

ОБ ОБКАТЕ НАГРУЖЕННОГО РОТОРА
ПО ЖЕСТКОМУ ПОДШИПНИКУ

В. М. САНДАЛОВ, Ю. В. ЦВЕТКОВ

(Горький)

Рассматривается задача о взаимодействии нагруженного постоянной силой сбалансированного ротора при его плоскопараллельных перемещениях с абсолютно жестким подшипником в предположении, что скорость вращения ротора постоянна. Аналогичная задача для ненагруженного ротора была рассмотрена в [1]. В этой работе показано, что в системе ротор — подшипник возможны: движения без контакта ротора и подшипника (в пределах зазора); движения с ударами ротора о подшипник — конечно и бесконечно ударные; безотрывные движения — скольжение или обкат ротора по поверхности подшипника (в [2], где исследуются безотрывные движения неуравновешенного ротора по жесткому статору, термин «обкат» относится к любому безотрывному движению).

Учет нагруженности ротора постоянной силой в отличие от [1] ведет к нарушению симметрии задачи и, как следствие, к увеличению размерности фазового пространства динамической системы ротор — подшипник.

1. Составим уравнения движения в соответствии с возможными типами движений. В пределах зазора в полярных координатах ρ , ψ с началом в центре подшипника (фиг. 1) движения ротора описываются уравнениями

$$m(\rho'' - \rho\psi'^2) + h\rho' + c\rho = f \cos \psi \quad (1.1)$$

$$m(\rho\psi'' + 2\rho'\psi') + h\rho\psi' = -f \sin \psi, \quad \rho < \delta$$

Здесь m — масса ротора, приведенная к цапфе; h , c — коэффициенты демпфирования и жесткости; f — постоянная сила, действующая на ротор (например его вес); δ — радиальный зазор между цапфой ротора и подшипником.

Ударное взаимодействие ротора с подшипником описывается уравнениями

$$\rho'' = -k\rho', \quad \delta\psi'' = \delta\psi' - \mu \operatorname{sgn} V(1+k)\rho'$$

где $0 < k < 1$ — коэффициент восстановления скорости, μ — коэффициент сухого трения между поверхностями ротора и подшипника, $V = q + \delta\psi'$ — скорость точки ротора в месте контакта относительно поверхности подшипника ($q = R\omega_0$, ω_0 — скорость вращения ротора, R — радиус цапфы). Знаком минус обозначены скорости до удара, знаком плюс — после удара.

При безотрывном взаимодействии ($\rho = \delta$, $\rho' = \rho'' = 0$) имеют место уравнения

$$\delta(-m\psi'^2 + c) - f \cos \psi = -N, \quad \delta(m\psi'' + h\psi') + f \sin \psi = -T \quad (1.2)$$

где N и T — величины силы нормального давления на подшипник и тангенциальной силы. Для осуществления взаимодействия необходимо выполнение условия $N \geq 0$. Если $V \neq 0$, то эти уравнения описывают процесс скольжения ротора по поверхности подшипника и, поскольку в этом слу-

чае $|T| = \mu N$, имеют вид

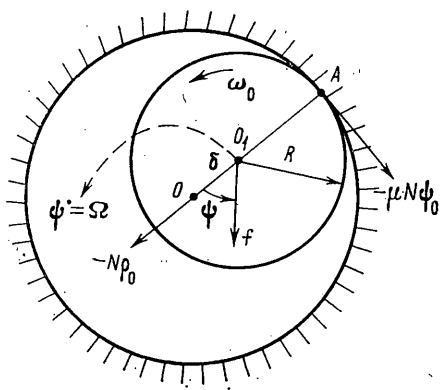
$$m(\psi'' + h\psi')\delta + f \sin \psi = -\mu N \operatorname{sgn} V, \quad N = \delta(m\psi'^2 - c) + f \cos \psi \quad (1.3)$$

Процесс качения описывается уравнением $V=0$, т. е.

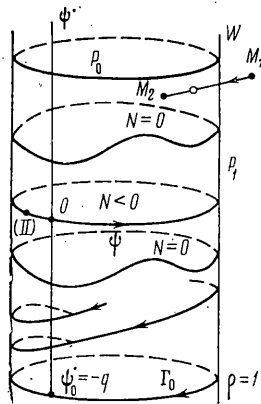
$$\delta\psi' = -q = \text{const} \quad (1.4)$$

а N и T определяются из выражений (1.2) при $\psi' = -q/\delta$, $\psi'' = 0$ и должны удовлетворять соотношению $|T| < \mu N$.

Поскольку при обкате $\psi' = -R\omega_0/\delta$ и, как правило, $R \gg \delta$, то из выражений (1.2) видно, что нагрузки на подшипник могут достигать огромных значений, что может привести к деформации соприкасаемых деталей или



Фиг. 1



Фиг. 2

к их разрушению. Рассматриваемая модель не будет в этом случае соответствовать действительности, поэтому в дальнейшем имеет смысл рассматривать взаимодействие ротора с подшипником до выхода на обкат. В силу сказанного ниже будем полагать $V > 0$.

Введем безразмерные величины, связанные с размерными соотношениями

$$t^\circ = t\sqrt{c/m}, \quad h^\circ = h/\sqrt{cm}, \quad N^\circ = N/\delta c, \quad T^\circ = T/\delta c, \\ f^\circ = f/\delta c, \quad \rho^\circ = \rho/\delta, \quad \psi^\circ = \psi\sqrt{m/c}, \quad \omega_0^\circ = \omega_0\sqrt{m/c}, \quad R^\circ = R/\delta$$

Градус в дальнейшем опустим. Выпишем отдельно уравнения для различных типов движения:

движения ротора в пределах зазора ($0 \leq \rho < 1$):

$$\rho'' + h\rho' - \rho(\psi'^2 - 1) - f \cos \psi = 0, \quad \rho\psi'' + (2\rho' + h\rho)\psi' + f \sin \psi = 0 \quad (1.5)$$

ударное взаимодействие ротора с подшипником

$$\rho'^+ = -k\rho'^-, \quad \psi'^+ = \psi'^- - \mu(1+k)\rho'^- \quad (1.6)$$

скольжение ротора по поверхности подшипника ($V \neq 0$):

$$\psi'' + h\psi' + f \sin \psi = -\mu N, \quad N = \psi'^2 - 1 + f \cos \psi \geq 0 \quad (1.7)$$

2. Фазовое пространство рассматриваемой динамической системы (1.5)–(1.7) четырехмерно в координатах ρ, ρ', ψ, ψ' и представляет собой область R ($0 \leq \rho \leq 1, -\infty < \rho' < \infty, -\pi \leq \psi \leq \pi, -\infty < \psi' < \infty$), ограниченную гиперповерхностью $Q(\rho=1)$. Свободным движениям ротора в пределах зазора соответствует движение изображающей точки внутри R . Поверхность

Q разделяется на область $P_1 (\rho' > 0)$ прихода изображающей точки на эту поверхность и область $P_0 (\rho' < 0)$ ухода с нее изображающей точки.

Удару соответствует скачок изображающей точки из P_1 в P_0 ($M_1 \rightarrow M_2$, фиг. 2), т. е. $M_2 = SM_1$, где S — точечное отображение области P_1 в область P_0 , задаваемое формулами (1.6). Если поставить в соответствие уравнениям (1.5) точечное преобразование T , переводящее изображающую точку из P_0 в P_1 , то преобразование ST будет определять точечное отображение области P_0 в себя, т. е. исследование движений ротора с ударами о подшипник сводится к исследованию точечного отображения ST . Безотрывным движениям ротора (1.7) соответствует движение изображающей точки по поверхности цилиндра $W (\rho' = 0, \rho = 1, -\pi \leq \psi \leq \pi, -\infty < \psi' < \infty)$ при выполнении условия $N > 0$. Поверхность W безотрывных движений разделяет области P_1 и P_0 .

Таким образом, исследование свободных движений сводится к рассмотрению движения изображающей точки фазового пространства внутри четырехмерной области R , исследование безотрывных движений — к исследованию движения изображающей точки по поверхности цилиндра W , а исследование движений с ударами — к исследованию точечного отображения трехмерной области P_0 в себя.

3. Исследование фазового пространства начнем с нахождения стационарных состояний изучаемой динамической системы.

Состояние равновесия (I) системы (1.5) есть $\rho_0 = f, \psi_0 = \psi' = \rho' = 0$. Оно соответствует невозмущенному вращению ротора внутри зазора при $f < 1$, т. е. если сила не смещает ротор до стенки подшипника. Состояние равновесия (II) системы (1.7):

$$\rho_0 = 1, \psi_0 = \arcsin(\mu/\sqrt{1+\mu^2}) - \arcsin(\mu/\sqrt{1+\mu^2}), \rho' = \psi' = 0$$

Физически оно соответствует постоянному контакту ротора с подшипником при отсутствии прецессии с нормальной нагрузкой

$$N_0 = [-1 + \sqrt{f^2(1+\mu^2) - \mu^2}] / (1+\mu^2)$$

Раскрывая условие $N_0 > 0$ существования этого состояния, получим $f > 1$. Это означает, что наличие состояния (I) при свободном движении исключает возможность существования состояния равновесия (II) с постоянным контактом ротора и подшипника и наоборот. Легко доказывается, что если эти состояния существуют, то они устойчивы.

Стационарному состоянию обката ($\rho_0 = 1, \psi_0 = -q, \rho' = 0$) в фазовом пространстве соответствует устойчивый предельный цикл Γ_0 , охватывающий цилиндр W (фиг. 2). Следовательно, поскольку в фазовом пространстве существует два устойчивых стационарных состояния: состояние равновесия (I) или (II) в зависимости от величины силы f и предельный цикл Γ_0 , то должен существовать неустойчивый предельный цикл Γ [3], через который проходит сепаратрисная поверхность, разделяющая фазовое пространство на области притяжения к устойчивым стационарным состояниям. При определенных соотношениях между параметрами предельный цикл Γ лежит целиком в области безотрывных движений. В этом случае он приближенно может быть описан аналитическим выражением

$$\psi' \approx A [(1 - 2f \sin(\psi + \alpha)) / A \sqrt{A^2 + h^2 + 4\mu^2}]^{1/2} \quad (3.1)$$

$$\alpha = \arcsin \mu - \arcsin(A/\sqrt{h^2 + 4\mu^2}), \quad A = h/2\mu + \sqrt{(h/2\mu)^2 + 1}$$

Выражение (3.1) с достаточной степенью точности удовлетворяет уравнениям (1.7) при выполнении условия

$$6f\sqrt{1+\mu^2} \leq A\sqrt{A^2+h^2+4\mu^2}$$

Это условие означает, что неустойчивый предельный цикл Γ , соответствующий безотрывному стационарному скольжению, существует, если сила f и коэффициент сухого трения μ достаточно малы, а внешнее демпфирование h достаточно большое, т. е. когда реализуется состояние равновесия (I). На фиг. 3 дана развёртка поверхности W безотрывных движений для этого случая.

При изменении параметров (например уменьшении h или увеличении μ) кривая Γ приближается к кривой $N=0$, касается и пересекает ее, т. е. цикл Γ уже не охватывает цилиндр W . В этом случае появляется стационарное движение нового типа, которое состоит из безотрывного движения, свободного движения ротора в пределах зазора и движения с ударами ротора о подшипник.

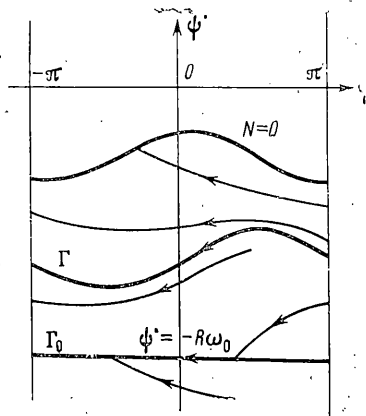
На фиг. 4 изображено это стационарное движение в пространстве конфигураций. На участке AB — безотрывное скольжение ротора по подшипнику, на участке BC — движение в пределах зазора, в точках C, C_1, C_2 и так далее — удары. Совершив бесконечное число ударов за конечное время¹, ротор приходит снова в точку A и переходит в безотрывное скольжение. Предельный цикл, соответствующий этому сложному периодическому движению, находился с помощью ЭВМ М-222 и изображен на фиг. 5 в проекции на плоскость W . Начальные условия для его нахождения выбирались на плоскости W при $\psi=0$ и последовательными приближениями находилась точка A_0 , соответствующая выходу на предельный цикл.

Стартовав из A_0 , изображающая точка движется по плоскости W безотрывных движений до точки A_1 , затем движется внутри фазового пространства до точки A_2 , отрезок прямой A_2A_3 соответствует удару, из точки A_3 изображающая точка идет внутрь фазового пространства и т. д.

В A_4 изображающая точка² снова приходит на поверхность W безотрывных движений. Если начать движение из точек A_1 или A_4 в «обратном» времени, получим кривую $\Gamma'(A_1A_4A_0A_1)$. Из любой точки этой кривой изображающая точка выходит на предельный цикл.

Через неустойчивый предельный цикл проходит сепаратрисная поверхность, разделяющая области притяжения к устойчивым стационарным состояниям. В случае, когда предельный цикл Γ полностью охватывает цилиндр W (фиг. 3), для каждого угла в трехмерном фазовом пространстве ρ, ρ', ψ получается такая же качественная картина сепаратрисной поверхности, как и при $f=0$ [1]. От значений угла ψ на предельном цикле зависят лишь размеры трехмерного сечения сепаратрисной поверхности. Если предельный цикл имеет вид, представленный на фиг. 5, то изобразить графически сепаратрисную поверхность из-за ее сложности и многомерности фазового пространства представляется затруднительным.

Приход изображающей точки к стационарным состояниям зависит от ее начального расположения в фазовом пространстве. Если изображающая

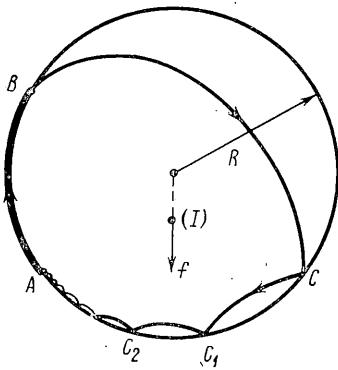


Фиг. 3

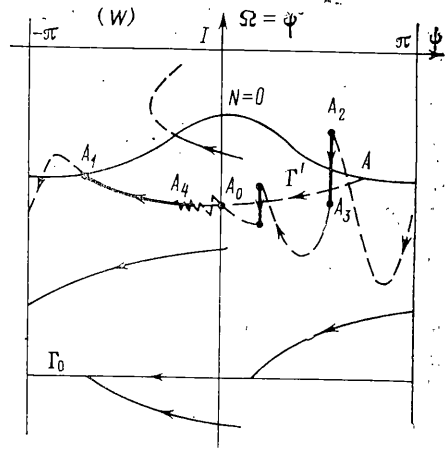
¹ Исследуя отображение ST вблизи двумерного многообразия W при начальных условиях $|\rho_0| \ll 1, \psi_0^2 - 1 + f \cos \psi_0 \gg h |\rho_0|$ [1], легко показать, что изображающая точка после бесконечного числа переходов из P_0 в P_1 и обратно за конечное время приходит на поверхность W безотрывных движений.

² При счете на ЭВМ точка A_4 , в которой кончается бесконечноударный процесс, находилась из условия, что величина нормальной составляющей скорости ротора ($|\rho'|$) меньше малой заданной величины.

точка находится внутри сепаратрисной поверхности, то она, совершив конечное число переходов из P_0 в P_1 , приходит к состоянию равновесия (I) или, совершив бесконечное число переходов из P_0 в P_1 , оказывается на плоскости W безотрывных движений и затем идет к состоянию невозмущенного вращения. Если изображающая точка располагается вне сепаратрисной поверхности, то после бесконечного числа переходов из P_0 в P_1 за конечное время она приходит на плоскость W и затем идет к стационарному состоянию обката Γ_0 , что соответствует аварийному режиму работы вращающегося вала. При необходимости можно любое другое сечение фа-



Фиг. 4



Фиг. 5

зового пространства (кроме приведенной поверхности W) разбить на области различных типов движений и прихода изображающей точки к стационарным состояниям.

Авторы благодарны Г. Г. Денисову за обсуждение результатов работы.

Поступила 16 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисов Г. Г., Неймарк Ю. И., Сандалов В. М., Цветков Ю. В. Об обкате ротора по жесткому подшипнику. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 6.
2. Олимпиев В. И. Об обкатке неуравновешенного гибкого ротора по статору. Машиноведение, 1976, № 1.
3. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1972.