МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1979

УДК 539.3

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ НЕСЖИМАЕМЫХ ТЕЛ С ПАМЯТЬЮ

Л. М. ЗУБОВ

(Ростов-на-Дону)

В нелинейной теории упругости известны [1, 2] пять семейств неоднородных статических деформаций, являющихся универсальными для однородных изотропных несжимаемых упругих тел в том смысле, что их можно реализовать в состоянии равновесия без приложения объемных сил в любом материале указанного класса. Это позволяет, в частности, получить точные решения ряда практически важных задач о конечных деформациях несжимаемых упругих тел [3].

Ниже дано простое доказательство того, что эти виды деформаций можно реализовать в квазистатическом процессе за счет только поверхностных нагрузок также и в любых однородных изотропных несжимаемых телах с памятью. Под квазистатическим процессом понимается достаточное медленное движение сплошной среды, когда в уравнениях равновесия можно пренебречь силами инерции. Таким образом, упомянутые типы деформаций являются универсальными в квазистатическом смысле и для однородных изотропных несжимаемых вязкоупругих материалов.

1. Движение сплошной среды зададим с помощью отображения $Q^M(q^m, t)$, где t — время, q^m $(m=1, 2, 3)$ — некоторые криволинейные координаты в отсчетной конфигураци тела (лагранжевы координаты), Q^M $(M=1, 2, 3)$ — некоторые криволинейные координаты в пространстве (эйлеровы координаты). Обозначим $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ соответственно радиус-вектор материальной частицы в отсчетной конфигурации и радиус-вектор точки пространства и введем в рассмотрение векторные базисы, ассоциированные с указанными координатами

$$\mathbf{r}_m=\partial\mathbf{r}(q^n)/\partial q^m,\ \mathbf{R}_M=\partial\mathbf{R}(Q^N)/\partial Q^M \tag{1.1}$$

Векторные базисы, взаимные к (1.1), обозначим соответственно $\mathbf{r}^n$, $\mathbf{R}^N$. Эйлеров векторный базис $\mathbf{R}_M$ не следует смешивать с лагранжевым базисом деформированной конфигурации $\mathbf{R}_m$, определяемым выражением $\mathbf{R}_m=\partial\mathbf{R}(q^n, t)/\partial q^m$.

Отметим, что при лагранжевом описании движения среды, когда в качестве независимых переменных принимаются координаты q^n и время, векторный базис $\mathbf{r}_m$ не зависит от времени. При эйлеровом способе описания, когда независимыми переменными служат Q^N и t, базис $\mathbf{R}_M$ не зависит от времени.

Градиент деформации вводится соотношением [3]:

$$\mathbf{F}=\nabla^\circ\mathbf{R}=\mathbf{r}^k\mathbf{R}_k,\ \nabla^\circ\equiv\mathbf{r}^m\partial/\partial q^m \tag{1.2}$$

Из (1.1) и (1.2) получим другое представление для градиента деформации

$$\mathbf{F}=(\partial Q^M/\partial q^m)\mathbf{r}^m\mathbf{R}_M \tag{1.3}$$

В дальнейшем будут использоваться следующие координатные системы: декартова — $q^1=x$, $q^2=y$, $q^3=z$; $Q^1=X$, $Q^2=Y$, $Q^3=Z$; цилиндрическая — $q^1=r$, $q^2=\varphi$, $q^3=z$; $Q^1=R$, $Q^2=\Phi$, $Q^3=Z$; сферическая — $q^1=r$, $q^2=\theta$ (широта), $q^3=\varphi$ (долгота); $Q^1=R$, $Q^2=\Theta$, $Q^3=\Phi$. Для этих ортогональных координат удобно применять ортонормированные базисы. Участвующие в (1.3) базисы выражаются следующим образом.

Декартова система

$$\mathbf{r}^1=\mathbf{R}_1=\mathbf{i},\ \mathbf{r}^2=\mathbf{R}_2=\mathbf{j},\ \mathbf{r}^3=\mathbf{R}_3=\mathbf{k}$$

Цилиндрическая система

$$\mathbf{r}^1=\mathbf{e}_r,\ \mathbf{r}^2=\mathbf{e}_\varphi/r,\ \mathbf{r}^3=\mathbf{R}_3=\mathbf{k},\ \mathbf{R}_1=\mathbf{e}_R,\ \mathbf{R}_2=R\mathbf{e}_\Phi$$

Сферическая система

$$\mathbf{r}^1=\mathbf{e}_r,\ \mathbf{r}^2=\mathbf{e}_\theta/r,\ \mathbf{r}^3=\mathbf{e}_\varphi/r\cos\theta$$
$$\mathbf{R}_1=\mathbf{e}_R,\ \mathbf{R}_2=R\mathbf{e}_\Theta,\ \mathbf{R}_3=R\cos\Theta\mathbf{e}_\Phi$$

По градиенту деформации $\mathbf{F}(t)$ в данной частице тела строится мера деформации Коши [3]:

$$\mathbf{G}(t)=\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{F}^T(t)=\mathbf{G}^T(t) \tag{1.4}$$

Уравнения равновесия для тензора напряжений Коши $\mathbf{T}=\mathbf{T}^T$ при отсутствии массовых сил и в пренебрежении инерционными членами можно записать так:

$$\nabla_M t^{MN}=0,\ \mathbf{T}=t^{MN}\mathbf{R}_M\mathbf{R}_N \tag{1.5}$$

Здесь предполагается, что поле тензора напряжений представлено как функция эйлеровых координат Q^M, ∇_M — символ ковариантной производной в системе координат Q^M.

Общее представление определяющего уравнения несжимаемого простого материала, удовлетворяющее требованию независимости от системы отсчета, имеет вид [2]:

$$\mathbf{T}(t)=p(t)\mathbf{E}+\mathbf{T}^*(t),\ \mathbf{T}^*(t)=\mathbf{F}^T(t)\cdot\mathbf{K}(t)\cdot\mathbf{F}(t) \tag{1.6}$$
$$\mathbf{K}(t)=\boldsymbol{\Psi}[\mathbf{G}^t(s)],\ \mathbf{G}^t(s)\equiv\mathbf{G}(t-s),\ s\geqslant0$$

Здесь $\mathbf{E}$ — единичный тензор, $\boldsymbol{\Psi}$ — оператор, сопоставляющий предыстории меры деформации Коши (включая и актуальное значение $\mathbf{G}(t)$) в данной частице актуальное значение симметричного тензора $\mathbf{K}(t)$ в этой частице. Несжимаемый материал допускает только изохорические движения, при которых $\det\mathbf{F}(t)=\det\mathbf{G}^t(s)=1$. Шаровой тензор $p\mathbf{E}$ представляет собой составляющую напряжения, не определяемую движением окрестности частицы. Эту составляющую можно трактовать как реакцию связи, задаваемой условием несжимаемости.

Для однородного тела оператор $\boldsymbol{\Psi}$ одинаков для всех частиц, т. е. не зависит явно от лагранжевых координат.

По определению изотропного материала [2] существует отсчетная конфигурация, называемая неискаженным состоянием тела, особенность которой состоит в том, что если градиент деформации отсчитывается от этой конфигурации, то тензор $\mathbf{T}^*(t)$ не изменится при замене $\mathbf{F}^t(s)$ на $\mathbf{P}\cdot\mathbf{F}^t(s)$, где $\mathbf{P}$ — произвольный ортогональный тензор.

Из (1.6) нетрудно вывести, что для изотропного материала оператор $\boldsymbol{\Psi}$ является изотропным, т. е. удовлетворяет соотношению

$$\boldsymbol{\Psi}[\mathbf{P}\cdot\mathbf{G}^t(s)\cdot\mathbf{P}^T]=\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\Psi}[\mathbf{G}^t(s)]\cdot\mathbf{P}^T \tag{1.7}$$

для любого ортогонального тензора $\mathbf{P}$.

Дальнейшие рассуждения основываются на следующем утверждении. Если при некотором движении изотропной среды для данной частицы материала существует постоянный единичный вектор $\mathbf{e}$, являющийся при всех

t, s собственным вектором тензора $\mathbf{G}^t(s)$, то он будет собственным вектором и для тензора $\mathbf{K}(t)$ в этой частице.

Для доказательства возьмем в (1.7) в качестве $\mathbf{P}$ ортогональный тензор $\mathbf{S}$ специального вида

$$\mathbf{S}=\mathbf{S}^T=\mathbf{E}-2\mathbf{ee} \tag{1.8}$$

Так как $\mathbf{e}$ — собственный вектор тензора $\mathbf{G}^t(s)$, то легко видеть, что

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{G}^t(s)\cdot\mathbf{S}^T=\mathbf{G}^t(s) \tag{1.9}$$

Из (1.6), (1.7) следует

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{K}(t)=\mathbf{K}(t)\cdot\mathbf{S} \tag{1.10}$$

Подставив сюда выражение (1.8) и умножив (1.10) на вектор $\mathbf{e}$, получим $(\mathbf{e}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}=\mathbf{e}\cdot\mathbf{K}$. Последнее соотношение означает, что $\mathbf{e}$ служит собственным вектором для тензора $\mathbf{K}(t)$.

2. Рассмотрим семейства деформаций, являющихся универсальными для несжимаемых изотропных упругих тел [2], и в отличие от [2] параметры, участвующие в задании деформации, будем считать не константами, а функциями времени. Найдем для этих видов движения выражения тензоров $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ как функций лагранжевых координат и времени.

Первое семейство

$$R=\sqrt{2a(t)x},\quad \Phi=b(t)y,$$
$$Z=\frac{z}{a(t)b(t)}-b(t)h(t)y,\quad a(t)b(t)\neq 0 \tag{2.1}$$

По формулам (1.3), (1.4) имеем

$$\mathbf{F}=\frac{\mathbf{ie}_R a(t)}{\sqrt{2a(t)x}}+\mathbf{je}_\Phi b(t)\sqrt{2a(t)x}-\mathbf{jk}b(t)h(t)+\frac{\mathbf{kk}}{a(t)b(t)}=$$
$$=\left[\frac{\mathbf{ii}a(t)}{\sqrt{2a(t)x}}+\mathbf{jj}b(t)\sqrt{2a(t)x}-\mathbf{jk}b(t)h(t)+\frac{\mathbf{kk}}{a(t)b(t)}\right]\cdot\mathbf{H}_1 \tag{2.2}$$
$$\mathbf{H}_1=\mathbf{ie}_R+\mathbf{je}_\Phi+\mathbf{kk},\quad \mathbf{H}_1\cdot\mathbf{H}_1^T=\mathbf{E}$$

$$\mathbf{G}={}^1/_2\mathbf{ii}a(t)/x+\mathbf{jj}[2a(t)b^2(t)x+b^2(t)h^2(t)]-$$
$$-\frac{(\mathbf{kj}+\mathbf{jk})h(t)}{a(t)}+\frac{\mathbf{kk}}{a^2(t)b^2(t)} \tag{2.3}$$

Предыстория $\mathbf{G}^t(s)$ получается из (2.3) заменой t на $t-s$. Из (2.3) следует, что при всех значениях t и s вектор $\mathbf{i}$ является собственным для $G^t(s)$, а компоненты этого тензора в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ не зависят от координат y, z.

Второе семейство

$$X={}^1/_2a(t)b^2(t)r^2,\quad Y=\varphi/a(t)b(t)$$
$$Z=z/b(t)+\varphi h(t)/a(t)b(t),\quad a(t)b(t)\neq 0 \tag{2.4}$$

Согласно (1.3), (1.4), имеем

$$\mathbf{F}=\left[\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r a(t)b^2(t)r+\frac{\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi+h(t)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{k}}{a(t)b(t)r}+\frac{\mathbf{kk}}{b(t)}\right]\cdot\mathbf{H}_2$$
$$\mathbf{H}_2=\mathbf{e}_r\mathbf{i}+\mathbf{e}_\varphi\mathbf{k}+\mathbf{kk},\quad \mathbf{H}_2\cdot\mathbf{H}_2^T=\mathbf{E} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{G}=\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r a^2(t)\,b^4(t)\,r^2+\frac{\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi(1+h^2(t))}{a^2(t)\,b^2(t)\,r^2}+ \\ +\frac{(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{k}+\mathbf{k}\mathbf{e}_\varphi)\,h(t)}{a(t)\,b^2(t)\,r}+\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{b^2(t)} \tag{2.6}$$

Соотношение (2.6) показывает, что вектор $\mathbf{e}_r$ направлен по главной оси тензора $\mathbf{G}^t(s)$, а компоненты последнего в базисе $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{k}$ зависят от координаты r и времени.

Третье семейство

$$R=\sqrt{a(t)\,r^2+b(t)},\quad \Phi=h(t)\,\varphi+d(t)\,z \\ Z=l(t)\,\varphi+f(t)\,z,\quad a(t)\,[h(t)f(t)-d(t)\,l(t)]=1 \tag{2.7}$$

На основании (1.3), (1.4) получим

$$\mathbf{F}=\Bigg[\frac{\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r a(t)\,r}{\sqrt{a(t)\,r^2+b(t)}}+\frac{\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi h(t)\sqrt{a(t)\,r^2+b(t)}}{r}+ \\ +\mathbf{k}\mathbf{e}_\varphi d(t)\sqrt{a(t)\,r^2+b(t)}+\frac{\mathbf{e}_\varphi\mathbf{k}\,l(t)}{r}+\mathbf{k}\mathbf{k}f(t)\Bigg]\cdot\mathbf{H}_3 \tag{2.8}$$

$$\mathbf{H}_3=\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R+\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi+\mathbf{k}\mathbf{k},\quad \mathbf{H}_3\cdot\mathbf{H}_3{}^T=\mathbf{E}$$

$$\mathbf{G}=\frac{\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi}{r^2}\{h^2(t)\,[a(t)\,r^2+b(t)]+l^2(t)+l(t)\,d(t)\,r\sqrt{a(t)\,r^2+b(t)}\}+ \\ +\frac{\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r a^2(t)\,r^2}{a(t)\,r^2+b(t)}+\frac{(\mathbf{e}_\varphi\mathbf{k}+\mathbf{k}\mathbf{e}_\varphi)}{r}\{l(t)f(t)+h(t)\,d(t)\,[a(t)\,r^2+b(t)]\}+ \\ +\mathbf{k}\mathbf{k}[f^2(t)+d^2(t)\,b(t)+a(t)\,d^2(t)\,r^2] \tag{2.9}$$

Выражение (2.9) означает, что вектор $\mathbf{e}_r$ — собственный для $G^t(s)$. Компоненты $\mathbf{G}$ в базисе $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{k}$ не зависят от координат φ, z.

Четвертое семейство

$$R=[\pm r^3+a(t)]^{1/3},\quad \Theta=\pm\theta,\quad \Phi=\varphi \tag{2.10}$$

Формулы (1.3), (1.4) дают

$$\mathbf{F}=\{\pm\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r[\pm r^3+a(t)]^{-2/3}r^2+(\pm\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta+\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi)\,[\pm r^3+a(t)]^{1/3}r^{-1}\}\cdot\mathbf{H}_4 \tag{2.11}$$

$$\mathbf{H}_4=\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R+\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\Theta+\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi,\quad \mathbf{H}_4\cdot\mathbf{H}_4{}^T=\mathbf{E}$$

$$\mathbf{G}=\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r[\pm r^3+a(t)]^{-4/3}r^4+(\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta+\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi)\,[\pm r^3+a(t)]^{2/3}r^{-2} \tag{2.12}$$

Из (2.12) следует, что главные оси тензора $\mathbf{G}^t(s)$ всегда направлены по векторам базиса $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$, а его компоненты в этом базисе не зависят от координат θ, φ. Кроме того, имеет место соотношение

$$\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{e}_\theta=\mathbf{e}_\varphi\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{e}_\varphi \tag{2.13}$$

Пятое семейство

$$R=a(t)\,r,\quad \Phi=b(t)\ln r+h(t)\,\varphi,\quad Z=d(t)\,z,\quad a^2(t)\,h(t)\,d(t)=1 \tag{2.14}$$

С помощью (1.3), (1.4) из (2.14) получим

$$\mathbf{F}=[\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r a(t)+\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\varphi a(t)\,b(t)+\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi a(t)\,h(t)+\mathbf{k}\mathbf{k}d(t)]\cdot\mathbf{H}_5 \\ \mathbf{H}_5=\mathbf{e}_r\mathbf{e}_R+\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\Phi+\mathbf{k}\mathbf{k},\quad \mathbf{H}_5\cdot\mathbf{H}_5{}^T=\mathbf{E} \tag{2.15}$$

$$\mathbf{G}=\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r[a^2(t)+a^2(t)\,b^2(t)]+(\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\varphi+\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_r)\,a^2(t)\,h(t)\,b(t)+ \\ +\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi a^2(t)\,h^2(t)+\mathbf{k}\mathbf{k}d^2(t) \tag{2.16}$$

Согласно (2.16), вектор $\mathbf{k}$ всегда направлен по главной оси тензора $\mathbf{G}^t(s)$, а компоненты $\mathbf{G}$ в базисе $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{k}$ не зависят ни от одной из координат r, φ, z.

3. Перейдем к анализу уравнений равновесия (1.5) для каждого из рассмотренных выше семейств деформаций. Будем использовать обычные обозначения для физических составляющих тензора напряжений в ортонормированных базисах эйлеровых координат

$$\sigma_R=\mathbf{e}_R\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_R=\sigma_R{}^*+p,\quad \tau_{R\Phi}=\mathbf{e}_R\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{e}_\Phi=\tau_{R\Phi}{}^* \tag{3.1}$$

. . . .

Здесь звездочкой отмечены компоненты тензора $\mathbf{T}^*$ в (1.6).

С учетом (3.1) вместо (1.5) получим (в случае цилиндрических координат)

$$\frac{\partial\sigma_R{}^*}{\partial R}+\frac{\sigma_R{}^*-\sigma_\Phi{}^*}{R}+\frac{\partial\tau_{R\Phi}}{R\partial\Phi}+\frac{\partial\tau_{RZ}}{\partial Z}+\frac{\partial p}{\partial R}=0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial\tau_{R\Phi}}{\partial R}+\frac{\partial\sigma_\Phi{}^*}{R\partial\Phi}+\frac{2\tau_{R\Phi}}{R}+\frac{\partial\tau_{\Phi Z}}{\partial Z}+\frac{\partial p}{R\partial\Phi}=0$$

$$\frac{\partial\tau_{RZ}}{\partial R}+\frac{\partial\tau_{\Phi Z}}{R\partial\Phi}+\frac{\tau_{RZ}}{R}+\frac{\partial\sigma_Z{}^*}{\partial Z}+\frac{\partial p}{\partial Z}=0$$

Запишем компонентное представление определяющего уравнения (1.6) в некотором ортонормированном базисе

$$K_{mn}=\psi_{mn}(G_{kl}{}^t) \tag{3.3}$$

Свойство изотропности (1.7) оператора Ψ означает, что его компонентное представление не зависит от выбора ортонормированного базиса. Другими словами, вид операторов ψ_{mn}, т. е. зависимость компонент тензора $\mathbf{K}$ от компонент предыстории меры деформации Коши, одинаков во всех ортонормированных базисах. Отсюда, в частности, следует, что хотя векторный базис цилиндрических координат $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{k}$ зависит от координаты φ, связь компонент тензора $\mathbf{K}$ в этом базисе с компонентами тензора $\mathbf{G}^t$ в случае однородного тела одинакова для всех частиц.

Поэтому для второго и третьего семейств деформаций компоненты тензора $\mathbf{K}$ в базисе $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{k}$ будут функциями только лагранжевой координаты r и времени, так как по доказанному в п. 2 компоненты $\mathbf{G}^t$ в этом базисе не зависят от координат φ, z.

Для первого семейства компоненты тензора $\mathbf{K}$ в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ будут зависеть только от координаты x и времени. В случае четвертого семейства компоненты $\mathbf{K}$ в базисе $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ являются функциями сферической координаты r и времени. Для пятого семейства компоненты $\mathbf{K}$ в базисе $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{k}$ зависят только от времени.

Приняв во внимание доказанное в п. 1 утверждение и соотношение (2.3), видим, что в первом семействе деформаций вектор $\mathbf{i}$ является собственным для тензора $\mathbf{K}(t)$. В результате будем иметь

$$\tau_{R\Phi}=a(t)\,b(t)\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{j}=0 \tag{3.4}$$

$$\tau_{RZ}=a(t)\,[2a(t)\,x]^{-1/2}\mathbf{i}\cdot\mathbf{K}\cdot\left[\frac{\mathbf{k}}{a(t)\,b(t)}-\mathbf{j}b(t)\,h(t)\right]=0$$

Далее, с помощью (1.6), (2.2) легко установить, что компоненты тензора $\mathbf{T}^*$ в базисе $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\Phi$, $\mathbf{k}$ зависят только от лагранжевой координаты x и времени. После перехода к эйлеровым переменным, согласно (2.1), они окажутся функциями координаты R и времени.

В третьем семействе вектор $\mathbf{e}_r$ будет собственным для тензора $\mathbf{K}(t)$. Отсюда на основании (1.6), (2.8) вытекает, что $\tau_{R\Phi}=\tau_{RZ}=0$. Остальные компоненты тензора $\mathbf{T}^*$ в эйлеровом описании будут зависеть лишь от координаты R и времени, как это следует из (2.7), (2.8).

С учетом сказанного уравнения равновесия (3.2) для первого и третьего семейств примут вид

$$\frac{d\sigma_R^*}{dR}+\frac{\sigma_R^*-\sigma_\Phi^*}{R}+\frac{\partial p}{\partial R}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial \Phi}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial Z}=0 \tag{3.5}$$

Из последних двух уравнений (3.5) имеем $p=p(R,t)$, а функция $p(R,t)$ определяется квадратурами из первого уравнения.

Для второго семейства при помощи аналогичных рассуждений и соотношений (1.6), (2.4)–(2.6) получим, что $\tau_{XZ}=\tau_{XY}=0$, а остальные компоненты $\mathbf{T}^*$ будут функциями координаты X и времени. Из двух уравнений равновесия в декартовых координатах следует, что $p=p(X,t)$. За счет этой функции можно удовлетворить оставшемуся уравнению равновесия $d\sigma_X^*/dX+dp/dX=0$.

В случае четвертого семейства каждый из векторов $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\varphi$ служит собственным для тензора $\mathbf{K}(t)$. Отсюда на основании (1.6), (2.10), (2.11) вытекает, что будут отличны от нуля лишь нормальные напряжения σ_R, σ_Θ, σ_Φ, причем величины σ_R^*, σ_Θ^*, σ_Φ^* при эйлеровом описании зависят лишь от координаты R и времени. Кроме того, из (2.13) и изотропности материала следует $\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{e}_\theta=\mathbf{e}_\varphi\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{e}_\varphi$.

Из последнего соотношения с использованием (1.6), (2.10) получим, что $\sigma_\Theta^*=\sigma_\Phi^*$. С помощью уравнений равновесия в сферических координатах нетрудно проверить, что $p=p(R,t)$. Эта функция находится в квадратурах из уравнения

$$d\sigma_R^*/dR+2(\sigma_R^*-\sigma_\Theta^*)/R+dp/dR=0$$

Применительно к пятому семейству свойство изотропности материала дает $\mathbf{k}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{e}_r=\mathbf{k}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{e}_\varphi=0$.

Согласно (1.6), (2.15), это означает, что $\tau_{RZ}=\tau_{\Phi Z}=0$. Остальные компоненты тензора $\mathbf{T}^*$ не зависят от координат R, Φ, Z. Поэтому из третьего уравнения (3.2) имеем $p=p(R,\Phi,t)$. Два других уравнения равновесия принимают вид

$$\partial p/\partial R=(\sigma_\Phi^*-\sigma_R^*)/R,\quad \partial p/\partial\Phi=-2\tau_{R\Phi} \tag{3.6}$$

Так как величины σ_R^*, σ_Φ^*, $\tau_{R\Phi}$ зависят только от времени, условие разрешимости системы (3.6) относительно $p(R,\Phi,t)$, очевидно, выполнено.

Отметим, что отдельные из рассмотренных выше семейств деформаций являются универсальными также для некоторых неоднородных несжимаемых изотропных тел. Так, нетрудно видеть, что первое семейство универсально для тел с произвольной неоднородностью по координате x, второе и третье – для тел с неоднородностью по координате r, четвертое – для тел с неоднородностью по сферической координате r.

Кроме того, способом, аналогичным указанному выше, можно показать, что первое семейство универсально также и для ортотропных материалов с преимущественными направлениями $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, второе, третье и пятое семейства – для ортотропных материалов с преимущественными направлениями $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{k}$, четвертое семейство – для трансверсально-изотропных тел с осью анизотропии, расположенной в радиальном направлении. При этом допустимы только что перечисленные виды неоднородности.

Поступила 26 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ericksen J. L.* Deformations possible in every isotropic, incompressible, perfectly elastic body. Z. angew. Math. und Phys., 1954, Bd 5, H. 6, S. 466–489.
2. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., «Мир», 1975.
3. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.