УДК 539.3:534.1

УСЛОВИЕ ВЕЙЕРШТРАССА В ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С РЕБРОМ

А. М. САМСОНОВ

(Ленинград)

В задаче о максимуме основной частоты колебаний упругой пластины заданного объема и переменной толщины многие исследователи указывали на отсутствие сильного максимума [1–3]. В [4] этот факт был установлен строго.

Если, отказавшись от управления толщиной, подкрепить пластину ребром и управлять его изгибной и крутильной жесткостями, то, как показано в предлагаемой работе, стационарный режим управления оказывается оптимальным в смысле необходимого условия вейерштрассовского типа.

1. Пусть пластина S толщины h (для простоты изложения примем $h=\mathrm{const}$) подкреплена ребром жесткости – упругим тонким стержнем Г прямоугольного поперечного сечения со сторонами e и f. Положение ребра на пластине и его объем v будем считать заданными

$$v = \oint_{\Gamma} e(s) f(s)\, ds = \mathrm{const} \tag{1.1}$$

Пусть w – прогиб пластины с ребром, ω – основная частота поперечных колебаний конструкции, (n, s) – система натуральных координат на линии Г, s – длина дуги Г, $k(s)$ – кривизна ребра, $a(s)$ и $c(s)$ – его изгибная и крутильная жесткости. Плотности материалов пластины ρ_0 и ребра ρ, а также цилиндрическую жесткость пластины D считаем заданными постоянными.

Запишем выражения для потенциальных энергий деформации пластины (u_0) и ребра (u) и плотностей кинетических энергий свободных колебаний (t_0 и t) в виде

$$u_0 = \frac{D}{2} \iint_S [(\Delta w)^2 - 2(1-\nu)(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2)]\, dx\, dy,$$

$$u = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} [a(s) l^2(w) + c(s) m^2(w)]\, ds$$

$$l(w) = k(s) w_n - w_{ss}, \qquad m(w) = k(s) w_s + w_{ns}$$

$$t_0 = \frac{\rho_0 h \omega^2}{2} \iint_S w^2\, dx\, dy, \qquad t = \frac{\rho \omega^2}{2} \oint_{\Gamma} w^2 e(s) f(s)\, ds$$

Задача оптимизации заключается в определении таких неотрицательных управлений $e(s)$ и $f(s)$, которые максимизируют основную частоту собственных колебаний пластины с ребром при заданном объеме конструкции.

Используя принцип Рэлея, запишем основную частоту колебаний в виде $\omega^2 = (u_0+u)/(t_0+t)$ и составим расширенный функционал λ, введя множитель Лагранжа μ для учета ограничения (1.1)

$$\lambda = \frac{1}{t_0+t} \left[u_0 + u + \mu \left(\oint_{\Gamma} e(s) f(s)\, ds - v \right) \right]$$

Жесткости ребра с прямоугольным поперечным сечением выражаются через размеры e и f, $e \leqslant f$ формулами

$$a(s) = \alpha e(s) f^3(s), \qquad c(s) = \beta f(s) e^3(s) \tag{1.2}$$

где константы α и β определяются материалом ребра.

Запишем приращение функционала λ при изменении управлений $\delta e = E - e$, $\delta f = F - f$:

$$(T_0 + T)\delta\lambda = (\delta u - \lambda \delta t) + (\delta u_0 - \lambda \delta t_0) + \mu \oint_{\Gamma} (f \delta e + e \delta f + \delta e \delta f)\, ds \tag{1.3}$$

Большими буквами здесь и далее обозначены соответствующие величины в допустимом режиме.

Приращения δu_0 и δt_0 не содержат приращений управлений δe и δf в явном виде. Вычислим величину изменения энергии ребра

$$\delta t \equiv \oint_\Gamma (EFW^2 - efw^2)\,ds = \oint_\Gamma [w^2(f\delta e + e\delta f) + 2efw\delta w]\,ds +$$

$$+ \oint_\Gamma [ef(\delta w)^2 + (2w+\delta w)(f\delta e + e\delta f + \delta e\delta f)\delta w]\,ds \tag{1.4}$$

$$\delta u = \alpha \oint_\Gamma [EF^3L^2(W) - ef^3l^2(w)]\,ds + \beta \oint_\Gamma [E^3FM^2(W) - e^3fm^2(w)] \tag{1.5}$$

Подынтегральное выражение в первом слагаемом формулы (1.5) равно

$$\delta(ef^3l^2) = (f^3\delta e + 3ef^2\delta f)l^2 + 2ef^3l\delta l + ef^3(\delta l)^2 + (2l+\delta l)f^3\delta e\delta l + el^2(3f+\delta f)(\delta f)^2 +$$
$$+ (3f^2\delta f + 3f(\delta f)^2 + (\delta f)^3)[l^2\delta e + (2l+\delta l)(e+\delta e)\delta l] \tag{1.6}$$

а во втором слагаемом получается из (1.6) формальной заменой символов $l\to m$, $e\to f$, $f\to e$.

2. Выделив из (1.3) линейные по δe и δf слагаемые, приходим к системе уравнений

$$\alpha l^2f^2 + 3\beta m^2e^2 = \lambda w^2 - \mu, \qquad 3\alpha l^2f^2 + \beta m^2e^2 = \lambda w^2 - \mu$$

из которых в качестве условия стационарности следует равенство удельных энергий изгиба и кручения ребра

$$\alpha ef^3l^2(w) = \beta fe^3m^2(w) \tag{2.1}$$

и определяется множитель μ:

$$\mu = \lambda w^2 - 2[\alpha f^2l^2(w) + \beta e^2m^2(w)] \tag{2.2}$$

Слагаемые, линейно зависящие от приращений δw, δl, δm, приводят к сопряженной задаче, решение которой совпадает с решением исходной с точностью до постоянного множителя.

Нелинейные по приращениям управлений слагаемые в правой части выражения (1.3) имеют вид

$$\oint_\Gamma [(\mu - \lambda w^2)\delta e\delta f + \alpha\{ef^3(\delta l)^2 + f^3(2l+\delta l)\delta e\delta l + el^2(3f+\delta f)(\delta f)^2 +$$
$$+ [3f^2\delta f + 3f(\delta f)^2 + (\delta f)^3][l^2\delta e + (e+\delta e)(2l+\delta l)\delta l]\} +$$
$$+ \beta\{\ldots\} - \lambda(2w+\delta w)(f\delta e + e\delta f + \delta e\delta f)\delta w]\,ds \tag{2.3}$$

Множитель при β, обозначенный скобками $\{\ldots\}$, получается из выражения в скобках при α упомянутой выше заменой.

Можно показать, что при игольчатом варьировании управлений на отрезке $\gamma\in\Gamma$, $\operatorname{mes}\gamma\to 0$ оптимальные и допустимые значения величин w, w_n, w_s совпадают с точностью до членов $O(\operatorname{mes}\gamma)$; это оправдывает выделение слагаемых (2.3) в качестве главной по параметру $(\operatorname{mes}\gamma)$ части приращения функционала.

Далее, можно показать, что в пределах отрезка γ справедливы соотношения [1]

$$AL(W) = al(w) + O(\operatorname{mes}\gamma), \qquad CM(W) = cm(w) + O(\operatorname{mes}\gamma) \tag{2.4}$$

из которых, используя (1.2), получаем

$$EF^3\delta l = -l[f^3\delta e + E(3f^2\delta f + 3f(\delta f)^2 + (\delta f)^3]$$
$$E^3F\delta m = -m[e^3\delta f + F(3e^2\delta e + 3e(\delta e)^2 + (\delta e)^3] \tag{2.5}$$

Подстановка (2.2) и (2.5) в (2.3) позволяет записать множитель при α в виде $-l^2f^2[f^4(\delta e)^2 + 5F^3e\delta e\delta f + e^2(\delta f)^2\ (3(\delta f)^2 + 8f\delta f + 6f^2) + \delta f(\delta e)^2(5f^3 + 9f^2\delta f + 7f(\delta f)^2 + 2(\delta f)^3)]/EF^3$ и аналогично – множитель при β.

[1] См. *Самсонов А. М.* Задачи оптимального проектирования упругих пластин с ребрами жесткости. Л., Физ.-техн. ин-т АН СССР, 1978, препринт № 565.

Отметим частные случаи. При управлении только одним из размеров поперечного сечения ребра справедливы необходимые условия Вейерштрасса

$$f = \text{const}, \qquad \delta f = 0 \Rightarrow \delta\lambda = -\frac{\alpha f^3 l^2(w)}{E}(\delta e)^2 < 0, \qquad \forall\, \delta e \neq 0$$

$$e = \text{const}, \qquad \delta e = 0 \Rightarrow \delta\lambda = -\frac{\beta e^3 m^2(w)}{F}(\delta f)^2 < 0, \qquad \forall \delta f \neq 0$$

При изменении обоих размеров сечения выполнено условие Лежандра $\delta\lambda \sim -(7x^2+10xy+7y^2)<0$ для любых $x=\delta e/e$ и $y=\delta f/f$.

Для доказательства выполнения условия Вейерштрасса в общем случае управления необходимо установить, что выражение

$$-\left(\frac{EF}{ef}\right)^3 \frac{\delta\lambda}{\alpha e f^3 l^2} = x^2(x+1)^2(y+1)^3(2y+1) + 5xy(x+1)^2(y+1)^2(x+y+2) +$$

$$+ y^2(y+1)^2(x+1)^3(2x+1) + x^2(y+1)^2(3x^2+8x+6) + y^2(x+1)^2(3y^2+8y+6) \equiv Y(x, y)$$

неотрицательно при $x\geqslant-1$ и $y\geqslant-1$, т. е. при неотрицательных E, e, F, f.

При помощи замены $t=y+1$, $z=x+1$ приведем симметрический полином $Y(x, y)$ к виду

$$Y(x, y) = 4t^4z^4 - 6t^3z^3 + z^2 + t^2 \equiv Y_1(z; t) \qquad (z, t \geqslant 0)$$

и выразим результат через элементарные симметрические полиномы $u=tz\geqslant0$ и $v=t+z\geqslant0$:

$$Y_1(z, t) = 4u^4 - 6u^3 - 2u + v^2 \equiv Y_2(u, v)$$

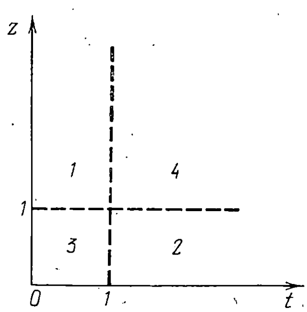
Исследуя знак Y_2, заметим, что в областях 1 и 2 (фигура) справедливо $v_{\min} = 1+u$, следовательно

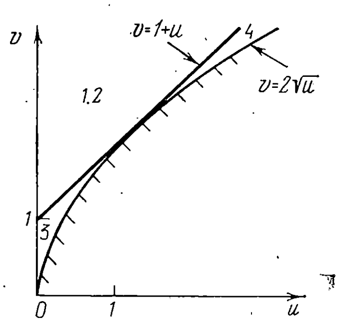
$$Y_2(u, v) \geqslant 4u^4 - 6u^3 - 2u + (1+u)^2 = (u-1)^2(4u^2+2u+1) \geqslant 0, \qquad Y_2(1, 2) = 0 \qquad (2.6)$$

В областях 3 и 4 имеем $v_{\min} = 2\sqrt{u}$, поэтому

$$Y_2(u, v) \geqslant 4u^4 - 6u^3 + 2u = 2u(u-1)^2(2u+1) \geqslant 0, \qquad Y_2(0, 0) = 0, \qquad Y_2(1, 2) = 0 \qquad (2.7)$$

Из оценок (2.6) и (2.7) заключаем, что при любых допустимых приращениях управлений δe и δf справедливо условие Вейерштрасса $\delta\lambda\leqslant0$; следовательно, оптимальность стационарного распределения $e(s)$ и $f(s)$ относительно сильных локальных вариаций управлений доказана.





Таким образом, установлено, что введение ребра на пластине и управление его жесткостями решает задачу о максимизации основной частоты колебаний упругой пластины заданного объема (и двойственную задачу). Отметим, что результаты легко обобщаются на задачу о пластине с ребром произвольного поперечного сечения, имеющего характерные размеры e и f.

Поступила 8 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Olhoff N.* On singularities, local optima and formation of stiffeners in optimal design of plates. Proc. IUTAM Sympos. on optimization in structural design. Warsaw, 1973, Berlin, Springer-Verlag, 1973.
2. *Mróz Z.* Multiparameter optimal design of plates and shells. J. Structural Mech., 1973, vol. 1, p. 371—392.

3. *Арман Ж.-Л. П.* Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. М., «Мир», 1977.
4. *Лурье К. А., Черкаев А. В.* О применении теории Прагера к задаче оптимального проектирования тонких пластин. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 6.

УДК 539.3

К ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК КОНЕЧНОГО ПРОГИБА

Г. М. КУЛИКОВ

(Тамбов)

Теория многослойных оболочек конечного прогиба сформулирована в [1, 2]. Для каждого слоя оболочки принимается справедливой гипотеза прямой линии. Этот подход является наиболее общим, так как поперечные сдвиги описываются функциями, произвольными для каждого слоя, однако порядок уравнений зависит от числа слоев.

Теории, основанные на гипотезах, привлекаемых для всего пакета слоев в целом, рассматривались в [3, 4]. Общим для этих работ является то, что деформации поперечного сдвига аппроксимируются двумя функциями. Более подробно обсуждаемые вопросы рассматриваются в [5].

Здесь учет деформаций поперечного сдвига осуществляется с помощью $2r$ функций постоянных для всего пакета слоев. Частный вариант предложенной теории ($r=1$) особенно прост и выразителен. Для этого случая получена система трех дифференциальных уравнений относительно силовой функции F, функции перемещений χ и функции сдвига φ^1. Общий порядок системы в отличие от [3, 6] равен двенадцати. Уравнения отличаются лишь постоянными коэффициентами от уравнений трехслойных оболочек, полученных в [7].

1. Рассмотрим многослойную пологую оболочку, составленную из s трансверсально-изотропных слоев. Будем пренебрегать поперечным обжатием слоев. За исходную поверхность примем внутреннюю граничную поверхность, которую отнесем к декартовым координатам x_1, x_2. Координату z будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к исходной поверхности.

Пусть h_k – толщина k-го слоя; h – толщина оболочки; δ_k – расстояние от исходной поверхности до конца k-го слоя ($\delta_0=0$); E_k, ν_k, G_k – модуль упругости, коэффициент Пуассона, модуль поперечного сдвига k-го слоя; k_{ij} – кривизны и кручение координатных линий; u_i, w – тангенциальные и нормальное перемещения точек исходной поверхности; u_i^k – тангенциальные перемещения точек k-го слоя; α_i^p – функции, характеризующие поперечный сдвиг; $f_p'(z)$ – известные функции (штрих обозначает дифференцирование по z); δ_{ij} – символ Кронеккера. Здесь и в дальнейшем $i, j=1, 2$; $k=1, 2, \ldots, s$; $p, q=1, 2, \ldots, r$; $m=0, 1, \ldots, r$.

Следуя [7], введем приведенный коэффициент Пуассона ν, безразмерные толщины слоев t_k, безразмерные жесткостные характеристики γ_k, осредненный модуль упругости E, а также необходимые обозначения

$$\nu=\sum_{k=1}^{s}\frac{E_k h_k \nu_k}{1-\nu_k^2}\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}\right)^{-1}, \qquad t_k=h_k h^{-1}$$

$$\gamma_k=\frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}\left(\sum_{k=1}^{s}\frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}\right)^{-1}, \qquad E=(1-\nu^2)\,h^{-1}\sum_{k=1}^{s}\frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}$$

$$\omega_k=\delta_k h^{-1}, \qquad L_k^p=\sum_{n=1}^{k-1}(f_n^p-f_{n-1}^p)\,G_n^{-1}-f_{k-1}^p G_k^{-1}, \qquad f_n^p=f_p(\delta_n)\,h^{-1} \quad (n=0,1,\ldots,s-1)$$

$$\int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_p\,dz=\frac{1}{2}h^2\lambda_k^p, \qquad \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_p z\,dz=\frac{1}{12}h^3\pi_k^p, \qquad \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} f_p' f_q'\,dz=h\mu_k^{pq},$$