S_p) производными в V. Нормальные производные претерпевают при переходе через каждую из поверхностей S_p конечный скачок. Аналогичными свойствами обладают и частные решения $u_{if}^{(0)}$.

Используем далее свойства обобщенной дельта-функции [5], сосредоточенной на поверхности S_p и связанной с характеристической функцией $S(V_p)$ соотношением $[S(V_p)]_{,j}=V_{p,j}\delta(V_p)$, подставляя (1.3) в (1.7), а затем в (1.15), получим

$$
\begin{gathered}
u_{i1}^{(1)}(\mathbf{x})=\int\limits_{V_p}\left[(\lambda_{1p}+\lambda_{2p})u_{k1,kj}^{(0)}+\lambda_{2p}u_{j1,kk}^{(0)}\right]U_j^i(\mathbf{x},\xi)dv_\xi+\\
+\int\limits_{V_0}\left[(\lambda_{1p}+\lambda_{2p})u_{k1,kj}^{(0)}+\lambda_{2p}u_{j1,kk}^{(0)}\right]U_j^i(\mathbf{x},\xi)dv_\xi+\int\limits_{S_p}\left[(\lambda_{1p}+\right.\\
\left.+\lambda_{2p})u_{k1,k}^{(0)}V_{p,j}+\lambda_{2p}(u_{j1,l}^{(0)}+u_{l1,j}^{(0)})V_{p,l}\right]U_j^i(\mathbf{x},\xi)\omega^{(p)}(\xi)
\end{gathered}\tag{1.18}
$$

Свертка $f(x)$ кусочно-непрерывной функции в R^3 и $\delta(V_p)$ выражается интегралом

$$f(\mathbf{x})*\delta(V_p)=\int\limits_{S_p} f(\mathbf{x}-\xi)\,\omega^{(p)}(\xi)$$

где $\omega^{(p)}$ — дифференциальная форма, которая при условии $\operatorname{grad} V_p\neq 0$ (на S_p) может быть определена равенством

$$\omega^{(p)}(\xi)=(-1)^{j-1}V_{p,j}^{-1}\,d\xi_1,\ldots,d\xi_{j-1}\,d\xi_{j+1},\ldots,d\xi_n \quad (n=3, j=1,2,3)$$

Первые два слагаемых в (1.18) представляют суммы объемных потенциалов, плотности которых — непрерывные функции внутри области V_p и имеют особенность типа $\delta(V_p)$ на границе области S_p.

Объемный потенциал, определяющий $u_{i1}^{(1)}$, используя формулу Остроградского и свойства тензора Грина $U_{j,l_\xi}^{i}=-U_{jl_x}^{i}$, представим в виде

$$\int\limits_{V_p}[(\lambda_{1p}+\lambda_{2p})u_{k1,kj}^{(0)}+\lambda_{2p}u_{j1,ll}^{(0)}]U_j^i(\mathbf{x},\xi)\,dV_\xi=$$

$$=\int\limits_{S_p}[(\lambda_{1p}+\lambda_{2p})n_ju_{k1,k}^{(0)}+\lambda_{2p}n_lu_{j1,l}^{(0)}]U_j^i(\mathbf{x},\xi)\,dS_\xi+$$

$$+\int\limits_{V_p}[(\lambda_{1p}+\lambda_{2p})u_{k1,k}^{(0)}U_{j,j}^{i}(\mathbf{x},\xi)+\lambda_{2p}u_{j1,l}^{(0)}]U_{j,l}^{i}(\mathbf{x},\xi)\,dv_\xi. \qquad (1.19)$$

Первое слагаемое полученного выражения — потенциал простого слоя с непрерывной на S_p плотностью, второе — первые производные объемного потенциала с кусочно-непрерывной в V_p плотностью, если S_p — поверхность Ляпунова. Аналогично можно представить в (1.18) потенциал по области V_0. Третье слагаемое — потенциал простого слоя с непрерывной на S_p плотностью, если S_p — поверхность Ляпунова.

На основании свойств потенциалов приходим к выводу, что перемещения $u_{i2}^{(1)}$ непрерывны вместе со своими тангенциальными производными в V. Нормальные производные при переходе через каждую из поверхностей S_p претерпевают конечный скачок, оставаясь при этом непрерывными функциями точек поверхности S_p, если только S_p — поверхность Ляпунова.

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что $u_{i2}^{(k)}$ $(k>1)$ ведут себя так же.

Перемещения $u_{i1}^{(k)}$ как решения краевых задач для соответствующих задач однородной упругости, очевидно, непрерывны и дважды непрерывно дифференцируемы в области V.

Таким образом, задание термомеханических характеристик в виде (1.3), (1.9) приводит к автоматическому выполнению условий идеального контакта на каждой из поверхностей S_p.

По-видимому, условия идеального контакта будут выполняться и для случая, когда поверхности S_p не будут поверхностями Ляпунова, а будет лишь выполнено условие $\operatorname{grad} V_p\neq 0$ (на S_p) (при этом включения могут соприкасаться и в частном случае покрывать всю область V, тогда $V_0=\emptyset$). В таких случаях необходимо исследовать поведение объемных потенциалов и потенциалов простого слоя для поверхностей с особенностями.

2. Определим термонапряженное состояние неограниченного пространства с конечным числом включений, имеющих форму параллелепипеда, грани которых параллельны координатным плоскостям (фиг. 2).

Рассмотрим случай отсутствия массовых сил и постоянной температуры $T^*=\mathrm{const}$. Характеристическую функцию для p-го параллелепипеда можно записать так:

$$S(V_p)=\prod_{i=1}^{i=3} S(x_i-a_{il}^{(p)})\,(-1)^{l+1} \quad (l=1,2;\ i=1,2,3) \tag{2.1}$$

Тогда γ' примет вид

$$\gamma'(\mathbf{x})=\gamma_p\prod_{i=1}^{i=3} S(x_i-a_{il}^{(p)})\,(-1)^{l+1} \tag{2.2}$$

Потенциал термоупругих перемещений $\Phi(\mathbf{x})$ (1.12), который в данном случае полностью определяет решение краевой задачи для $u_i^{(0)}(x)$, будет

$$\Phi(\mathbf{x})=\frac{-\gamma_p}{4\pi(\langle\lambda_1\rangle+2\langle\lambda_2\rangle)}\int_{a_{31}^{(p)}}^{a_{32}^{(p)}}\int_{a_{21}^{(p)}}^{a_{22}^{(p)}}\int_{a_{11}^{(p)}}^{a_{12}^{(p)}} T^*R^{-1}(\mathbf{x},\xi)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3 \tag{2.3}$$

Выражение для перемещения $u_i^{(0)}(\mathbf{x})$ имеет вид

$$u_i^{(0)}(\mathbf{x})=\frac{\gamma_pT^*}{4\pi(\langle\lambda_1\rangle+2\langle\lambda_2\rangle)}\int_{a_{31}^{(p)}}^{a_{32}^{(p)}}\int_{a_{21}^{(p)}}^{a_{22}^{(p)}}\int_{a_{11}^{(p)}}^{a_{12}^{(p)}}\frac{\xi_i-x_i}{R^3(\mathbf{x},\xi)}\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3=$$

$$=\frac{\gamma_pT^*(-1)^{t+m+n}}{4\pi(\langle\lambda_1\rangle+2\langle\lambda_2\rangle)}\{(a_{ln}^{(p)}-x_l)\ln[(a_{jm}^{(p)}-x_j)+R_{ijl}^{tmn}]-R_{ijl}^{tmn}\} \tag{2.4}$$

$$(l\neq j,\ i\neq j;\ i,\ j,\ l,=1,\ 2,\ 3;\ t,\ m,\ n=1,2;\ p=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

$$R_{ijl}^{tmn}\equiv[(a_{it}^{(p)}-x_i)^2+(a_{jm}^{(p)}-x_j)^2+(a_{ln}^{(p)}-x_l)^2]^{1/2}$$

Напомним, что по индексам m, n, p, t, l должно проводиться суммирование. Напряжения $\sigma_{i}^{(0)}$ определяются соотношениями (1.10)

$$\sigma_{ij}^{(0)}=-\frac{\langle\lambda_2\rangle\gamma_pT^*}{4\pi(\langle\lambda_1\rangle+2\langle\lambda_2\rangle)}\int_{a_{31}^{(p)}}^{a_{32}^{(p)}}\int_{a_{21}^{(p)}}^{a_{22}^{(p)}}\int_{a_{11}^{(p)}}^{a_{12}^{(p)}} R^{-1}(\mathbf{x},\xi)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3=$$

$$=\frac{T^*\langle\lambda_2\rangle\gamma_p(-1)^{t+m+n+1}}{2\pi(\langle\lambda_1\rangle+2\langle\lambda_2\rangle)}\ln[(a_{ln}^{(p)}-x_l)+R_{ijl}^{tmn}] \quad (i\neq j) \tag{2.5}$$

$$\sigma_{jj}^{(0)}=\frac{\langle\lambda_2\rangle\gamma_pT^*(-1)^{t+m+n}}{2\pi(\langle\lambda_1\rangle+2\langle\lambda_2\rangle)}\operatorname{arctg}\left[\frac{b_{jm}^{(p)}b_{ln}^{(p)}}{b_{ft}^{(p)}R_{fjl}^{tmn}}+\operatorname{arctg}\frac{b_{jm}^{(p)}b_{fn}^{(p)}}{b_{lt}^{(p)}R_{ijl}^{nmt}}\right] \tag{2.6}$$

$$(i=j,\ f\neq j,\ j\neq l,\ f\neq l;\ f,\ l,\ j=1,\ 2,\ 3),\quad b_{jm}^{(p)}=a_{jm}^{(p)}-x_j$$

Из (2.1)–(2.6) видно, что перемещения $u_i^{(0)}$ и напряжения $\sigma_{ij}^{(0)}$ обращаются в нуль на бесконечности. Касательные напряжения $\sigma_{ij}^{(0)}$ $(i\neq j)$ непрерывны во всем пространстве, за исключением вершин параллелепипедов, где они стремятся к бесконечности. Напряжения $\sigma_{jj}^{(0)}$ конечны во всем пространстве и при переходе через грани параллелепипедов параллельные плоскости $x_f=0$, $x_l=0$ $(f\neq j,\ f\neq l,\ j\neq l;\ j,f,l=1,2,3)$ претерпевают конечный скачок.

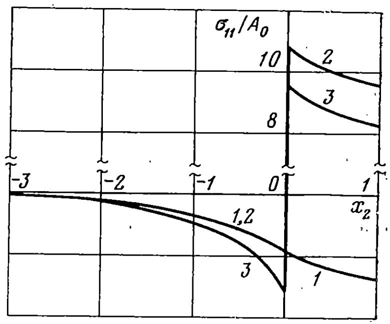
В каждой вершине и вдоль каждого из ребер параллелепипеда выражения для напряжений $\sigma_{jj}^{(0)}$ имеют неопределенность вида arctg (0/0).

На фиг. 3—5 приведено распределение напряжений

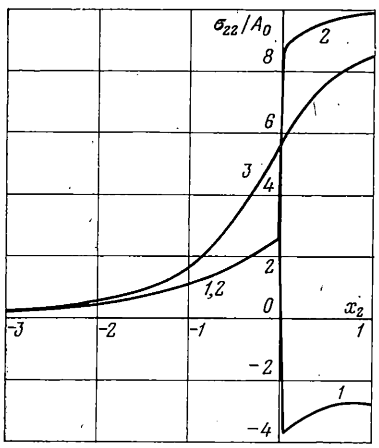
$$\frac{\sigma_{ij}^{(0)}}{A_0}, \quad A_0=\frac{\langle\lambda_2\rangle\gamma_p T^*}{2\pi(\langle\lambda_1\rangle+2\langle\lambda_2\rangle)}, \quad a_{i1}^{(1)}=0, \; a_{i2}^{(1)}=2 \;{}_{(i=1,2,3)} \text{ при } p=1$$

На фиг. 3, 4 построены графики напряжений $\sigma_{jj}^{(0)}/A_0$ $(j=1, 2)$. При $x_1=1$ (кривая *1* соответствует $x_3=0_-$, кривая *2* соответствует $x_3=0_+$, а кривая *3* построена при $x_3=1$). Напряжения $\sigma_{12}^{(0)}/A_0$ представлены на фиг. 5 (кривая *1* относится к случаю $x_3=0$, $x_1=1$, а кривая *2* соответствует $x_3=0$, $x_1=0$).

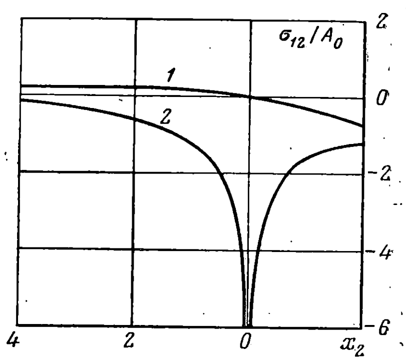
Как показал численный анализ и как видно из графиков, напряжения $\sigma_{ij}^{(0)}$ $(i, j=1, 2)$ достаточно быстро затухают при удалении от включения. Внутри включения напряжения изменяются незначительно. Касательные напряжения везде, кроме близких окрестностей вершин параллелепипедов (в которых



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

они имеют логарифмическую особенность), незначительны по сравнению с нормальными напряжениями.

Поступила 19 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. Изд-во МГУ, 1976.
2. *Ломакин В. А.* О деформировании микронеоднородных упругих тел. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М., «Мир», 1975.
4. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. М., «Высшая школа», 1969.
5. *Гельфанд И. Н., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.