

ПОСТРОЕНИЕ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ

В. М. МАМАЛЫГА

(Москва)

Рассматривается оптимальное по быстродействию управление скоростью перемещения точки подвеса маятника вдоль горизонтальной прямой, обеспечивающее его перемещение на заданное расстояние и полное гашение колебаний. На скорость точки подвеса накладывается ограничение в виде неравенства общего вида.

Показано, что аналогичная по постановке задача возникает при изучении оптимальных переходных процессов в управляемых объектах типа регуляторов, состоящих из последовательно включенных консервативного и интегрирующего звеньев.

Ранее вопрос об оптимальном переводе системы из одного равновесного состояния в другое был исследован в работах [1-4]. В случае, когда требуется перевести систему с симметричным ограничением на управление из произвольного начального состояния в состояние покоя, существует довольно сложный численный итерационный метод поиска оптимального управления [5-7]. Авторы работы [8] дали математическое описание фазовых траекторий и тем самым регуляризовали предложенный в [5-7] итерационный метод. Однако даже после проделанных в методе упрощений [8] для каждого набора начальных значений требуется проводить весьма трудоемкие вычисления и до решения исходной задачи трудно судить о продолжительности оптимального процесса. В работах [9, 10] дан способ построения поверхностей переключения в задаче синтеза для линейного дискретного объекта третьего порядка с симметричным ограничением на управление. Предложенный в этих работах способ заключается в разбиении заданной области параметров на определенные подобласти и соответствующем математическом описании по индукции поверхностей переключения в них. Работы [11] посвящены обоснованию и реализации предельного перехода от дискретной схемы [9, 10] к непрерывной. В работе [12] при некоторых значениях параметров исследована аналогичная по постановке задача.

В данной работе при ограничении на управление в виде неравенства общего вида предложен другой метод построения синтеза для системы третьего порядка с двумя чисто мнимыми корнями. Приводятся соотношения, которые с точностью до периода колебаний дают оценку времени оптимального процесса, что позволяет до решения задачи синтеза судить о его длительности. Поверхности переключения задаются в параметрическом виде. Аналитически рассчитан простейший квазиоптимальный режим управления, максимальное отличие которого по функционалу от оптимального процесса не превосходит периода колебаний. Предложен способ коррекции движения для данной системы.

1. Рассматривается управляемая система в виде маятника, точка подвеса M которого может перемещаться вдоль горизонтальной прямой OX со скоростью $V(t)$ (фиг. 1). На значения $V(t)$ наложено ограничение

$$-V_1 \leq V(t) \leq V_2 \quad (V_1 \geq 0, V_2 > 0) \quad (1.1)$$

в котором V_1, V_2 — заданные константы. Обозначим через Φ, L, X, g соответственно угол отклонения маятника от вертикали, длину его подвески, координату точки M на оси OX , ускорение силы тяжести. Тогда уравнения движения с точностью до $O(\Phi^2)$ примут вид [2]:

$$L\Phi'' + g\Phi = X'', \quad X' = V \quad (1.2)$$

Здесь точки означают дифференцирование по времени t .

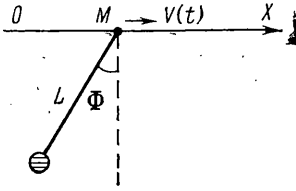
Формулируемая задача заключается в отыскании функции $V(t)$, удовлетворяющей условию (1.1) и переводящей систему (1.2) из начального состояния

$$\Phi(0) = \Phi_0; \quad \Phi'(0) = \Omega_0, \quad X(0) = 0, \quad X'(0) = 0 \quad (1.3)$$

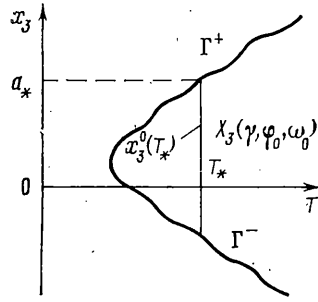
в конечное

$$\Phi(T) = 0, \quad \Phi'(T) = 0, \quad X(T) = A, \quad X'(T) = 0 \quad (1.4)$$

за минимальное время T при заданных значениях $V_1, V_2, \Phi_0, \Omega_0, A$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Введем безразмерные переменные $\varphi, \omega, x, v, t'$ и постоянные величины $\gamma, \varphi_0, \omega_0, a$ по формулам

$$\begin{aligned} \varphi &= (Lg)^{1/2} V_2^{-1} \Phi, & \omega &= L V_2^{-1} \Phi', & v &= V V_2^{-1}, & x &= g^{1/2} V_2^{-1} L^{-1/2} X \\ t' &= g^{1/2} L^{-1/2} t, & \gamma &= V_1 V_2^{-1}, & \varphi_0 &= (Lg)^{1/2} V_2^{-1} \Phi_0, \\ \omega_0 &= L V_2^{-1} \Omega_0, & a &= g^{1/2} V_2^{-1} L^{-1/2} A \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для сокращения записи штрихи далее опущены.

В указанных переменных (1.5) соотношения (1.1)–(1.4) примут вид

$$\varphi' = \omega, \quad \omega' = -\varphi + x'', \quad x' = v \quad (-\gamma \leq v \leq 1), \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad (1.6)$$

$$\omega(0) = \omega_0, \quad x(0) = v(0) = 0, \quad \varphi(T) = \omega(T) = v(T) = 0, \quad x(T) = a$$

В (1.6) присутствует ограничение на фазовую координату $-\gamma \leq v(t) \leq 1$. Однако, переходя к новым переменным [3], можно избавиться от фазового ограничения. Вводится переменная $\psi = v - \omega$. Тогда соотношения (1.6) приводятся к виду

$$\psi' = \varphi, \quad \varphi' = -\psi + v, \quad x' = v \quad (-\gamma \leq v \leq 1), \quad \psi(0) = -\omega_0 \quad (1.7)$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad x(0) = 0, \quad \psi(T) = \varphi(T) = 0, \quad x(T) = a$$

Теперь уже (1.7) является типичной задачей управления с ограничением только на управление $-\gamma \leq v(t) \leq 1$. Заметим, что систему уравнений (1.7) заменой $z = x - \varphi$ можно свести относительно z к одному уравнению третьего порядка $z''' + z' = v(t)$, описывающему поведение объекта, состоящего из последовательно включенных консервативного и интегрирующего звеньев [4].

Для удобства решения задачи быстрогодействия обратим в (1.7) время, сделав замену $t'' = T - t$, и введем переменные $x_1 = \psi, x_2 = -\varphi, x_3 = a - x$. Отсюда и из (1.7) получим

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \quad x_2' = -x_1 + v, \quad x_3' = v \quad (-\gamma \leq v \leq 1) \\ x_1(0) &= x_2(0) = x_3(0) = 0, \quad x_1(T) = -\omega_0, \quad x_2(T) = -\varphi_0, \quad x_3(T) = a \end{aligned} \quad (1.8)$$

Далее будет решена задача синтеза в постановке (1.8)...

2. Система дифференциальных уравнений (1.8) с ограничением $-\gamma \leq v \leq 1$ удовлетворяет всем условиям применимости принципа максимума Л. С. Понтригина [13, 14]. Вид оптимального управления для системы (1.8) определим, воспользовавшись принципом максимума

$$\begin{aligned} v_{\text{opt}} &= 1 \text{ при } A_0 + B_0 \sin(t + \alpha_0) > 0 \\ v_{\text{opt}} &= -\gamma \text{ при } A_0 + B_0 \sin(t + \alpha_0) < 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где A_0, B_0, α_0 — константы, зависящие от $\varphi_0, \omega_0, \gamma, a$. Для системы уравнений (1.8) выполнено условие общности положения [13], теоремы существования и единственности оптимального управления, а принцип максимума здесь является необходимым и достаточным условием оптимальности.

Обозначим через $V_{T, \gamma}$ множество всех точек в пространстве состояний (x_1, x_2, x_3) , из которых возможно по траекториям системы (1.8) с управлением v из $-\gamma \leq v \leq 1$ попасть в нулевую точку $(0, 0, 0)$ за время $t_0 \leq T$ (параметры T, γ фиксированы). О полученном множестве $V_{T, \gamma}$ известно [13], что оно является компактным, выпуклым и из любой внутренней точки x^0 этого множества можно перейти в начало координат $(0, 0, 0)$ за время $t^0 < T$. Отсюда и из ранее сделанных утверждений относительно оптимального управления следует, что для каждой точки, лежащей на границе области достижимости $V_{T, \gamma}$, существует и притом единственное оптимальное управление v_{opt} , переводящее систему (1.8) в начало координат за время $t_{\text{opt}} = T$. Это означает, что любая спорная гиперплоскость (в данном случае касательная плоскость), проведенная к множеству $V_{T, \gamma}$, имеет только одну общую с ним точку, т. е. $V_{T, \gamma}$ — строго выпуклое множество.

Зафиксируем значения параметров $\varphi_0, \omega_0, \gamma, T$ и обозначим через $x_3^0(T)$ подмножество тех точек множества $V_{T, \gamma}$, которые лежат на прямой, параллельной оси x_3 и проходящей через точку φ_0, ω_0 . Для каждого значения T при фиксированных $\varphi_0, \omega_0, \gamma$ будем получать некоторое подмножество $x_3^0(T)$. Объединение полученных таким образом подмножеств $x_3^0(T)$ обозначим через $X_3(\gamma, \varphi_0, \omega_0)$ и представим его на фиг. 2 в плоскости (x_3, T) .

В силу известных свойств [13] множества достижимости $V_{T, \gamma}$ нетрудно показать, что построенное на плоскости (x_3, T) множество X_3 будет иметь монотонную, непрерывную границу: Γ^+, Γ^- . Отсюда можно установить связь между задачей о максимуме $x_3(T)$ при фиксированном T (задача 1) и задачей о минимуме T при заданном a (задача 2). При этом, конечно, предполагается, что значения $\varphi_0, \omega_0, \gamma$, одни и те же в этих задачах. Граница Γ^+, Γ^- множества X_3 является монотонной, непрерывной. Поэтому решение первой задачи при некотором T^* будет совпадать с решением второй задачи для a^* , значение которого однозначно определяется из условия $a^* = \max[x_3(T^*)]$. Далее анализируется задача 1. В силу установленного однозначного соответствия между двумя изложенными выше задачами и единственности их решения вид оптимального управления для задачи 1 также задается соотношением (2.1).

3. Перейдем к определению для задачи 1 оптимальных законов движения в (1.8) с $T = T_s = 2\pi s; s = 1, 2, \dots$. Обозначим соответственно через m и t_i число ненулевых интервалов постоянства v_{opt} и их длительности. Из соотношения (2.1) вытекает условие периодичности

$$t_i + t_{i+1} = 2\pi \quad (i=2, 3, \dots, m-2) \quad (3.1)$$

Запишем решение уравнений (1.8) в виде свертки и учтем краевые условия (1.8) в моменты $t=0$, $t=T$. В результате получим

$$-\omega_0 = \int_0^T v(\xi) \sin(T-\xi) d\xi, \quad x_3(T) = \int_0^T v(\xi) d\xi, \quad (3.2)$$

$$-\varphi_0 = \int_0^T v(\xi) \cos(T-\xi) d\xi$$

Исследуем закон управления (2.1) с четным числом m интервалов знакопостоянства v при $T=T_s$, т. е. режим с нечетным количеством точек переключения $n=m-1=2s-1$ (два переключения в моменты $t=0$ и $t=T_s$ не включены в число n).

Пусть на первом участке ($0 < t < t_1$) будем иметь $v = \frac{1}{2}[1 - \gamma + (-1)^{i+1}(1 + \gamma)]$, где $i=0, 1$. Подставляя v_{opt} из (2.1) в (3.2) и учитывая очевидные соотношения $t_1=t_s$, $t_2=t_m$ при $T=T_s=2\pi s$, а также (3.1), приходим к равенствам

$$(-1)^{i+1}\omega_0 = (1 + \gamma)s(1 - \cos t_s), \quad (-1)^{i+2}\varphi_0 = (1 + \gamma)s \sin t_s \quad (3.3)$$

$$x_3(T_s) = -2\pi\gamma s + (1 + \gamma)st_{i+2} \quad (i=0, 1)$$

Из (3.3) вытекает, что рассматриваемый режим управления можно реализовать, если выполнено соотношение

$$[\omega_0 + (-1)^i s(1 + \gamma)]^2 + \varphi_0^2 = (1 + \gamma)^2 s^2 \quad (3.4)$$

Теперь получим соотношения, аналогичные (3.3), с нечетным числом l интервалов знакопостоянства $v(t)$ при заданном $T=T_s$. Здесь число точек переключения $k=l-1=2s$ четно. Рассмотрим режим управления с $v = \frac{1}{2}[1 - \gamma + (-1)^{i+1}(1 + \gamma)]$, где $i=0, 1$ на интервале $0 < t < t_1$. Подставляя выражение (2.1) для v_{opt} в (3.2) и учитывая соотношения $t_1+t_2+t_i=2\pi$, (3.1), приходим к системе уравнений

$$(-1)^{i+1}\omega_0 = 2s(1 + \gamma) \sin(t_2/2) \sin(t_1+t_2/2) \quad (3.5)$$

$$x_3(T_s) = -2\pi\gamma s + (1 + \gamma)st_{i+2}$$

$$(-1)^{i+1}\varphi_0 = 2s(1 + \gamma) \sin(t_2/2) \cos(t_1+t_2/2) \quad (i=0, 1)$$

На основании соотношений (3.1), (3.3)–(3.5) определялись максимальные и минимальные значения $x_3(T_s)$ для времен $T_s=2\pi s$ ($s=1, 2, \dots$), а также соответствующие им режимы управления U_{max} , U_{min} .

Ниже без конкретных выкладок формулируются окончательные результаты исследования: указываются оптимальные управления, приводятся соотношения между параметрами задачи, для которых реализуется каждый из типов управления.

Введем следующие обозначения:

$$c = \arcsin \left[\frac{\sqrt{\varphi_0^2 + \omega_0^2}}{2s(1 + \gamma)} \right], \quad d = \arcsin \left[\frac{|\omega_0|}{\sqrt{\varphi_0^2 + \omega_0^2}} \right] \quad (3.6)$$

Тогда экстремальные значения величины $x_3(2\pi s)$ при заданных φ_0 , ω_0 , γ , T_s вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \max[x_3(2\pi s)] &= a_s^* = 2\pi s - 2(1 + \gamma)sc, \\ \min[x_3(2\pi s)] &= a_s^{**} = -2\pi\gamma s + 2(1 + \gamma)sc \end{aligned} \quad (3.7)$$

Соотношения (3.7) определяют в явном виде границу множества достижимости $V_{T, \gamma}$ для времен $T=T_s=2\pi s$. Далее управления v_0, v_1 и параметры $k=0, 1$ отвечают соответственно режимам управления с $a_s^* = \max[x_s(2\pi s)]$ и $a_s^{**} = \min[x_s(2\pi s)]$ при фиксированных значениях $\varphi_0, \omega_0, \gamma, T_s$.

Если $(-1)^{k+2}\varphi_0 \geq 0, (-1)^{k+2}\omega_0 \geq 0, 2(-1)^{k+2}\omega_0(1+\gamma)s \geq \varphi_0^2 + \omega_0^2$, то управление v_0 имеет вид ($t_0=0$):

$$v(t) = 1/2[1-\gamma + (-1)^{i+1}(1+\gamma)], \quad \sum_{j=1}^{i-1} t_j < t < \sum_{j=1}^i t_j \quad (i=1, 2, \dots, 2s+1) \quad (3.8)$$

а v_1 задается формулой

$$v(t) = 1/2[1-\gamma + (-1)^{i+2}(1+\gamma)], \quad \sum_{j=1}^{i-1} t_j < t < \sum_{j=1}^i t_j \quad (i=1, 2, \dots, 2s+1) \quad (3.9)$$

где длительности участков определяются из соотношений $t_1=2\pi-(c+d), t_2=2c, t_{2s+1}=d-c$ и

$$t_2=t_k=\dots=t_{2s}, \quad t_3=2\pi-t_2=t_5=\dots=t_{2s-1} \quad (3.10)$$

Если $(-1)^{k+2}\varphi_0 \geq 0, (-1)^{k+2}\omega_0 \geq 0, 2(-1)^{k+2}\omega_0(1+\gamma)s \leq \varphi_0^2 + \omega_0^2$, то v_0 имеет вид (3.9), а v_1 задается формулой (3.8), где длительности интервалов рассчитываются по формулам (3.10) и соотношениям $t_1=c-d, t_2=2(\pi-c), t_{2s+1}=c+d$.

Если $(-1)^{k+2}\varphi_0 \leq 0, (-1)^{k+2}\omega_0 \geq 0$, то v_0 имеет вид (3.8), а v_1 задается формулой (3.9), где длительности интервалов рассчитываются по формулам (3.10) и соотношениям $t_1=\pi-c+d, t_2=2c, t_{2s+1}=\pi-(c+d)$.

Если $(-1)^{k+2}\varphi_0 \leq 0, (-1)^{k+2}\omega_0 \leq 0$, то v_0 имеет вид (3.8), а v_1 задается формулой (3.9), где длительности интервалов рассчитываются по формулам (3.10) и соотношениям $t_1=\pi-(d+c), t_2=2c, t_{2s+1}=\pi+d-c$.

Если $(-1)^{k+2}\varphi_0 \geq 0, (-1)^{k+2}\omega_0 \leq 0, 2(-1)^{k+2}\omega_0(1+\gamma)s \geq \varphi_0^2 + \omega_0^2$, то v_0 имеет вид (3.8), а v_1 задается формулой (3.9), где длительности интервалов рассчитываются по формулам (3.10) и соотношениям $t_1=d-c, t_2=2c, t_{2s+1}=2\pi-(c+d)$.

Если $(-1)^{k+2}\varphi_0 \geq 0, (-1)^{k+2}\omega_0 \leq 0, 2(-1)^{k+2}\omega_0(1+\gamma)s \leq \varphi_0^2 + \omega_0^2$, то v_0 имеет вид (3.9), а v_1 задается формулой (3.8), где длительности интервалов рассчитываются по формулам (3.10) и соотношениям $t_1=c+d, t_2=2(\pi-c), t_{2s+1}=c-d$.

Таким образом, решение задачи по определению экстремальных значений $x_s(T)$ для моментов времени $T=T_s=2\pi s$, кратных периоду колебаний, полностью построено. Зависимости $a_s^*(x), a_s^{**}(x)$ для случаев $\gamma=2, \gamma=1, \gamma=0.5, \gamma=0$ изображены на фиг. 3-6 в плоскости (x, y) , где $x = \pi(\varphi_0^2 + \omega_0^2)^{1/2}/(1+\gamma), y=a$.

На фиг. 3-6 сплошной и пунктирной линиями показаны соответственно зависимости $a_s^*(x), a_s^{**}(x)$ с $s=1, 2, \dots$.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что для любого фиксированного значения $x_0 \leq 2\pi s$ ($s=1, 2, \dots$), при котором определены функции $a_s^*(x), a_s^{**}(x)$, имеют место соотношения

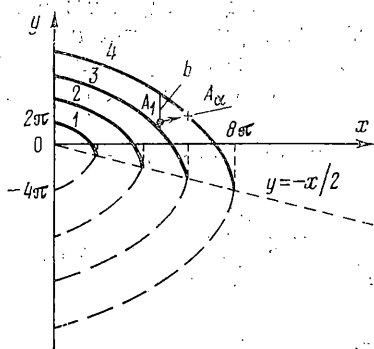
$$(3.11)$$

$$a_s^*(x_0) < a_{s+1}^*(x_0) < a_{s+2}^*(x_0) < \dots, \quad a_s^{**}(x_0) > a_{s+1}^{**}(x_0) > a_{s+2}^{**}(x_0) > \dots$$

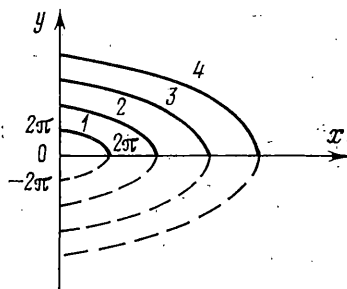
$$(a_s^*)_{x'} < 0, (a_s^*)_{xx''} < 0, (a_s^{**})_{x'} > 0, (a_s^{**})_{xx''} > 0$$

$$a_s^*(x) = a_s^{**}(x) \text{ при } x=x_* = 2\pi s, \quad a_s^*(x_*) = a_s^{**}(x_*) = \pi(1-\gamma)s$$

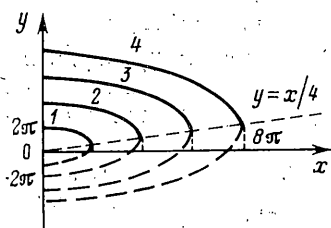
$$(a_s^{**})_{x'} = -(a_s^*)_{x'} = \infty \text{ при } x=x_* = 2\pi s, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} a_s^{**} = x/\pi \text{ при } \gamma=0$$



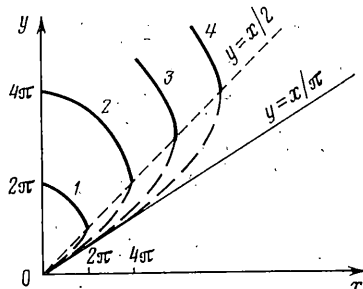
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Отсюда следует, что все точки пересечения $a_s^*(x)$ с $a_s^{**}(x)$ ($s=1, 2, \dots$) лежат на прямой $y = \frac{1}{2}(1-\gamma)x$. При $\gamma < 1$, согласно (3.11), функции $a_s^*(x) > 0$, а в случае $\gamma > 1$ имеем $a_s^{**}(x) < 0$.

Следует заметить, что для задачи 2 с ограничением $0 \leq v \leq 1$ ($\gamma=0$) справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt}[x_1^2 + x_2^2] = 2vx_2 \leq 2v\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Интегрируя эти выражения и учитывая граничные условия (1.8), приходим к

$$a \geq \sqrt{\varphi_0^2 + \omega_0^2} = x/\pi \quad (3.12)$$

Поэтому в задаче 2 ($\gamma=0$) систему (1.8) можно перевести из произвольного начального состояния φ_0, ω_0, a в конечное состояние покоя только в том случае, когда выполнено условие (3.12). Этот факт хорошо согласуется с последним соотношением в (3.11), указывающим на то, что $y = x/\pi$ является для задачи 2 временной асимптотикой с $\gamma=0$ (при $a \rightarrow x/\pi$ значение времени $T \rightarrow \infty$).

Используя полученные зависимости $a_s^*(x)$, $a_s^{**}(x)$, сформулируем утверждение, являющееся следствием установленных в п. 2 положений относительно множества достижимости $X_3(\gamma, \varphi_0, \omega_0)$. Пусть заданы значения $\varphi_0, \omega_0, a, \gamma$, при которых необходимо решить задачу 2. На плоскости (x, y) через точку A_1 , соответствующую этому набору, проведем прямую, параллельную оси y . Отрезок, образованный пересечением пря-

мой с ближайшими (верхней и нижней относительно A_1) экстремальными кривыми, обозначим через b (фиг. 3).

Если b находится между a_s^* и a_{s+1}^* или между a_s^{**} и a_{s+1}^{**} , то в силу доказанной в п. 2 монотонной зависимости $a(T)$ ($\varphi_0, \omega_0, \gamma$ фиксированы) для времени оптимального быстрогодействия T задачи 2 будет выполняться соотношение $E(T/(2\pi)) = s$.

Если же b лежит между кривыми a_s^* и a_s^{**} , то $E(T/(2\pi)) = s - 1$.

Итак, зная только ограничение на управление $-\gamma \leq v \leq 1$, можно для произвольных начальных данных φ_0, ω_0, a задачи 2 указать с точностью до периода ее время оптимального быстрогодействия T . Для этого достаточно построить на плоскости (x, y) аналитические зависимости $a_s^*(x)$, $a_s^{**}(x)$, заданные формулами (3.6), (3.7), и определить по начальным условиям местоположение точки A_1 . Далее значение $E(T/(2\pi))$ находим, исходя из сформулированных выше двух утверждений.

Остановимся здесь на построении квазиоптимального режима управления. Этот закон довольно простой и не требует сложных вычислительных процедур, хотя и дает некоторый проигрыш по времени, максимальное значение которого не превышает периода колебания 2π . Пусть в задаче 2 с параметрами $\varphi_0, \omega_0, a, \gamma$ и ограничением $-\gamma \leq v \leq 1$ выяснено, что при оптимальном режиме $E(T/(2\pi)) = n$. Укажем режим управления, для которого время перевода из заданного начального состояния в состояние покоя равно $T_{n+1} = 2\pi(n+1)$.

Рассмотрим ограничения вида

$$-\alpha V_1 \leq V(t) \leq \alpha V_2, \quad \alpha \leq 1 \quad (3.13)$$

В случае $\alpha = 1$ условие (3.13) совпадает с (1.1). Очевидны следующие соотношения, которые могут быть получены аналогично п. 1 после перехода к безразмерным переменным (1.1) — (1.4), (3.13)

$$\varphi_1 = \varphi_0 \alpha^{-1}, \quad \omega_1 = \omega_0 \alpha^{-1}, \quad a_1 = a \alpha^{-1}, \quad \gamma_1 = \gamma \quad (3.14)$$

Здесь $\varphi_1, \omega_1, a_1, \gamma_1$ — аналоги $\varphi_0, \omega_0, a, \gamma$ задачи 2 с ограничением (3.13). На плоскости (x, y) значениям $\varphi_1(\alpha), \omega_1(\alpha), a_1(\alpha), \gamma$ соответствует точка A_α . При $\alpha = 1$ имеем $A_1(x_0, y_0)$, для которой $\varphi_1 = \varphi_0, \omega_1 = \omega_0, a_1 = a$ (фиг. 3). Все остальные точки A_α ($\alpha < 1$) расположены на прямой $yx_0 = xy_0, y \geq y_0$. Отсюда нетрудно установить то значение α^* , при котором оптимальное время перевода системы из $\varphi_1(\alpha^*), \omega_1(\alpha^*), a_1(\alpha^*)$ в состояние покоя равно $T_{n+1} = 2\pi(n+1)$. Для вычисления α^* нужно на плоскости (x, y) найти ближайшую точку пересечения (x^*, y^*) прямой $yx_0 = xy_0, y \geq y_0$ с экстремальной кривой. Затем из соотношения $\alpha^* = x_0/x^*$ определить искомое значение α^* и подставить в (3.14). По найденным из (3.14) значениям $\varphi_1(\alpha^*), \omega_1(\alpha^*), a_1(\alpha^*), \gamma$ и соотношениям, приведенным для определения оптимальных режимов с $T_s = 2\pi s$, рассчитывается режим управления с временем $T_{n+1} = 2\pi(n+1)$.

4. Укажем способ построения поверхности переключения в рассматриваемой задаче синтеза (1.8). Для этого воспользуемся приведенными в п. 3 оптимальными режимами управления с $T_s = 2\pi s$, соотношениями типа (3.2) и выпишем значения x_1, x_2, x_3 в моменты переключения

$$t_r = t_1 + 2\pi r, \quad r = 0, 1, \dots, s-1; \quad t_q = t_1 + t_2 + 2\pi q, \quad q = 0, 1, \dots, s-1 \quad (4.1)$$

$$x_1(t_r) = 1 - \cos t_1 + r(1+\gamma)(1 - \cos t_2), \quad x_2(t_r) = \sin t_1 - r(1+\gamma) \sin t_2$$

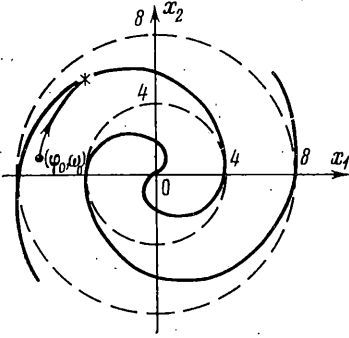
$$x_3(t_r) = t_1 + 2\pi r - (1+\gamma)rt_2, \quad v(t) = 1 \quad \text{при } 0 < t < t_1$$

$$x_1(t_q) = 1 - \cos(t_1 + t_2) - (1+\gamma)(1+q)(1 - \cos t_2),$$

$$x_2(t_q) = \sin(t_1 + t_2) - (1+\gamma)(1+q) \sin t_2$$

$$\begin{aligned}
 x_3(t_q) &= t_1 + t_2 + 2\pi q - (1+\gamma)(1+q)t_2, & v(t) &= 1 \quad \text{при } 0 < t < t_1 \\
 x_1(t_r) &= -\gamma(1-\cos t_1) - (1+\gamma)r(1-\cos t_2), & x_2(t_r) &= -\gamma \sin t_1 + (1+\gamma)r \sin t_2 \\
 x_3(t_r) &= -\gamma t_1 - 2\pi\gamma r + (1+\gamma)rt_2, & v(t) &= -\gamma \quad \text{при } 0 < t < t_1 \\
 x_1(t_q) &= -\gamma[1-\cos(t_1+t_2)] + (1+\gamma)(1+q)(1-\cos t_2), \\
 x_2(t_q) &= -\gamma \sin(t_1+t_2) + (1+\gamma)(1+q) \sin t_2 \\
 x_3(t_q) &= -\gamma(t_1+t_2) - 2\pi\gamma q + (1+\gamma)(1+q)t_2, & v(t) &= -\gamma \quad \text{при } 0 < t < t_1
 \end{aligned}$$

Подставляя в каждое из соотношений (4.1) соответствующее значение t_1, t_2 из п. 3, получим семейство параметрически заданных поверхностей переключения в виде $x_1=x_1(\varphi_0, \omega_0)$, $x_2=x_2(\varphi_0, \omega_0)$, $x_3=x_3(\varphi_0, \omega_0)$. Параметрами здесь служат φ_0, ω_0 . Поверхности могут быть выписаны и в явном виде через фазовое состояние после исключения параметров φ_0, ω_0 . Получающиеся при этом выражения поверхностей довольно громоздки и поэтому здесь не приводятся.



Фиг. 7

5. При перемещении маятника на заданное расстояние a в конечный момент $t=T_1$ может оказаться, что $x_3(T_1)=a$, а значения $x_1(T_1) \neq 0$, $x_2(T_1) \neq 0$. Поэтому в конце необходимо произвести коррекцию движения с целью гашения колебаний при условии, что по окончании коррекции $x_3=a$ останется прежним.

Для построения режима коррекции воспользуемся известными результатами [13, 14] о переводе системы

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_1 + v \quad (5.1)$$

из произвольного состояния $x_1(0)=\varphi_0, x_2(0)=\omega_0$ в состояние покоя $x_1(T)=x_2(T)=0$ за минимальное время. Пусть ограничение на v имеет вид $-1 \leq v \leq 1$. На плоскости (x_1, x_2) , используя линии переключения [13, 14] для (5.1), геометрическим путем определяется то множество точек, из которых оптимальное по быстродействию управление переводит систему (5.1) в начало координат и при этом в конце движения будет

$$\int_0^T v(\xi) d\xi = 0 \quad (5.2)$$

Было установлено, что множества M_1, M_2, M_3 таких точек x_1^*, x_2^* описываются соотношениями (фиг. 7)

$$[(x_1^*)^2 + (x_2^*)^2]^{1/2} = 4k \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$$x_1^* = -2(2k+1 - \cos \alpha_1) \cos \alpha_1 \quad (0 \leq \alpha_1 \leq \pi)$$

$$x_2^* = -2(2k+1 - \cos \alpha_1) \sin \alpha_1$$

$$x_1^* = 2(2k+1 - \cos \alpha_2) \cos \alpha_2 \quad (0 \leq \alpha_2 \leq \pi)$$

$$x_2^* = 2(2k+1 - \cos \alpha_2) \sin \alpha_2$$

Здесь множества M_2, M_3 заданы в виде двухпараметрических семейств, в которых параметрами являются α_1, α_2 и целочисленные значения $k=0, 1, \dots$. Следует отметить, что для точек множества M_1 с заданным k число переключений при оптимальном режиме в (5.1) равно $2k$, а для M_2, M_3 — соответственно $2k+1$.

Предлагаемый закон коррекции состоит в том, что при заданных Φ_0, ω_0 управление v полагается равным нулю до тех пор, пока в момент $t=t_*$ значения $x_1(t_*)$ и $x_2(t_*)$ не попадут на одно из множеств M_1, M_2, M_3 (фиг. 7). Для $t \geq t_*$ в качестве управления v берут известное [13, 14] оптимальное управление системой (5.1) с $x_1(0) = x_1(t_*)$, $x_2(0) = x_2(t_*)$. Очевидно, при этом всегда будет выполнено условие (5.2).

Автор благодарит Ф. Л. Черноусько и Б. Н. Соколова за ценные замечания и полезное обсуждение результатов работы.

Поступила 18 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов Н. Н., Новосельцева Ж. А. Оптимальные переходные процессы в системе с прогнозированием. Техн. кибернетика, 1964, № 1.
2. Черноусько Ф. Л. Оптимальное перемещение маятника. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
3. Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л. Об оптимальном перемещении висящего груза. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4.
4. Мамалыга В. М. Об оптимальном управлении одной колебательной системой. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3.
5. Flügge—Lotz I., Mih Yin. The optimum response of second-order velocity-controlled system with contactor control. Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Engng. 1964, vol. 83, No. 1.
6. Flügge—Lotz I., Titus H. A. The optimum response of full third-order systems with contactor control. Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Engng, 1962, vol. 84, No. 4.
7. Флюгге—Лотц И., Тигус Г. Оптимальное и квазиоптимальное управление системами третьего и четвертого порядка. В сб.: Оптимальные системы. Статистические методы. М., «Наука», 1965.
8. Михайлов Н. Н., Новосельцева Ж. А. Оптимальные процессы в системе третьего порядка с комплексными полюсами. Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 9.
9. Мороз А. И. Синтез оптимального по быстродействию управления для линейного дискретного объекта третьего порядка, I—III. Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 2, 3, 8.
10. Мороз А. И. К задаче синтеза оптимального по времени управления для дискретных объектов. Автоматика и телемеханика, 1966, т. 27, № 11.
11. Мороз А. И. Синтез оптимального по времени управления для линейных систем третьего порядка, I—III. Автоматика и телемеханика, 1969, т. 30, № 5, 7, 9.
12. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
13. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М., «Наука», 1969.
14. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.