**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 1979**

УДК 531.383

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РЕГУЛИРУЕМЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ ЦЕНТРА МАСС

Г. Д. БЛЮМИН, Ж. Г. ЗАВОЗИН

(Москва, Комсомольск-на-Амуре)

Известны [1–4] условия невозмущаемости различных гиромаятниковых систем, полученные в предположении, что силы тяготения, действующие на них, приводятся к единственной силе, которая приложена в центре тяжести системы, постоянна по величине и направлена к центру Земли. Это допущение, в сущности, предполагает следующую модель силового поля: силы тяготения, приложенные к частицам системы, параллельны линии, соединяющей точку подвеса системы с центром Земли, и не зависят от расстояния до этого центра. Такое поле будем условно называть однородным, хотя, строго говоря, оно однородно лишь в границах самой системы.

Под невозмущаемостью гиромаятниковых систем подразумевается их свойство сохранять и указывать направление геоцентрической вертикали места или направление географического меридиана (или то и другое вместе) при любом характере движения объекта, на котором эти системы установлены.

В данной работе полученные ранее условия невозмущаемости гиромаятниковых систем обобщаются на случай движения в ньютоновском поле сил тяготения. Приводится пример конкретной реализации гироскопической системы, невозмущаемой в ньютоновском поле сил.

1. Пусть механическая система S, состоящая из твердого тела S_1 и соединенных с ним других тел (твердых или изменяемых), имеет следующие отличительные признаки:

1. При любых взаимных перемещениях составляющих ее тел центр масс системы S остается на ее главной оси инерции, проходящей через некоторую точку O тела S_1, в дальнейшем именуемую точкой опоры.

2. Расстояние l от этой точки до центра масс системы регулируется согласно равенству

$$l=\lambda R \tag{1.1}$$

где R — расстояние от точки опоры до центра Земли, λ — любой постоянный коэффициент.

Нетрудно видеть, что частным случаем таких систем являются рассмотренные в [5] гиростаты с одной неподвижной точкой. С некоторыми практически мало стеснительными ограничениями, которые выясняются ниже, к этим системам относятся и гиромаятниковые системы, рассмотренные в [1–4].

Пусть система S движется в поле сил тяготения Земли, которое полагается ньютоновским, т. е. сила тяготения F, действующая на каждую элементарную частицу системы, всегда направлена к центру Земли и ее модуль $F=f\Delta mM/r^2$, где f — универсальная гравитационная постоянная, Δm, M — массы частицы и Земли, r — расстояние от частицы до центра Земли.

Кроме сил тяготения на систему действует только одна внешняя сила, приложенная в точке опоры O.

Введем в рассмотрение четыре правые системы координат: $O_aX_aY_aZ_a$ — с началом в центре Земли и осями, направленными на «неподвижные» звезды (эту систему принимаем за инерциальную); трехгранник $OXYZ$, ось Z которого направлена по геоцентрической вертикали, а ось X — по проекции абсолютной скорости $\mathbf{v}$ точки опоры на плоскость геоцентрического горизонта[1] в точке O; трехгранник $O\xi$, η, ζ, движущийся поступательно; трехгранник $Oxyz$ с осями, совпадающими с главными осями инерции системы в точке O, причем центр масс системы лежит на оси z. Определим положение трехгранника $Oxyz$ (орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) относительно системы $OXYZ$ (орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) матрицей направляющих косинусов.

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{e}_1$	e_{11}	e_{12}	e_{13}
$\mathbf{e}_2$	e_{21}	e_{22}	e_{23}
$\mathbf{e}_3$	e_{31}	e_{32}	e_{33}

Обозначим Λ тензор инерции системы

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{Vmatrix}$$

где A, B, C — моменты инерции системы относительно осей x, y, z соответственно.

Из теоремы о кинетическом моменте следует

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = mg\mathbf{e}_3\times\mathbf{l} + 3\frac{g}{R}\mathbf{e}_3\times\Lambda\mathbf{e}_3 + \mathbf{l}\times(-m\mathbf{w}) \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{K}_0$ — кинетический момент системы S относительно точки O при движении системы относительно трехгранника $O\xi$, η, ζ; g — ускорение силы тяготения в точке O; m — масса системы, $\mathbf{l}$ — радиус-вектор центра масс, проведенный из точки O, $\mathbf{w}$ — абсолютное ускорение точки O.

Первые два слагаемых в правой части (1.2) в совокупности представляют главный момент относительно точки O сил тяготения, вычисленный с точностью до $(\rho/R)^2$, где ρ — максимальный линейный размер системы S [6]. Третье слагаемое равно моменту силы инерции $\mathbf{\Phi}$, ($\mathbf{\Phi}=-m\mathbf{w}$), если приложить ее в центре масс системы. Если же поле сил тяготения полагать однородным, то второе слагаемое в правой части (1.2) исчезнет, а первое будет представлять момент равнодействующей сил тяготения, приложенной в центре масс системы, который в этом случае отождествляется с ее центром тяжести.

Положим, что движение точки опоры задано и что при любом законе этого движения ось z остается направленной к центру Земли, т. е. $\mathbf{l}\parallel\mathbf{e}_3$. Тогда вектор $\Lambda\mathbf{e}_3$ оказывается также коллинеарным вектору $\mathbf{e}_3$, так как в общем случае $\Lambda e_3 = Ae_{31}\mathbf{i} + Be_{32}\mathbf{j} + Ce_{33}\mathbf{k}$, но если $\mathbf{l}\parallel\mathbf{e}_3$, то $e_{31}=e_{32}=0$. Таким образом, при $\mathbf{l}\parallel\mathbf{e}_3$ оба слагаемых гравитационного момента обращаются в нуль. Положим для определенности, что центр масс расположен на отрицательной части оси z. Тогда, учитывая (1.1), имеем $\mathbf{l}=-\lambda\mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки O, проведенный из центра Земли O_a, и уравнение (1.2) примет вид

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\lambda\mathbf{R}\times m\mathbf{v})$$

откуда

$$\mathbf{K}_0 = \lambda\mathbf{R}\times m\mathbf{v} + \mathbf{D} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{D}$ — постоянный вектор.

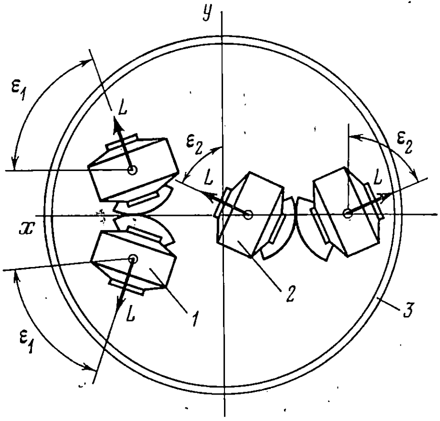
Пусть теперь дано, что при произвольном законе движения точки O кинетический момент $\mathbf{K}_0$ подчиняется равенству (1.3). Покажем, что совместно с (1.1) этого достаточно, чтобы ось z всегда была направлена к

[1] Случай $\mathbf{v}\parallel OZ$ из рассмотрения исключается.

центру Земли. Действительно, из (1.1) и (1.3) следует

$$ml\mathbf{e}_3\times\mathbf{w}=mgl\mathbf{k}\times\mathbf{e}_3+3\frac{g}{R}\mathbf{e}_3\times\Lambda\mathbf{e}_3+ml\mathbf{k}\times\mathbf{w} \qquad (1.4)$$

В этом уравнении неизвестной функцией является только вектор $\mathbf{K}(t)$, так как при заданном движении точки опоры векторы $\mathbf{w}$ и $\mathbf{e}_3$ являются известными функциями. Единственным решением уравнения (1.4) является $\mathbf{k}(t)=\mathbf{e}_3(t)$, что и требовалось доказать.



Следовательно, для того чтобы главная центральная ось инерции системы S оставалась направленной по геоцентрической вертикали при произвольном движении точки опоры O, необходимо и достаточно, чтобы кинетический момент системы $\mathbf{K}_0$ удовлетворял равенству (1.3).

Это равенство совпадает с полученным в [3, 4] условием невозмущаемости широкого класса гироскопических систем; такое совпадение, естественно, объясняется тем, что системы, рассмотренные в [3, 4], обладают сформулированным выше вторым признаком системы S (первый признак в указанных работах не являлся обязательным, так как силовое поле предполагалось однородным).

Следовательно, условие невозмущаемости гиромаятниковых систем в форме (1.3), полученные в [3, 4] в предположении однородности поля сил тяготения, остается в силе и в случае ньютоновского поля, если предъявить к этим системам лишь одно дополнительное требование: линия, соединяющая точку подвеса с центром масс системы, должна совпадать с одной из главных осей инерции.

2. В качестве примера конкретной реализации гироскопической системы, невозмущаемой в ньютоновском поле сил тяготения, рассмотрим систему, которая схематически изображена на фигуре и в дальнейшем именуется гиросферой.

В жесткой оболочке (*3*), с которой свяжем трехгранник $Oxyz$, смонтированы две пары одинаковых гирокамер (*1* и *2*), которые могут поворачиваться относительно оболочки вокруг осей прецессии, параллельных оси z. В каждой из этих пар гирокамеры[1] связаны между собой зубчатыми секторами (или иным спарником) так, что могут поворачиваться на равные углы в противоположные стороны. Собственные кинетические моменты роторов ($\mathbf{H}_i=1$, 2, 3, 4) расположены симметрично, образуя в одной паре угол ε_1 с осью x, в другой — угол ε_2 с осью y. В каждой паре на оси одной из гирокамер установлен датчик моментов, прикладывающий к гирокамере момент относительно оси прецессии, формируемый по определенному закону, вид которого указан ниже. Распределение масс гиросферы таково, что ось z является главной центральной осью инерции всей системы. Для того чтобы повороты гирокамер не изменяли геометрии масс системы, достаточно центр масс каждой из гирокамер поместить на ее оси прецессии и вместе с тем положить, что эта ось является осью динамической симметрии гирокамеры.

---

[1] Гирокамерой будем называть систему, состоящую из кожуха и ротора.

В гиросфере имеется также механизм (не изображенный на фигуре), который перемещает некоторую массу вдоль оси z так, что выполняется равенство (1.1). (Сведения о величине R получаются от стороннего источника, например от радиовысотомера.) Гиросфера подвешена без трения в точке O на объекте, движущемся в поле сил тяготения Земли, которое полагаем ньютоновским.

Из приведенного описания гиросферы видно, что она обладает двумя признаками, отличающими системы S, следовательно, для ее невозмущаемости необходимо и достаточно, чтобы ее кинетический момент подчинялся равенству (1.3) при произвольном движении объекта. Покажем, что при определенном законе формирования моментов на осях прецессии гирокамер равенство (1.3) реализуется системой автоматически.

Кинетический момент $\mathbf{K}_0$ гиросферы можно представить в виде

$$\mathbf{K}_0=\mathbf{H}+\Lambda\boldsymbol{\omega} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{H}$ — сумма собственных кинетических моментов всех гироскопов, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость оболочки гиросферы (или, что то же, трехгранника $Oxyz$).

Проекции вектора $\mathbf{H}$ на оси равны

$$H_x=2L\cos\varepsilon_1,\quad H_y=2L\cos\varepsilon_2,\quad H_z=0 \tag{2.2}$$

где L — модуль кинетического момента каждого из роторов.

Положим теперь, что равенство (1.3) выполняется и начальные условия движения таковы, что $\mathbf{D}=0$. Тогда из (1.3) и (2.1) следует

$$\mathbf{H}+\Lambda\boldsymbol{\omega}=\lambda\mathbf{R}\times m\mathbf{v} \tag{2.3}$$

Так как при выполнении равенства (1.3) ось z остается всегда параллельной вектору $\mathbf{R}$, то

$$\mathbf{v}=\mathbf{R}^{\cdot}=R^{\cdot}\mathbf{k}+\boldsymbol{\omega}\times R\mathbf{k} \tag{2.4}$$

Проектируя равенство (2.3) на оси x, y, z с учетом (2.2) и (2.4), получим

$$\lambda mR^2\omega_x=2L\cos\varepsilon_1+A\omega_x,\quad \lambda mR^2\omega_y=2L\cos\varepsilon_2+B\omega_y,\quad O=C\omega_z \tag{2.5}$$

Отсюда

$$\omega_x=\frac{2L\cos\varepsilon_1}{\lambda mR^2-A},\quad \omega_y=\frac{2L\cos\varepsilon_2}{\lambda mR^2-B}\quad \omega_z=0 \tag{2.6}$$

При условии, что центр масс каждой из гирокамер лежит на ее оси прецессии и что эта ось является осью динамической симметрии гирокамеры, уравнения движения гирокамер можно представить в виде

$$\begin{aligned} &2I(\varepsilon_1^{\cdot\cdot}+\omega_z^{\cdot})+\omega_x 2L\sin\varepsilon_1=N_1,\\ &2I(\varepsilon_2^{\cdot\cdot}+\omega_z^{\cdot})+\omega_y 2L\sin\varepsilon_2=N_2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

где I — момент инерции каждой из гирокамер относительно ее оси прецессии; N_1 и N_2 — моменты сил, прикладываемых к гирокамерам датчиками моментов. Уравнения (2.7) могут быть получены применением теоремы о кинетическом моменте к каждой из гирокамер, как это сделано, например, в [1].

Из (2.6) и (2.7) следует

$$N_1=2I\varepsilon_1^{\cdot\cdot}+\frac{2L^2\sin 2\varepsilon_1}{\lambda mR^2-A},\quad N_2=2I\varepsilon_2^{\cdot\cdot}+\frac{2L^2\sin 2\varepsilon_2}{\lambda mR^2-B} \tag{2.8}$$

Таким образом, для невозмущаемости гиросферы необходимо, чтобы моменты N_1 и N_2 формировались согласно (2.8).

Докажем теперь, что реализация соотношений (2.8) является и достаточной для невозмущаемости гиросферы. При выполнении условия (2.8) выражения (2.6) угловых скоростей удовлетворяют уравнениям (2.7), а проекции вектора $\mathbf{K}_0$ принимают вид

$$K_x=H_x+A\omega_x=\lambda mR^2\omega_x,\quad K_y=H_y+B\omega_y=\lambda mR^2\omega_y,\quad K_z=C\omega_z=0$$

откуда $\mathbf{K}_0=\lambda mR^2\boldsymbol{\omega}$.

Подставив значение $\mathbf{K}_0$ в уравнение (1.2), получим

$$\frac{d}{dt}(\lambda mR^2\boldsymbol{\omega})=mg\mathbf{e}_3\times\mathbf{l}+3\frac{g}{R}\mathbf{e}_3\Lambda\mathbf{e}_3+\mathbf{l}\times(-m\mathbf{w}) \tag{2.9}$$

Это уравнение содержит единственную неизвестную функцию $\boldsymbol{\omega}(t)$, так как векторы $\mathbf{e}_3(t)$ и $\mathbf{w}(t)$ определяются законом движения точки O, а вектор $\mathbf{l}$ при задании его начального направления однозначно определяется функцией $\boldsymbol{\omega}(t)$ (и, конечно, еще равенством $l=\lambda R$). При соответствующей начальной выставке системы единственным решением уравнения (2.9) является

$$\boldsymbol{\omega}=(\mathbf{R}\times\mathbf{v})/R^2 \tag{2.10}$$

Действительно, это значение угловой скорости трехгранника $Oxyz$ совпадает с угловой скоростью вектора $\mathbf{R}$, следовательно, если вектор $\mathbf{l}$, направленный вдоль оси z, коллинеарен вектору $\mathbf{R}$ в начальный момент, то он останется таким и в дальнейшем. Но тогда, как это было показано в п. 1, первые два слагаемых в правой части (2.9) обращаются в нуль. Подставив же значение $\boldsymbol{\omega}(t)$ из (2.10) в оставшиеся слагаемые уравнения (2.9), легко убедимся, что оно удовлетворяется при любом виде функции $\mathbf{R}(t)$. Таким образом, при любом законе движения точки опоры O моменты N_1 и N_2, формируемые согласно (2.8), сообщают гиросфере ту же угловую скорость, с которой вращается в инерциальном пространстве геоцентрическая вертикаль места. Поэтому ось z, будучи в начальный момент выставленной вертикально, остается вертикальной и в дальнейшем.

Положим теперь, что в гиросфере имеется лишь одна пара гироскопов, например, та, которая расположена симметрично относительно оси x. Путем тех же рассуждений, что и выше, придем к выводу, что для невозмущаемости двухроторной гиросферы необходимо формировать момент N_1 согласно первому равенству (2.8), но возникает еще дополнительное требование: момент инерции B должен подчиняться равенству $B=mlR$, физический смысл которого состоит в том, что период малых колебаний гиросферы вокруг оси y (при невращающихся гироскопах) должен быть тот же, что у невозмущаемого физического маятника [2].

Если придерживаться рамок прецессионной теории, это дополнительное требование, естественно, отпадает, а для момента N_1 приходим к известному выражению $N_1=2L^2\sin 2\varepsilon_1/mlR$, полученному в [1] для двухроторного гирогоризонткомпаса.

Отметим, что выше установлены необходимые и достаточные условия существования определенного движения механической системы, но не обсуждался вопрос об устойчивости этого движения, который требует специального рассмотрения.

Поступила 26 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю.* К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
2. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М., «Наука», 1976.
3. *Блюмин Г. Д., Чичинадзе М. В.* Условия невозмущаемости однороторного гирокомпаса. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 3.
4. *Климов Д. М.* Об условиях невозмущаемости гироскопической рамы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
5. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гиростатов. ПММ, 1961, т. 25, вып. 1.
6. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.