МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1979

УДК 531.383

УПРАВЛЕНИЕ ИЗБЫТОЧНЫМ ЧИСЛОМ СИЛОВЫХ ГИРОСКОПОВ

А. В. СОРОКИН

(Ленинград)

Рассматривается задача управления ориентацией твердого тела с помощью силовых гироскопов, имеющихся в избыточном числе. Построены алгоритмы управления работой силовых гироскопов, позволяющие не только создать требуемое управляющее воздействие, но и избежать особых ориентаций силовых гироскопов, в которых они не выполняют своих функций полностью.

1. Рассмотрим задачу управления ориентацией твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O. Предположим, что исполнительными устройствами системы управления ориентацией являются силовые гироскопы [1], которые работают в активном режиме в том смысле, что величина развиваемого ими воздействия определяется величиной управляющего сигнала, формируемого вычислительным устройством в зависимости от отклонений параметров вращательного движения твердого тела от заданных значений. Будем считать, что собственный кинетический момент каждого гироскопа направлен по оси вращения его ротора и имеет постоянную величину, а кинетический момент всей системы силовых гироскопов равен сумме указанных кинетических моментов отдельных гироскопов. Требуемая величина управляющего воздействия обеспечивается в данном случае за счет надлежащего управления ориентацией кинетических моментов гироскопов относительно твердого тела. Изменение этой ориентации осуществляется специальными устройствами, вращающими гироскопы.

Для описания движения твердого тела введем две прямоугольные правые системы координат с общим центром в точке O: $O\xi\eta\zeta$ — инерциальную систему и $Oxyz$, неизменно связанную с твердым телом.

Рассматриваемая задача состоит в том, чтобы построить законы управления вращением гироскопов, которые обеспечивают заданное движение твердого тела относительно неподвижной системы координат $O\xi\eta\zeta$.

Предположим, что распределение масс в системе, состоящей из твердого тела и силовых гироскопов, не изменяется при изменении ориентации гироскопов. Тогда движение твердого тела можно описать уравнением

$$I\boldsymbol{\omega}^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times I\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k}=-\mathbf{k}^{\cdot}+\mathbf{m}$$

где I — тензор инерции системы «твердое тело + силовые гироскопы», $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость твердого тела, $\mathbf{k}$ — кинетический момент системы силовых гироскопов в относительном движении по отношению к твердому телу, $\mathbf{m}$ — момент внешних сил, действующих на тело, точка означает локальную производную в системе координат $Oxyz$.

Пусть закон управления вращением гироскопов выбран так, что выполняется соотношение

$$\mathbf{k}^{\cdot}=\mathbf{u}+\mathbf{k}\times\boldsymbol{\omega} \qquad (1.1)$$

где $\mathbf{u}$ — управляющий момент. Тогда уравнение, описывающее движение твердого тела, примет вид $I\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\times I\boldsymbol{\omega}=-\mathbf{u}+\mathbf{m}$. Выбор вектора $\mathbf{u}$, входящего в это уравнение, исходя из заданных требований к движению твердого тела, является предметом известной задачи управляемого движения твердого тела [1-3]. Будем считать ее решенной. Тогда рассматриваемая задача сведется к тому, чтобы выбрать закон управления вращением гироскопов, обеспечивающий выполнение равенства (1.1).

Вектор $\mathbf{u}$ в равенстве (1.1) будем считать имеющим произвольное направление в пространстве в каждый момент времени, учитывая тем самым произвольность начальной ориентации твердого тела, его начальной угловой скорости и внешнего момента.

Все векторы, входящие в равенство (1.1), отождествим в дальнейшем со столбцами, составленными из проекций этих векторов на оси связанной системы координат $Oxyz$.

2. Определим ориентацию кинетических моментов гироскопов в системе координат $Oxyz$ совокупностью независимых углов $q_j(j=1,\ldots,n)$, объединяемых в вектор-столбец $\mathbf{q}$, и будем считать, что $n>3$.

При известном типе силовых гироскопов и известной схеме их расположения компоненты вектора $\mathbf{k}$ будут определенными функциями углов q_j. Подставляя эти зависимости в уравнение (1.1), получим в покомпонентной записи

$$\dot{\mathbf{q}}\cdot\operatorname{grad}k_i(\mathbf{q})=u_i+(\mathbf{k}(\mathbf{q})\times\boldsymbol{\omega})_i \quad (i=1,2,3) \tag{2.1}$$

где $k_i(\mathbf{q})$, u_i, $(\mathbf{k}(\mathbf{q})\times\boldsymbol{\omega})_i$ — компоненты векторов $k(\mathbf{q})$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{k}(\mathbf{q})\times\boldsymbol{\omega}$ соответственно, точка между векторами означает их скалярное произведение.

Назовем состояние системы силовых гироскопов, характеризуемое вектором $\mathbf{q}$, нормальным, если в этом состоянии векторы $\operatorname{grad}k_i(\mathbf{q})$ $(i=1,2,3)$ линейно-независимы. Всю совокупность нормальных состояний для данной системы силовых гироскопов назовем областью управляемости.

В области управляемости система уравнений (2.1) может быть разрешена относительно вектора $\dot{\mathbf{q}}$.

Общее решение можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{q}}=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\operatorname{grad}k_i(\mathbf{q})+\mathbf{w}(\mathbf{q}) \tag{2.2}$$

Здесь $\mathbf{w}(\mathbf{q})$ — произвольный вектор, ортогональный векторам $\operatorname{grad}k_i(\mathbf{q})=(\partial k_i/\partial q_j)$ $(j=1,\ldots,n)$, величины λ_i, объединяемые далее в вектор $\boldsymbol{\lambda}$, являются решением линейной алгебраической системы уравнений $G(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{u}+\mathbf{k}(\mathbf{q})\times\boldsymbol{\omega}$, в которой матрица коэффициентов $G(\mathbf{q})$ есть матрица Грама векторов $\operatorname{grad}k_i(\mathbf{q})$, т. е.

$$G(\mathbf{q})=(\operatorname{grad}k_i(\mathbf{q})\cdot\operatorname{grad}k_s(\mathbf{q})) \quad (i=1,2,3;\ s=1,2,3)$$

Разрешая указанную систему уравнений относительно вектора $\boldsymbol{\lambda}$, получим

$$\boldsymbol{\lambda}=G^{-1}(\mathbf{q})\,(\mathbf{u}+\mathbf{k}(\mathbf{q})\times\boldsymbol{\omega}) \tag{2.3}$$

Состояния системы силовых гироскопов, в которых векторы $\operatorname{grad}k_i(\mathbf{q})$ становятся линейно-зависимыми, назовем особыми. Это определение вызвано следующим фактом, вытекающим из свойств уравнения (2.1). Если система силовых гироскопов находится в особом состоянии, то значения вектора $\mathbf{u}$, которые можно получить при всевозможных значениях вектора $\dot{\mathbf{q}}$, т. е. всевозможных скоростях вращения гироскопов, образуют лишь двумерное множество в трехмерном пространстве или множество меньшей меры. Следовательно, система в таком состоянии не может обеспечить создания управляющих моментов любого направления. И даже более того, моменты, которые она может создать, образуют множество меры нуль среди множества всех требуемых моментов. В связи с этим целесообразно закон управления силовыми гироскопами выбрать таким образом, чтобы он обеспечивал устранение особых состояний, если это возможно.

В особых состояниях определитель матрицы $G(\mathbf{q})$, называемый определителем Грама, обращается в нуль. Следовательно, особые состояния определяются уравнением $\Delta(\mathbf{q}) = \det G(\mathbf{q}) = 0$.

Учитывая, что определитель Грама всегда неотрицателен и равен нулю только в особых состояниях, примем его величину в качестве меры расстояния до множества особых состояний и выберем вектор $\mathbf{w}(\mathbf{q})$ в выражении (2.2) таким образом, чтобы максимизировать величину определителя $\Delta(\mathbf{q})$. С этой целью могут быть применены различные математические методы оптимизации [3]. В данном случае воспользуемся наиболее простым и в то же время достаточно эффективным градиентным методом.

Как известно, направление в ортогональном дополнении подпространства, натянутого на векторы $\operatorname{grad} k_i(\mathbf{q})$, в котором функция $\Delta(\mathbf{q})$ имеет наибольшую скорость возрастания, дается проекцией вектора $\operatorname{grad}\Delta(\mathbf{q})$ на это ортогональное дополнение. Обозначим через $\mathbf{e}_s(\mathbf{q})$, $s=1,\ldots, n-3$ векторы, образующие ортогональный нормированный базис ортогонального дополнения подпространства, натянутого на векторы $\operatorname{grad} k_i(\mathbf{q})$. Тогда направление наискорейшего роста функции $\Delta(\mathbf{q})$ в указанном ортогональном дополнении будет определяться вектором

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}) = \sum_{s=1}^{n-3} (\mathbf{e}_s(\mathbf{q}) \cdot \operatorname{grad}\Delta(\mathbf{q}))\, e_s(\mathbf{q})$$

Векторы $\mathbf{e}_s(\mathbf{q})$ могут быть получены непосредственным построением. В ряде случаев, особенно при больших значениях числа n, удобнее использовать следующую последовательность при построении вектора $\mathbf{v}(\mathbf{q})$.

Представим вектор $\operatorname{grad}\Delta(\mathbf{q})$ в форме

$$\operatorname{grad}\Delta(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{3} \mu_i \operatorname{grad} k_i(\mathbf{q}) + \mathbf{v}(\mathbf{q})$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{q})$ — искомая проекция вектора $\operatorname{grad}\Delta(\mathbf{q})$, а сумма представляет собой проекцию вектора $\operatorname{grad}\Delta(\mathbf{q})$ на подпространство, натянутое на векторы $\operatorname{grad} k_i(\mathbf{q})$.

Умножая это равенство скалярно последовательно на векторы $\operatorname{grad} k_i(\mathbf{q})$, $i=1, 2, 3$, получим систему уравнений для определения множителей μ_i, объединяемых далее в столбец $\boldsymbol{\mu}$:

$$G(\mathbf{q})\boldsymbol{\mu} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = (\operatorname{grad} k_i(\mathbf{q}) \cdot \operatorname{grad}\Delta(\mathbf{q})) \quad {\scriptstyle (i=1,\,2,\,3)}$$

Отсюда получим

$$\boldsymbol{\mu} = G^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{f} \tag{2.4}$$

Определив вектор $\boldsymbol{\mu}$, найдем искомый вектор

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}) = \operatorname{grad}\Delta(\mathbf{q}) - \sum_{i=1}^{3} \mu_i \operatorname{grad} k_i(\mathbf{q}) \tag{2.5}$$

Выберем теперь вектор $\mathbf{w}(\mathbf{q})$ в выражении (2.2) пропорциональным вектору $\mathbf{v}(\mathbf{q})$, положив

$$\mathbf{w}(\mathbf{q})=\nu(\mathbf{q})\frac{\mathbf{v}(\mathbf{q})}{\|\mathbf{v}(\mathbf{q})\|} \tag{2.6}$$

где $\|\mathbf{v}(\mathbf{q})\|$ — евклидова норма вектора $\mathbf{v}(\mathbf{q})$, скалярный множитель $\nu(\mathbf{q})$ может быть либо постоянным, либо зависящим от состояния силовых гироскопов. Он позволяет учесть ряд дополнительных соображений, связанных с допустимым уровнем энергозатрат на управление вращением гироскопов, «плавностью» подхода к состояниям равновесия, исключением нежелательных состояний равновесия и т. д.

Алгоритм, определяемый соотношениями (2.2) — (2.6), дает решение поставленной задачи с учетом тех естественных ограничений, которые вносятся использованием градиентного метода оптимизации. Он позволяет создать любое заданное значение управляющего воздействия и удалиться, насколько возможно, от особых ориентаций силовых гироскопов. Продолжительность создания управляющего воздействия данной величины зависит при этом от ряда факторов: величины и направления самого воздействия, схемы расположения и типа силовых гироскопов, величины кинетического момента гироскопов. Предлагаемый алгоритм позволяет увеличить при прочих равных условиях эту продолжительность. Если указанные факторы оказываются такими, что система силовых гироскопов все же приходит к особому состоянию, то необходима так называемая «разгрузка» силовых гироскопов с помощью внешних моментов.

3. Процесс изменения ориентации гироскопов при сохранении проекций их суммарного кинетического момента на оси, связанные с твердым телом, называется перераспределением кинетического момента силовых гироскопов. Этот процесс осуществляется в данном случае за счет выбора вектора $\mathbf{w}(\mathbf{q})$ в форме (2.6). Его техническая реализация требует определенных затрат энергии. Если положить $\mathbf{w}(\mathbf{q})=0$, то затраты энергии на перераспределение кинетического момента будут отсутствовать. Получаемый при этом алгоритм обладает важной особенностью — он обеспечивает изменение суммарного кинетического момента силовых гироскопов в связанной системе координат при минимально возможном уровне скоростей вращения гироскопов, характеризуемом евклидовой нормой $\|\dot{\mathbf{q}}\|$, и, следовательно, при минимальном уровне энергозатрат на это вращение.

4. Практическая реализация построенного алгоритма предполагает наличие в системе управления ориентацией вычислительного устройства. При этом, если выходной характеристикой привода, вращающего гироскопы, является не скорость, а угол поворота, то в вычислительном устройстве необходимо решать систему дифференциальных уравнений (2.2). С этой целью можно использовать простейший одношаговый метод численного интегрирования, так как информация о фактической ориентации гироскопов в каждый момент времени может быть легко получена с соответствующих датчиков угла. С целью уменьшения объема вычислений перераспределение кинетического момента силовых гироскопов можно производить дискретно, в зависимости от величины определителя $\Delta(\mathbf{q})$.

Поступила 13 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. М., «Наука», 1974.
2. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М., «Наука», 1973.
3. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М., «Наука», 1975.