

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОРТОГОНАЛЬНОГО МОМЕНТА

Б. А. СМОЛЬНИКОВ

(Ленинград)

В [1] было показано, что свободное твердое тело, находящееся под действием силового момента, параллельного вектору его кинетического момента, совершает движение, геометрически подобное эйлерову движению, но отличающееся от него характером своего развития во времени. Сам вектор кинетического момента тела меняется при этом лишь по величине, сохраняя неизменным свое направление в инерциальном пространстве.

В данной работе рассматривается другой режим управления вектором кинетического момента твердого тела, когда неизменным остается его величина, но меняется направление в пространстве. Подобные режимы движения представляют практический интерес в таких задачах, как поворот оси вращающегося твердого тела без ликвидации его вращения, переориентация свободного гиростата и т. д.

1. Уравнения вращательного движения твердого тела под действием момента, создаваемого реактивными двигателями, в проекции на его главные центральные оси инерции $1, 2, 3$ имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 + a_1 \omega_2 \omega_3 &= m_1 \\ A_2 \dot{\omega}_2 + a_2 \omega_3 \omega_1 &= m_2 \\ A_3 \dot{\omega}_3 + a_3 \omega_1 \omega_2 &= m_3 \end{aligned} \quad (1.1)$$
$$a_1 = A_3 - A_2, \quad a_2 = A_1 - A_3, \quad a_3 = A_2 - A_1, \quad A_1 \leq A_2 \leq A_3$$

причем A_k — моменты инерции тела относительно осей $1, 2, 3$; ω_k — проекции вектора абсолютной угловой скорости тела на эти оси, а m_k — компоненты управляющего силового момента.

Подчиним этот момент \mathbf{m} такому требованию, чтобы он в процессе поворота тела не изменял величины вектора кинетического момента \mathbf{L} и кинетической энергии $h = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}$. Для этого, как следует из векторного уравнения движения

$$\mathbf{L} \dot{+} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{m} \quad (1.2)$$

достаточно выполнения условий

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{L} = 0, \quad \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (1.3)$$

которые означают существование интегралов

$$A_1^2 \omega_1^2 + A_2^2 \omega_2^2 + A_3^2 \omega_3^2 = L^2, \quad A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 + A_3 \omega_3^2 = h \quad (1.4)$$

Наличие этих интегралов показывает, что по отношению к вектору \mathbf{L} тело совершает движение, геометрически подобное свободному эйлерову движению, однако развитие этого движения во времени будет иным.

Условия (1.3) означают ортогональность вектора \mathbf{m} векторам \mathbf{L} и $\boldsymbol{\omega}$, что позволяет представить его в виде

$$\mathbf{m} = m(t) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}) / |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}| \quad (1.5)$$

Преобразуя выражение

$$|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}| = \sqrt{\mathbf{L} \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{L} \times \boldsymbol{\omega})]} = \sqrt{L^2 \omega^2 - h^2}$$

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$$

запишем уравнение движения (1.2) в виде

$$\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} (1 - m(t) / \sqrt{L^2 \omega^2 - h^2}) = 0 \quad (1.6)$$

Нетрудно видеть, что перейдя к новой независимой переменной τ :

$$d\tau/dt = 1 - m(t) / \sqrt{L^2 \omega^2 - h^2} = f(t, \tau) \quad (1.7)$$

можно записать уравнение (1.6) в форме системы уравнений, описывающих свободное эйлерово движение

$$\begin{aligned} A_1 \omega_1' + a_1 \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ A_2 \omega_2' + a_2 \omega_3 \omega_1 &= 0 \\ A_3 \omega_3' + a_3 \omega_1 \omega_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Решения этой системы $\omega_1(\tau)$, $\omega_2(\tau)$, $\omega_3(\tau)$ выражаются через эллиптические функции от τ . Остается проинтегрировать уравнение (1.7), где следует сначала выразить $\omega^2 = \omega^2(\tau)$, потом построить зависимость $\omega_h(t)$. Интегрирование уравнения (1.7) при $m(t) = \text{const}$ и при $\omega^2(\tau) = \text{const}$ выполнить несложно. В частности, оба эти условия имеют место при следующем выборе величины ортогонального момента:

$$m = \sqrt{L^2 \omega^2 - h^2} \quad (1.9)$$

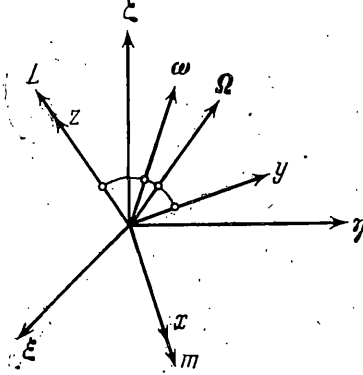
Действительно, уравнение (1.6) тогда принимает вид $\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = 0$, и его решением будет $\omega_h = \text{const}$. Тело совершает при этом чистое вращение вокруг неподвижной в пространстве оси (вынужденное перманентное вращение), причем вектор \mathbf{L} описывает конус вокруг вектора $\boldsymbol{\omega}$, образуя с ним постоянный угол ϑ

$$\sin \vartheta = m/L\omega, \quad \cos \vartheta = h/L\omega \quad (1.10)$$

Отсюда следует простой способ поворота вектора \mathbf{L} с помощью постоянного по величине ортогонального момента. При отсутствии момента вектор $\boldsymbol{\omega}$ описывает некоторую коническую поверхность вокруг неподвижного в пространстве вектора \mathbf{L} . Если в какой-то момент времени приложить ортогональный момент \mathbf{m} , равный (1.9), то тело мгновенно перейдет в режим вынужденного перманентного вращения вокруг ставшего неподвижным вектора $\boldsymbol{\omega}$, в результате чего поворачиваться начнет уже вектор \mathbf{L} . Результирующий угол поворота вектора \mathbf{L} в пространстве будет определяться длительностью действия момента \mathbf{m} и значением угла ϑ .

Оценим устойчивость такого режима перманентного вращения твердого тела. Ограничившись построением необходимых условий устойчивости, заметим, что при составлении уравнений возмущенного движения здесь возникает неоднозначность в определении вектора \mathbf{m} в возмущенном движении. Действительно, вектор \mathbf{m} может выражаться формулой (1.5) либо через возмущенные значения векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{L} , либо через невозмущенные значения. Первый способ формирования момента не меняет общего характера перманентного вращения, несколько изменяя лишь его параметры

(скорость вращения ω и угол θ). Второй способ является более реальным в практическом отношении и менее тривиален в теоретическом плане. Полагая поэтому в системе (1.1) $\Delta m_k = 0$, получим систему уравнений возмущенного движения



Фиг. 1

$$\begin{aligned} A_1 \Delta \omega_1 + a_1 (\omega_2 \Delta \omega_3 + \omega_3 \Delta \omega_2) &= 0 \\ A_2 \Delta \omega_2 + a_2 (\omega_3 \Delta \omega_1 + \omega_1 \Delta \omega_3) &= 0 \\ A_3 \Delta \omega_3 + a_3 (\omega_1 \Delta \omega_2 + \omega_2 \Delta \omega_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Характеристическое уравнение этой системы будет

$$A_1 A_2 A_3 p^3 - p (A_1 a_2 a_3 \omega_1^2 + A_2 a_3 a_1 \omega_2^2 +$$

$$+ A_3 a_1 a_2 \omega_3^2) + 2a_1 a_2 a_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3 = 0 \quad (1.12)$$

Видно, что для устойчивости перманентного вращения тела вектор ω должен лежать в одной из главных плоскостей инерции тела (с тем, чтобы $\omega_1 \omega_2 \omega_3 = 0$). При этом он может занимать произвольное положение в плоскости 1÷3 тела, а в плоскостях 1÷2 и 2÷3 его расположение ограничивается некоторыми секторами, положение которых определяется из условия отрицательности выражения в скобке.

2. Рассмотрим общий случай, когда $f(t, \tau) \neq 0$. Существование интегралов (1.4) означает, что характер движения тела по отношению к вектору L известен. Поэтому достаточно определить движение самого вектора L по отношению к неподвижным осям $\xi \eta \zeta$.

Введем в рассмотрение систему скользящих осей $x y z$, ось z которой направлена вдоль вектора L , ось x — вдоль вектора m , а ось y лежит в плоскости векторов ω и L . Обозначая абсолютную угловую скорость этих осей через Ω , запишем уравнение движения тела относительно этих осей в виде

$$L' + \Omega \times L = m \quad (2.1)$$

Проектируя это векторное уравнение на оси x и y (проекция на ось z дает тождественный нуль), получим

$$L \Omega_y = m(t), \quad L \Omega_x = 0 \quad (2.2)$$

Из этих условий следует, что вектор Ω ортогонален вектору m , т. е. лежит в плоскости векторов ω и L (фиг. 1). Чтобы определить движение осей $x y z$, необходимо найти компоненту Ω_z . Для этого воспользуемся тем, что известны абсолютная угловая скорость ω связанных осей 1, 2, 3, а также ориентация этих осей относительно скользящих осей $x y z$. Действительно, задавая взаимную ориентацию этих осей матрицей косинусов Γ , найдем последний столбец этой матрицы из очевидных соотношений

$$A_1 \omega_1 = L \gamma_{13}, \quad A_2 \omega_2 = L \gamma_{23}, \quad A_3 \omega_3 = L \gamma_{33} \quad (2.4)$$

Остальные элементы матрицы Γ можно определить посредством зависимостей между проекциями вектора ω на оси 1, 2, 3 и на оси $x y z$:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_x \gamma_{11} + \omega_y \gamma_{12} + \omega_z \gamma_{13} \\ \omega_2 &= \omega_x \gamma_{21} + \omega_y \gamma_{22} + \omega_z \gamma_{23} \\ \omega_3 &= \omega_x \gamma_{31} + \omega_y \gamma_{32} + \omega_z \gamma_{33} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где следует положить (учитывая, что $h = \omega \cdot L = L\omega_z$)

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \sqrt{L^2\omega^2 - h^2}/L, \quad \omega_z = h/L \quad (2.6)$$

Соотношения (2.5) с учетом (2.4) и (2.6) позволяют определить второй столбец матрицы Γ :

$$\gamma_{12} = \frac{\omega_1(L^2 - A_1 h)}{L\sqrt{L^2\omega^2 - h^2}}, \quad \gamma_{22} = \frac{\omega_2(L^2 - A_2 h)}{L\sqrt{L^2\omega^2 - h^2}}, \quad \gamma_{32} = \frac{\omega_3(L^2 - A_3 h)}{L\sqrt{L^2\omega^2 - h^2}} \quad (2.7)$$

после чего легко найти и первый ее столбец

$$\gamma_{11} = \frac{a_1\omega_2\omega_3}{\sqrt{L^2\omega^2 - h^2}}, \quad \gamma_{21} = \frac{a_2\omega_3\omega_1}{\sqrt{L^2\omega^2 - h^2}}, \quad \gamma_{31} = \frac{a_3\omega_1\omega_2}{\sqrt{L^2\omega^2 - h^2}} \quad (2.8)$$

Знание матрицы $\Gamma(\tau)$ позволяет найти угловую скорость \mathbf{v} вращения осей xuz относительно осей $1, 2, 3$, после чего абсолютная угловая скорость Ω осей xuz выразится суммой

$$\Omega = \omega + \mathbf{v} \quad (2.9)$$

Здесь ω — известный в осях xuz вектор, а компоненты вектора \mathbf{v} в осях xuz могут быть найдены как элементы следующей кососимметричной матрицы (дифференцирование матрицы Γ' производится по переменной τ):

$$\begin{vmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & -v_x & 0 \end{vmatrix} = \Gamma^T \Gamma' = f \Gamma^T \Gamma' = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_{11}' & \gamma_{12}' & \gamma_{13}' \\ \gamma_{21}' & \gamma_{22}' & \gamma_{23}' \\ \gamma_{31}' & \gamma_{32}' & \gamma_{33}' \end{vmatrix} f \quad (2.10)$$

Для v_z получается следующее выражение:

$$v_z = f(\gamma_{12}\gamma_{11}' + \gamma_{22}\gamma_{21}' + \gamma_{32}\gamma_{31}') \quad (2.11)$$

которое после подстановки значений (2.7), (2.8) и замены производных ω_k' их выражениями, согласно (1.8), приводится к виду

$$v_z = f \left[\frac{L}{L^2\omega^2 - h^2} \left(\frac{a_1^2}{A_1} \omega_2^2 \omega_3^2 + \frac{a_2^2}{A_2} \omega_3^2 \omega_1^2 + \frac{a_3^2}{A_3} \omega_1^2 \omega_2^2 \right) - \frac{h}{L} \right] \quad (2.12)$$

Подставляя в (2.9) это значение и значение ω_z , согласно (2.6), находим

$$\Omega_z = \frac{fL}{L^2\omega^2 - h^2} \left(\frac{a_1^2}{A_1} \omega_2^2 \omega_3^2 + \frac{a_2^2}{A_2} \omega_3^2 \omega_1^2 + \frac{a_3^2}{A_3} \omega_1^2 \omega_2^2 \right) + \frac{h}{L} (1-f) \quad (2.13)$$

Компоненты ω_k^2 могут быть выражены через ω^2 посредством интегралов (1.4) и тождества $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$:

$$\omega_1^2 = \frac{h(A_2 + A_3) - L^2 - \omega^2 A_2 A_3}{a_2 a_3}, \quad \omega_2^2 = \frac{h(A_3 + A_1) - L^2 - \omega^2 A_3 A_1}{a_3 a_1}, \quad \omega_3^2 = \frac{h(A_1 + A_2) - L^2 - \omega^2 A_1 A_2}{a_1 a_2} \quad (2.14)$$

после чего из (2.13) следует зависимость $\Omega_z(\omega^2)$. Дальнейшая задача сводится, очевидно, к определению движения системы осей xuz по найденным проекциям вектора ее абсолютной угловой скорости Ω (2.2) и (2.13). Особенно просто эта задача решается в том случае, когда тело обладает осевой

динамической симметрией. Например, для дискообразного тела, полагая

$$A_1 = A_2 < A_3, a_2 = -a_1, a_3 = 0, \varepsilon = a_1/A_1 > 0 \quad (2.15)$$

согласно (1.8), имеем (P, δ и ω_{30} — константы интегрирования)

$$\omega_3 = \omega_{30}, \omega_1 = P \cos(\varepsilon \omega_{30} \tau + \delta), \omega_2 = P \sin(\varepsilon \omega_{30} \tau + \delta) \quad (2.16)$$

Вводя в рассмотрение параметры $A = L^2/h, \mu = m/h$ ($A_2 \leq A \leq A_3$); выразим через них эти константы следующим образом:

$$P^2 = \frac{h(A_3 - A)}{A_2(A_3 - A_2)}, \quad \omega_{30}^2 = \frac{h(A - A_2)}{A_3(A_3 - A_2)} \quad (2.17)$$

$$L^2 \omega^2 - h^2 = \frac{h^2(A_3 - A)(A - A_2)}{A_2 A_3}$$

Видно, что значениям $A = A_2$ и $A = A_3$ отвечает чистое вращение тела, когда $\omega \times L = 0$.

Подставляя полученные выражения (2.16), (2.17) в (2.13), найдем

$$\Omega_z = \frac{L}{A} \left[\frac{A}{A_2} - \mu \alpha_1(A) \right], \quad \alpha_1(A) = \left[\frac{A_3(A - A_2)}{A_2(A_3 - A)} \right]^{1/2} \quad (2.18)$$

после чего определяем и полную угловую скорость Ω вращения скользящих осей

$$\Omega^2 = \Omega_y^2 + \Omega_z^2 = \frac{h}{A_2} \left[\frac{A_3 - A_2}{A_3 - A} \mu^2 - 2\mu \alpha_1(A) + \frac{A}{A_2} \right] \quad (2.19)$$

Нетрудно видеть, что при $\mu = \text{const}$ все компоненты вектора Ω также будут постоянны. Это означает, что оси x, y, z в этом случае совершают чистое вращение вокруг неподвижного в пространстве вектора Ω , причем векторы ω и L описывают вокруг него круговые конусы.

Таким образом осесимметричное твердое тело под действием постоянного ортогонального момента совершает регулярную прецессию вокруг вектора Ω , лежащего в плоскости векторов ω и L . Геометрически такое движение можно интерпретировать как качение подвижного конуса, связанного с телом по неподвижному, ось симметрии которого направлена вдоль вектора Ω . Линия контакта этих конусов совпадает с вектором ω , а касание их может быть как внутренним (при $f > 0$), так и внешним. Угловые размеры неподвижного и подвижного конусов будут определяться выражениями

$$\text{tg}(\Omega, \omega) = \frac{|\Omega \times \omega|}{\Omega \cdot \omega} = \frac{\alpha_2(A) - \mu}{1 - \mu \alpha_3(A)}$$

$$\text{tg}(\omega, \Omega) = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} / \omega_3 = 1 / \alpha_3(A) \quad (2.20)$$

$$\alpha_2(A) = \left[\frac{(A_3 - A)(A - A_2)}{A_2 A_3} \right]^{1/2}, \quad \alpha_3(A) = \left[\frac{A_2(A - A_2)}{A_3(A_3 - A)} \right]^{1/2}$$

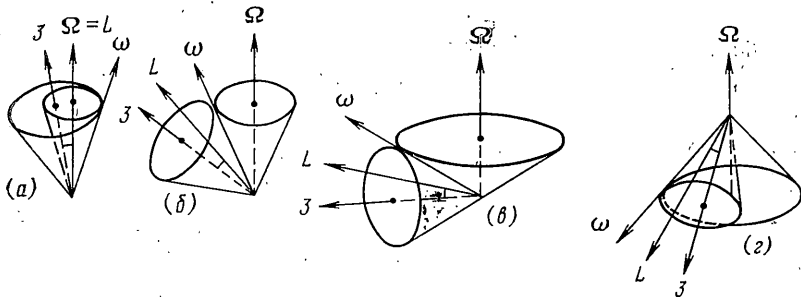
Ось симметрии \mathcal{Z} тела составляет с вектором Ω угол

$$\text{tg}(\mathcal{Z}, \Omega) = \frac{\Omega_y \gamma_{33} - \Omega_z \gamma_{32}}{\Omega_y \gamma_{32} + \Omega_z \gamma_{33}} = \frac{1}{\alpha_1(A) - \mu(A_3 - A_2)/(A_3 - A)} \quad (2.21)$$

а вектор L образует с векторами Ω и ω углы

$$\operatorname{tg}(L, \Omega) = \frac{\Omega_y}{\Omega_z} = \frac{\mu}{A/A_2 - \mu\alpha_1(A)}, \quad \operatorname{tg}(L, \omega) = \alpha_2 \quad (2.22)$$

Добавив выражение для функции $f=1-\mu/\alpha_2$, получим явную зависимость основных параметров режима вынужденной регулярной прецессии от величины приложенного ортогонального момента μ . Так, при $\mu=0$ имеем свободную эйлерову прецессию дискообразного тела ($A_1=A_2 < A_3$), которую, пользуясь терминологией [2], можно назвать перициклоидальной, так как для нее характерно внутреннее расположение неподвижного



Фиг. 2

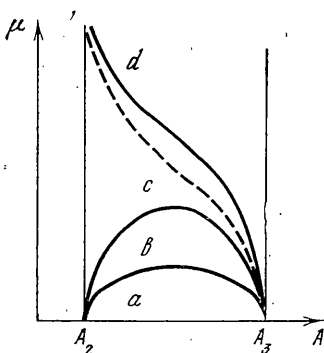
конуса по отношению к подвижному (фиг. 2, а), а ось прецессии Ω совпадает с вектором L .

Появление малого по величине ортогонального момента μ приводит, как следует из (2.20) — (2.22), к тому, что радиус неподвижного конуса становится меньше, тогда как радиус подвижного конуса и положение в этом конусе векторов ω и L не изменяется. В результате вектор L отклонится от оси прецессии и начнет совершать вокруг нее коническое движение. С ростом μ ось ω будет все более приближаться к вектору Ω , пока при $\mu=\alpha_2$ не совпадет с ней, в результате чего тело будет совершать перманентное вращение ($f=0$). Дальнейший рост μ приводит к смене знака функции f , вследствие чего неподвижный конус выходит из подвижного и прецессия тела происходит при их внешнем касании, т. е. становится эпициклоидальной (фиг. 2, б).

По достижении значения $\mu=A_3\alpha_2/(A_3-A_2)$ ось прецессии Ω становится перпендикулярной оси симметрии тела Z , после чего прецессия будет уже антициклоидальной (фиг. 2, в). Далее, в точке $\mu=A/A_2\alpha_1$ достигается ортогональность вектора L оси Ω , после чего при $\mu=1/\alpha_3$ достигается ортогональность векторов Ω и ω , так как неподвижный конус выпрямляется в плоскость.

Дальнейшее возрастание μ приводит к гипоциклоидальному режиму прецессии (фиг. 2, г). Указанные режимы вынужденного прецессионного движения тела зависят, как видно из (2.20) — (2.22), от соотношения параметров A и μ (на фиг. 3 представлены границы областей существования этих режимов. Там же штриховой линией нанесена зависимость $\mu=A/A_2\alpha_1$, отвечающая условию $\Omega \cdot L=0$.)

Из проведенного анализа следует, что если осесимметричное тело до приложения постоянного ортогонального момента совершало свободную регулярную прецессию вокруг вектора L , то при включении этого момента оно переходит в режим вынужденной регулярной прецессии вокруг новой



Фиг. 3

оси прецессии Ω , расположенной в плоскости векторов ω и L . В результате векторы ω и L , оставаясь замороженными в подвижный аксоид, начинают поворачиваться вместе с ним в пространстве, совершая прецессию вокруг оси Ω . При прекращении действия ортогонального момента восстанавливается свободная прецессия тела вокруг нового направления вектора L , причем параметры этой прецессии (угол нутации угловые скорости) останутся теми же, что и до включения ортогонального момента.

Таким образом поворот вектора L на какой-либо заданный угол Θ в пространстве может быть выполнен при разных значениях μ . Нетрудно показать, что минимальное значение расхода μT (где T — длительность процесса поворота) достигается в случае плоского поворота вектора L , когда $\Omega \cdot L = 0$. Действительно в общем случае прецессии вектора L его годограф есть дуга окружности радиуса $L \sin \beta$ (β — угол между Ω и L) и угловой длины $\Omega_y T$. Тогда из геометрии следует $L \sin \frac{1}{2}\Theta = L \sin \beta \sin \Omega_y T$.

Выражая β и Ω_y , согласно (2.22), (2.2), найдем

$$\sin(\mu T L / A) = \sin \frac{1}{2}\Theta [1 + (A/A_2 \mu - \alpha_1)^2]^{1/2}$$

откуда сразу видно, что минимум μT определяется значением $\mu = A/A_2 \alpha_1$ и есть $(\mu T)_{\min} = A\Theta/2L$.

Нетрудно получить все аналогичные соотношения и для веретенообразного осесимметричного тела, у которого осью симметрии служит ось 1, так что $A_1 \leq A \leq A_2 = A_3$.

Поступила 14 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Смольников Б. А. Обобщение эйлерава случая движения твердого тела. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
2. Окунев В. Н. Свободное движение гироскопа. М., Гостехиздат, 1951.